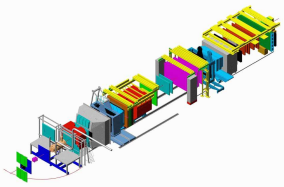


# Wie die Likelihood-Methode funktionieren könnte

Tobias Weisrock

Institut für Kernphysik  
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

COMPASS Mainz Meeting – 4. Oktober 2011



## Einige Gedanken zur Likelihood Methode

- ❖ Nachteile der ursprünglichen Methode
- ❖ Alternative

### Vorgehensweise I

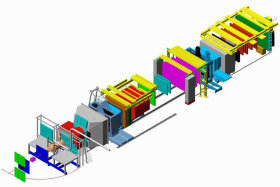
Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

### Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

# Einige Gedanken zur Likelihood Methode



# Nachteile der ursprünglichen Methode

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

❖ Nachteile der ursprünglichen Methode

❖ Alternative

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

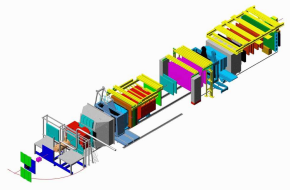
Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

- Dynamische Gruppierung der Photomultiplier geht von gleicher Effizienz aus
- Komplizierte Wahl der Koordinaten
- Fits der Verteilungen enthalten keine physikalische Information
- Unmotiviert Qualitätsschnitte auf Likelihoods

# Alternative



## Einige Gedanken zur Likelihood Methode

❖ Nachteile der ursprünglichen Methode

## ❖ Alternative

### Vorgehensweise I

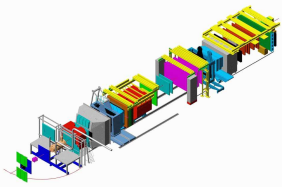
Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

### Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

- Betrachte jeden Photomultiplier einzeln
- Wähle als Koordinaten die Winkel des Strahls  $\theta_x$  und  $\theta_y$
- Ersetze gefittete Verteilungen durch „natürlichere“ Definition der Wahrscheinlichkeiten
- Verwende Likelihood-Verhältnisse zur Entscheidung



Einige Gedanken zur  
Likelihood Methode

---

### Vorgehensweise I

- ❖ Zielsetzung
- ❖ Erinnerung: Das Theorem von Bayes
- ❖ Anwendung auf unser Problem

Bestimmung der  
Wahrscheinlichkeiten

---

### Vorgehensweise II

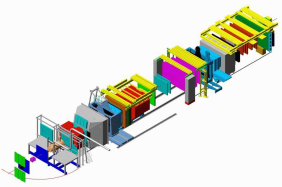
Ermittlung der  
Likelihoods

---

Ergebnisse

---

# Vorgehensweise I



# Zielsetzung

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

---

Vorgehensweise I

❖ Zielsetzung

❖ Erinnerung: Das Theorem von Bayes

❖ Anwendung auf unser Problem

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

---

Vorgehensweise II

---

Ermittlung der Likelihoods

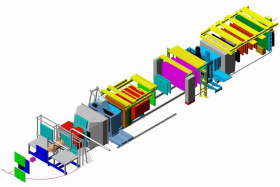
---

Ergebnisse

---

Was messen wir?

- Strahlwinkel  $\theta_x$  und  $\theta_y$
- Verhalten der Photomultiplier (Signal oder kein Signal)



# Zielsetzung

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

❖ Zielsetzung

❖ Erinnerung: Das Theorem von Bayes

❖ Anwendung auf unser Problem

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

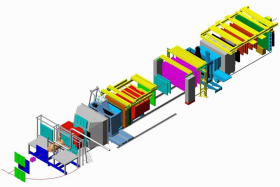
Ergebnisse

Was messen wir?

- Strahlwinkel  $\theta_x$  und  $\theta_y$
- Verhalten der Photomultiplier (Signal oder kein Signal)

Was wollen wir daraus bestimmen?

- Wahrscheinlichkeit, dass ein Kaon bzw. Pion vorliegt (für jeden Photomultiplier)
- Likelihood als Produkt dieser Wahrscheinlichkeiten



# Erinnerung: Das Theorem von Bayes

Das Theorem von Bayes für die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit lautet

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Dabei ist:

$P(A|B)$  die Wahrscheinlichkeit für  $A$ , falls  $B$  eingetreten ist

$P(B|A)$  die Wahrscheinlichkeit für  $B$ , falls  $A$  eingetreten ist

$P(A)$  die a-priori Wahrscheinlichkeit für  $A$

$P(B)$  die a-priori Wahrscheinlichkeit für  $B$

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

## Vorgehensweise I

❖ Zielsetzung

❖ Erinnerung: Das Theorem von Bayes

❖ Anwendung auf unser Problem

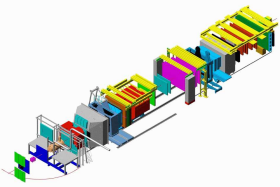
Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

## Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse





# Anwendung auf unser Problem

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

## Vorgehensweise I

- ❖ Zielsetzung
- ❖ Erinnerung: Das Theorem von Bayes

## ❖ Anwendung auf unser Problem

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

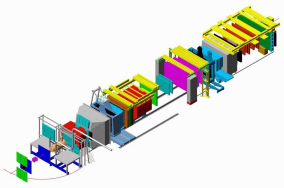
## Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

*Beispiel:* Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Signal an Photomultiplier  $i$  bei bestimmten Winkeln  $\theta_x$  und  $\theta_y$  durch ein Kaon verursacht wurde ergibt sich zu

$$P_{xy}^i(\text{Kaon}|\text{Signal}) = \frac{P_{xy}^i(\text{Signal}|\text{Kaon}) \cdot P_{xy}(\text{Kaon})}{P_{xy}^i(\text{Signal})}$$



Einige Gedanken zur  
Likelihood Methode

---

Vorgehensweise I

---

**Bestimmung der  
Wahrscheinlichkei-  
ten**

- ❖ Anmerkungen
- ❖  $P(\text{Signal/Kaon})$
- ❖  $P(\text{Signal})$
- ❖  $P(\text{Kaon})$

Vorgehensweise II

---

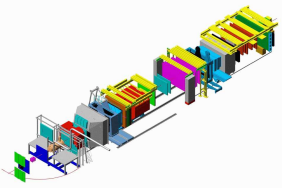
Ermittlung der  
Likelihoods

---

Ergebnisse

---

# Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten



# Anmerkungen

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

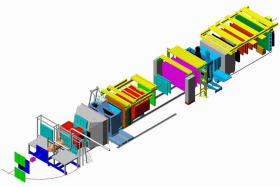
- ❖ P(Signal/Kaon)
- ❖ P(Signal)
- ❖ P(Kaon)

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

- Es wird ein Bereich von  $-250 \mu\text{rad} < \theta_i < 250 \mu\text{rad}$  betrachtet
- Der Bereich wird in je 50 (gleichgroße) Bins aufgeteilt
- Es werden 3 Samples verwendet:
  - ❖ Ein Kaonsample mit 163437 Ereignissen
  - ❖ Ein Pionsample mit 106228 Ereignissen
  - ❖ Ein ungefiltertes Sample („Beam,“) mit 352685 Ereignissen



Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖ P(Signal/Kaon)

❖ P(Signal)

❖ P(Kaon)

Vorgehensweise II

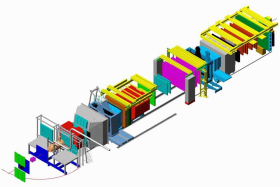
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

## Bestimmung von $P_{xy}^i$ (Signal|Kaon)

Zur Bestimmung von  $P_{xy}^i$  (Signal|Kaon) betrachtet man sich für das Kaonsample das Treffermuster in den einzelnen Photomultipliern und normiert (binweise) auf das komplette Sample

Analog geht man für den Fall des nichtvorhandenen Signals, sowie für die Pionen vor.



# $P_{xy}^i$ (Signal|Kaon)

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖  $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$

❖  $P(\text{Signal})$

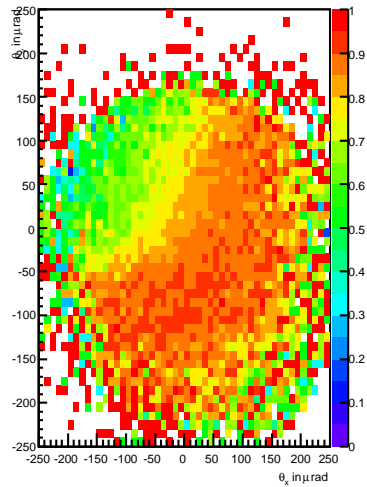
❖  $P(\text{Kaon})$

Vorgehensweise II

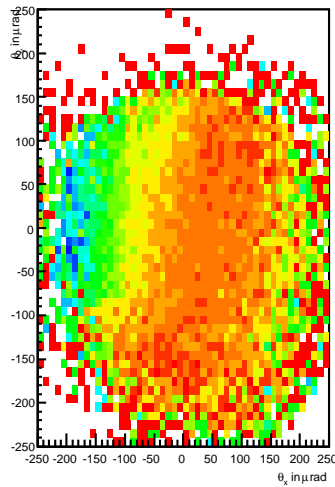
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

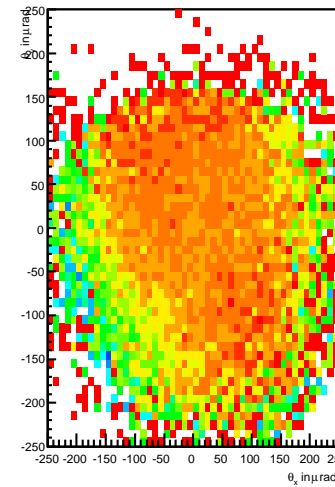
Hit in Cedar 1, PMT 0



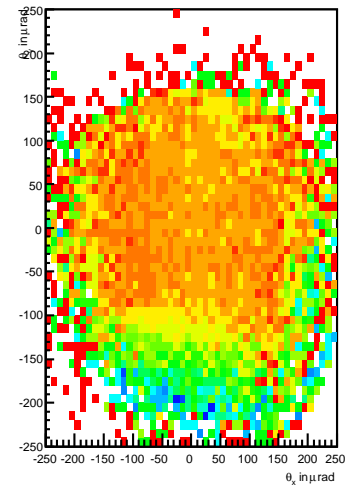
Hit in Cedar 1, PMT 1



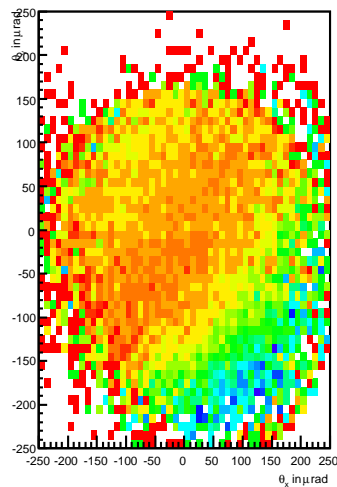
Hit in Cedar 1, PMT 2



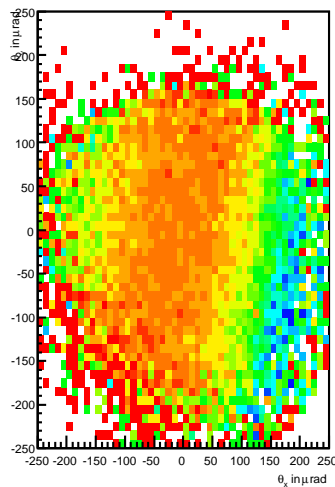
Hit in Cedar 1, PMT 3



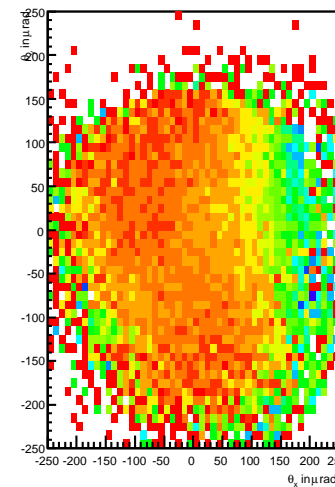
Hit in Cedar 1, PMT 4



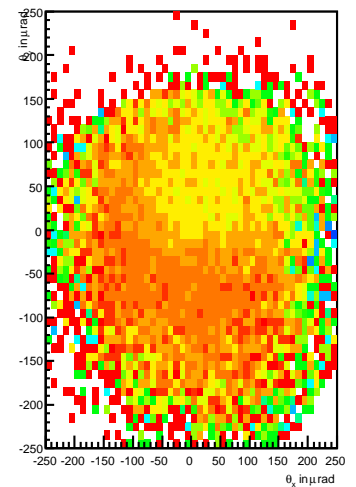
Hit in Cedar 1, PMT 5

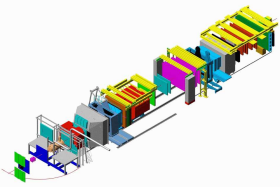


Hit in Cedar 1, PMT 6



Hit in Cedar 1, PMT 7





# $P_{xy}^i(\text{Signal} | \text{Kaon})$

## Einige Gedanken zur Likelihood Methode

### Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖  $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$

❖  $P(\text{Signal})$

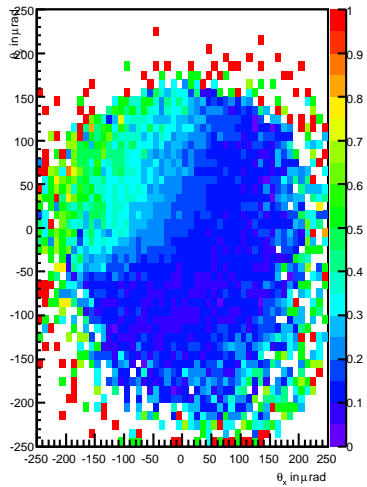
❖  $P(\text{Kaon})$

### Vorgehensweise II

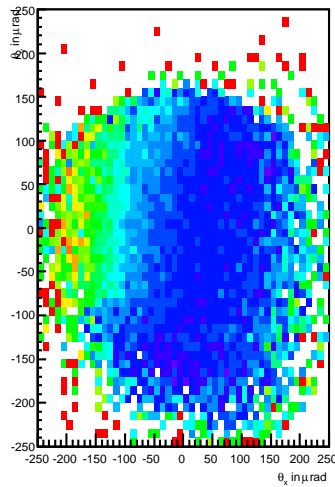
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

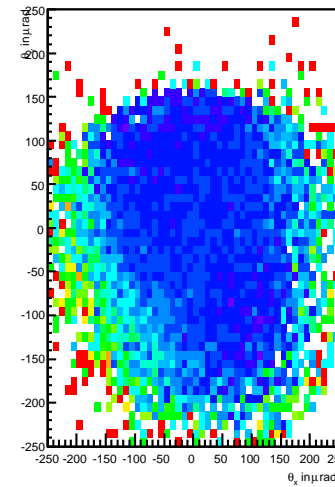
No hit in Cedar 1, PMT 0



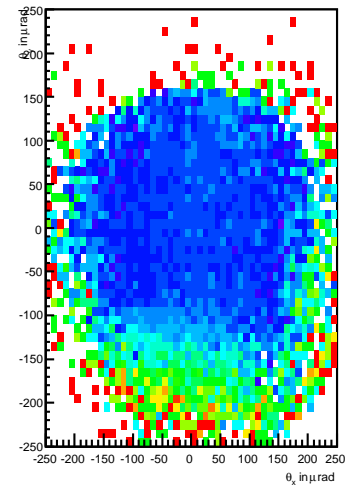
No hit in Cedar 1, PMT 1



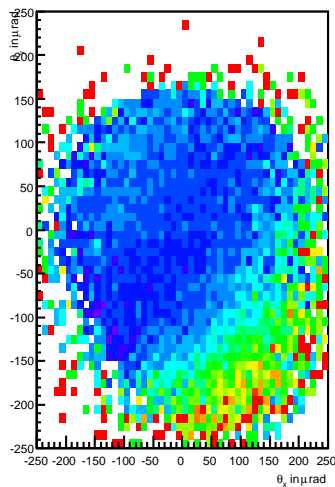
No hit in Cedar 1, PMT 2



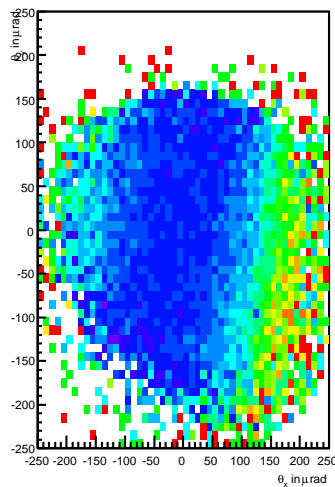
No hit in Cedar 1, PMT 3



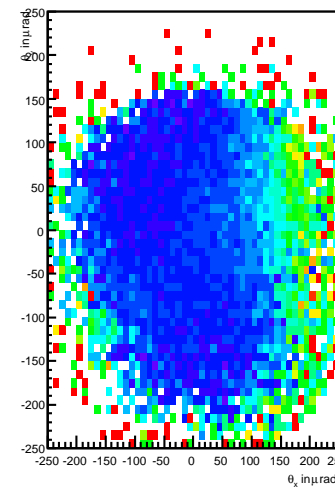
No hit in Cedar 1, PMT 4



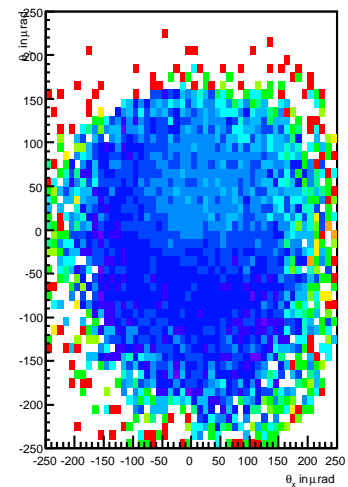
No hit in Cedar 1, PMT 5

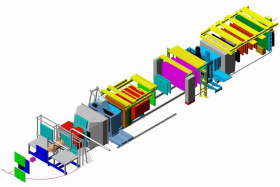


No hit in Cedar 1, PMT 6



No hit in Cedar 1, PMT 7





# $P_{xy}^i$ (*Signal* | *Pion*)

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖  $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$

❖  $P(\text{Signal})$

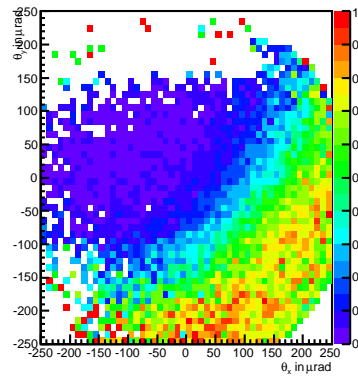
❖  $P(\text{Kaon})$

Vorgehensweise II

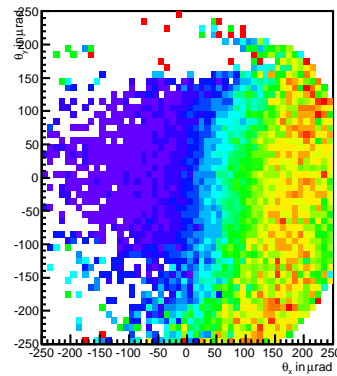
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

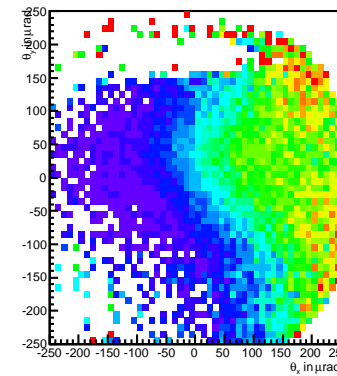
Hit in Cedar 1, PMT 0



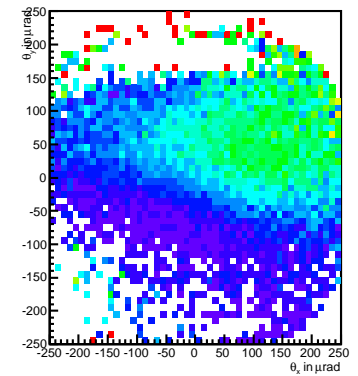
Hit in Cedar 1, PMT 1



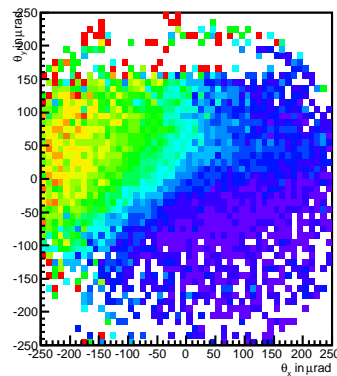
Hit in Cedar 1, PMT 2



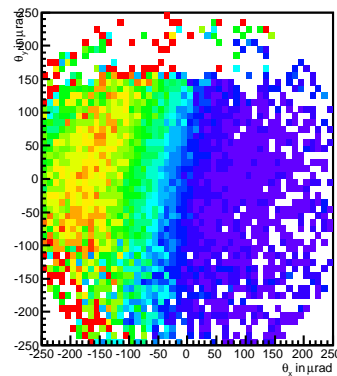
Hit in Cedar 1, PMT 3



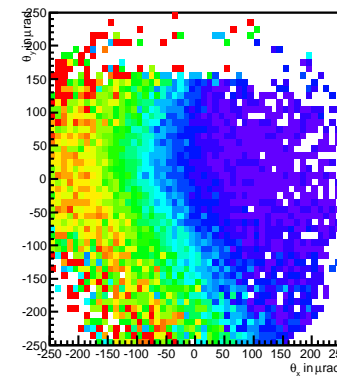
Hit in Cedar 1, PMT 4



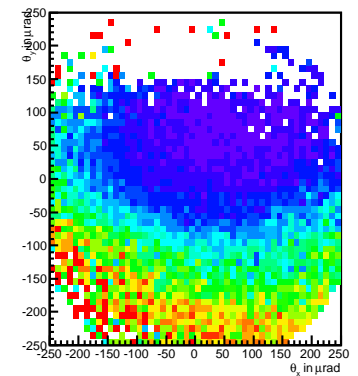
Hit in Cedar 1, PMT 5

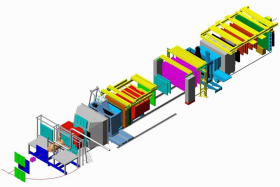


Hit in Cedar 1, PMT 6



Hit in Cedar 1, PMT 7





# $P_{xy}^i$ (Signal|Pion)

## Einige Gedanken zur Likelihood Methode

### Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖  $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$

❖  $P(\text{Signal})$

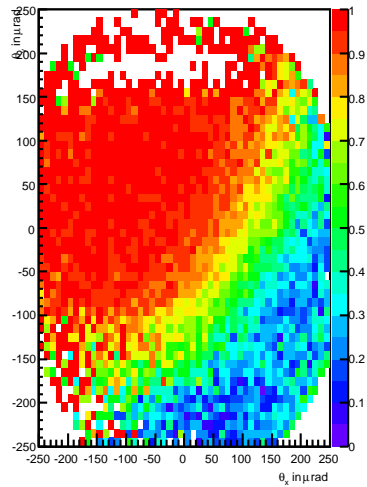
❖  $P(\text{Kaon})$

### Vorgehensweise II

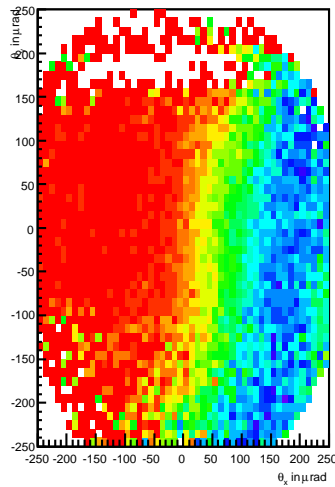
## Ermittlung der Likelihoods

## Ergebnisse

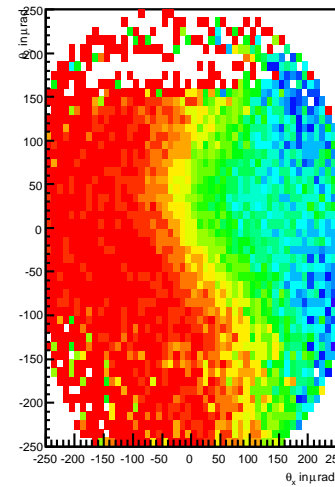
No hit in Cedar 1, PMT 0



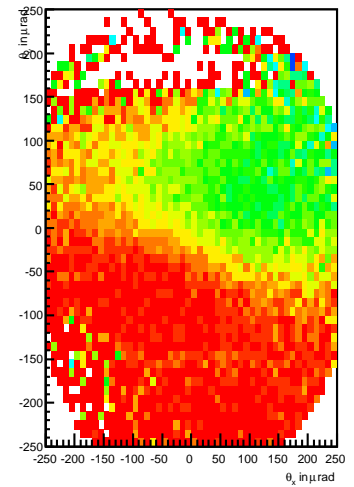
No hit in Cedar 1, PMT 1



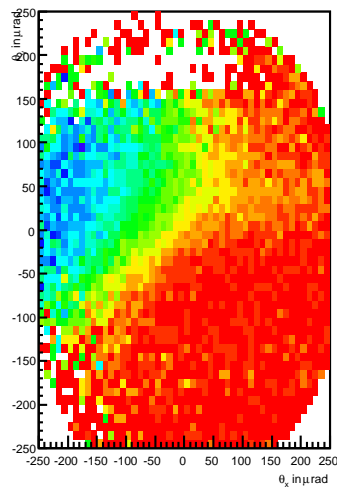
No hit in Cedar 1, PMT 2



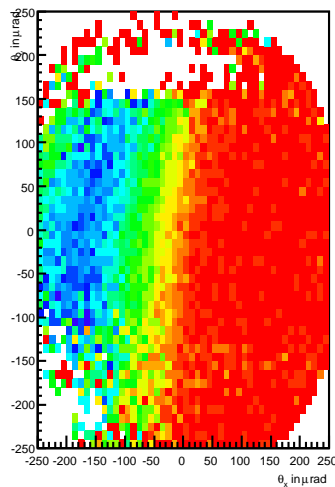
No hit in Cedar 1, PMT 3



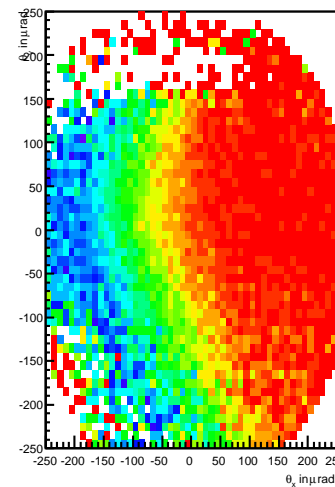
No hit in Cedar 1, PMT 4



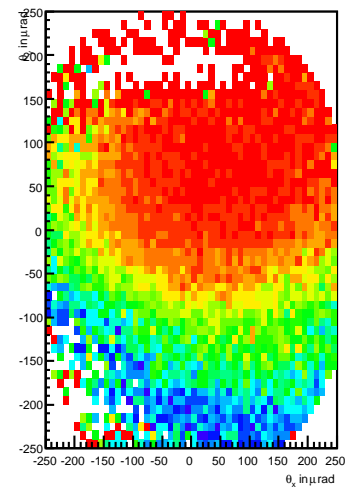
No hit in Cedar 1, PMT 5



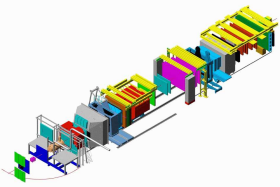
No hit in Cedar 1, PMT 6



No hit in Cedar 1, PMT 7







# Bestimmung von $P_{xy}^i(\text{Signal})$

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

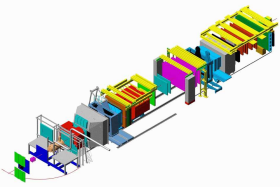
- ❖ Anmerkungen
- ❖ P(Signal/Kaon)
- ❖ P(Signal)
- ❖ P(Kaon)

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Für die Bestimmung von  $P_{xy}^i(\text{Signal})$  und  $P_{xy}^i(\overline{\text{Signal}})$  wird analog vorgegangen, allerdings wird das ungefilterte Sample verwendet.



# $P_{xy}^i$ (Signal)

## Einige Gedanken zur Likelihood Methode

### Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

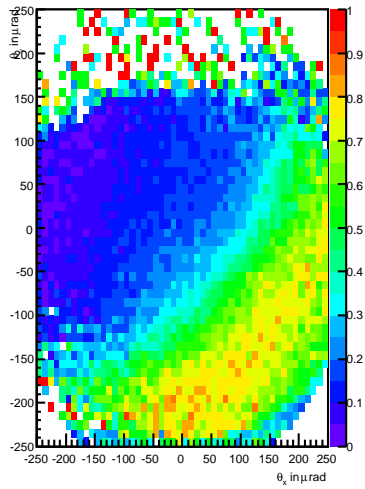
- ❖ Anmerkungen
- ❖  $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$
- ❖  $P(\text{Signal})$
- ❖  $P(\text{Kaon})$

### Vorgehensweise II

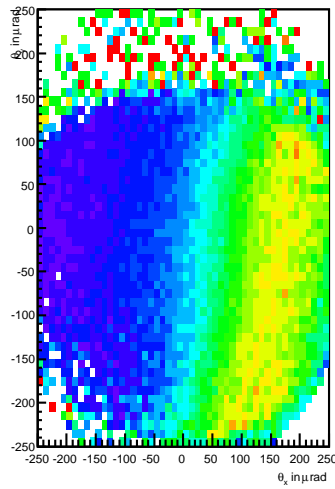
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

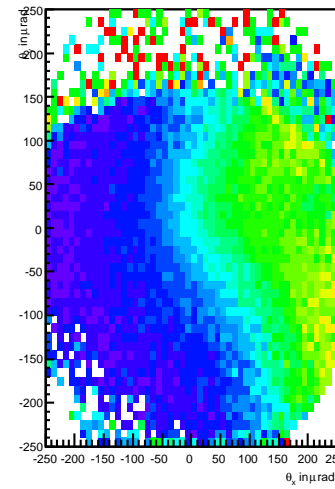
Hit in Cedar 1, PMT 0



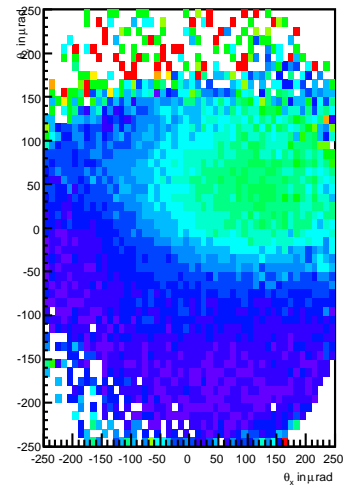
Hit in Cedar 1, PMT 1



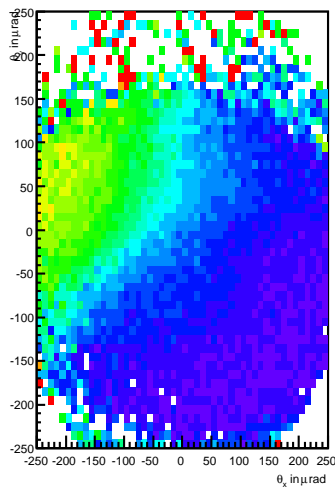
Hit in Cedar 1, PMT 2



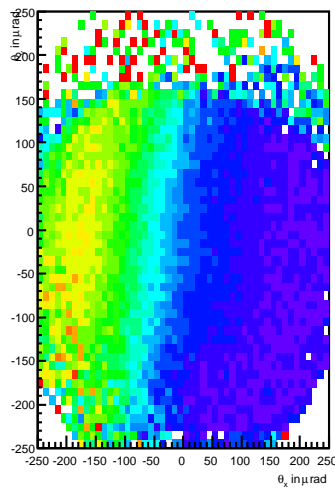
Hit in Cedar 1, PMT 3



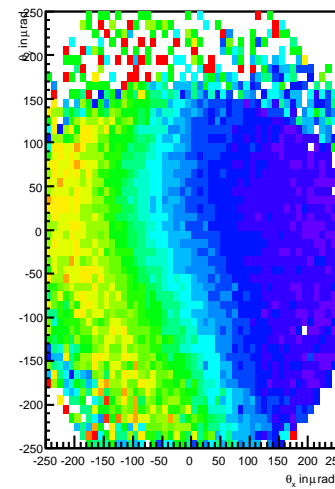
Hit in Cedar 1, PMT 4



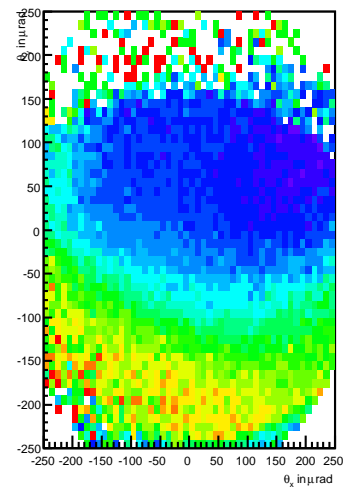
Hit in Cedar 1, PMT 5

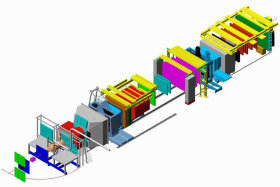


Hit in Cedar 1, PMT 6



Hit in Cedar 1, PMT 7





$$P_{xy}^i(\text{Signal})$$

## Einige Gedanken zur Likelihood Methode

### Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

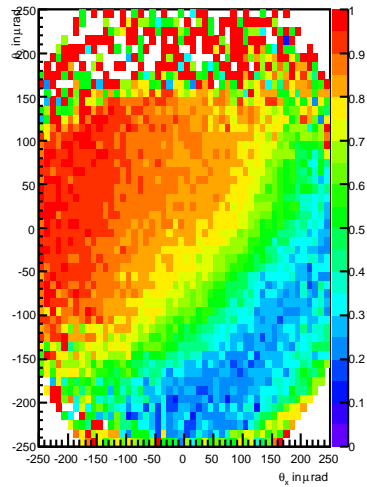
- ❖ Anmerkungen
- ❖  $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$
- ❖  $P(\text{Signal})$
- ❖  $P(\text{Kaon})$

### Vorgehensweise II

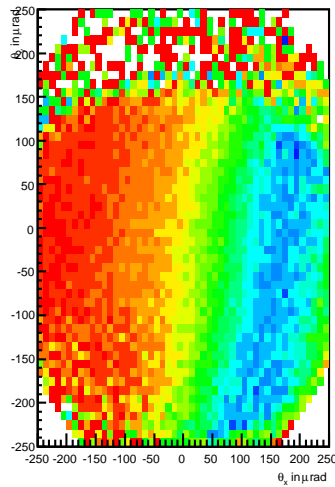
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

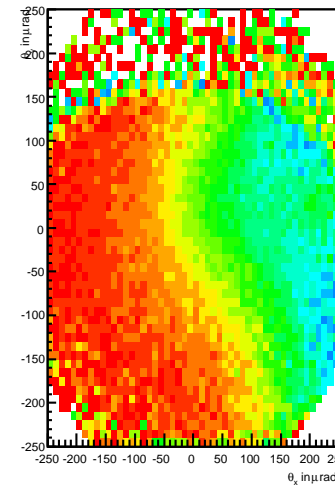
No hit in Cedar 1, PMT 0



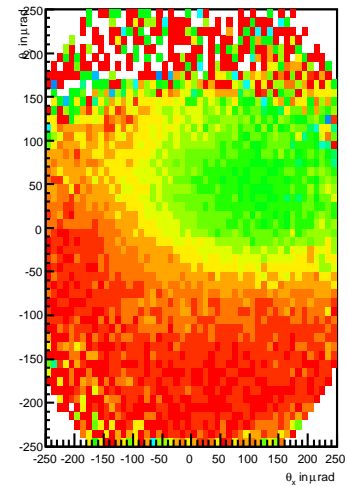
No hit in Cedar 1, PMT 1



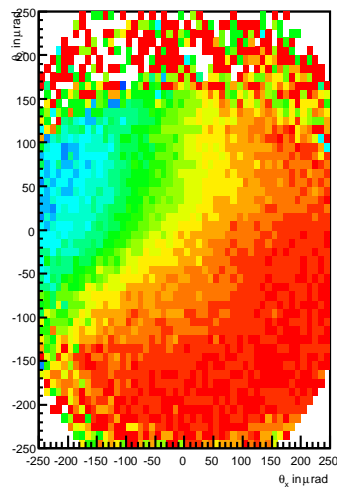
No hit in Cedar 1, PMT 2



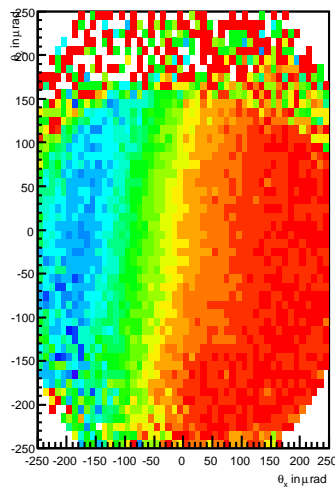
No hit in Cedar 1, PMT 3



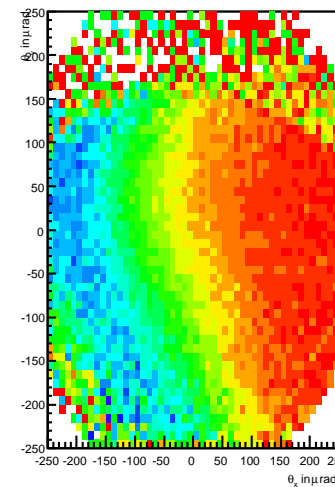
No hit in Cedar 1, PMT 4



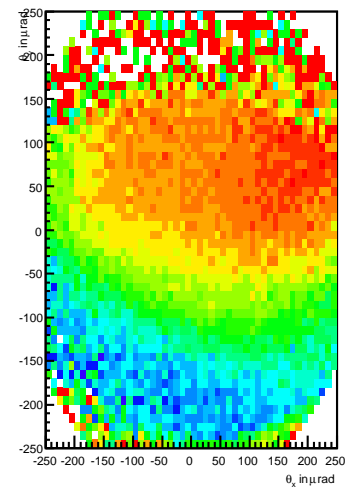
No hit in Cedar 1, PMT 5

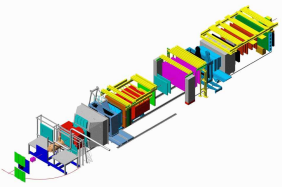


No hit in Cedar 1, PMT 6



No hit in Cedar 1, PMT 7





# Bestimmung von $P_{xy}(\text{Kaon})$

$P_{xy}(\text{Kaon})$  ist die Wahrscheinlichkeit, ein Kaon mit bestimmten Strahlwinkeln  $\theta_x$  und  $\theta_y$  zu finden. Man erhält sie durch binweises normieren der Verteilung der Strahlwinkel auf das komplette Sample.

Analog wird für die Pionen vorgegangen.

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

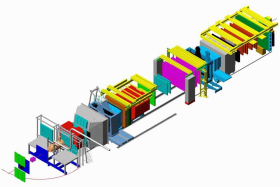
Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

- ❖ Anmerkungen
- ❖ P(Signal/Kaon)
- ❖ P(Signal)
- ❖ P(Kaon)

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse



# $P_{xy}(\text{Kaon})$

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

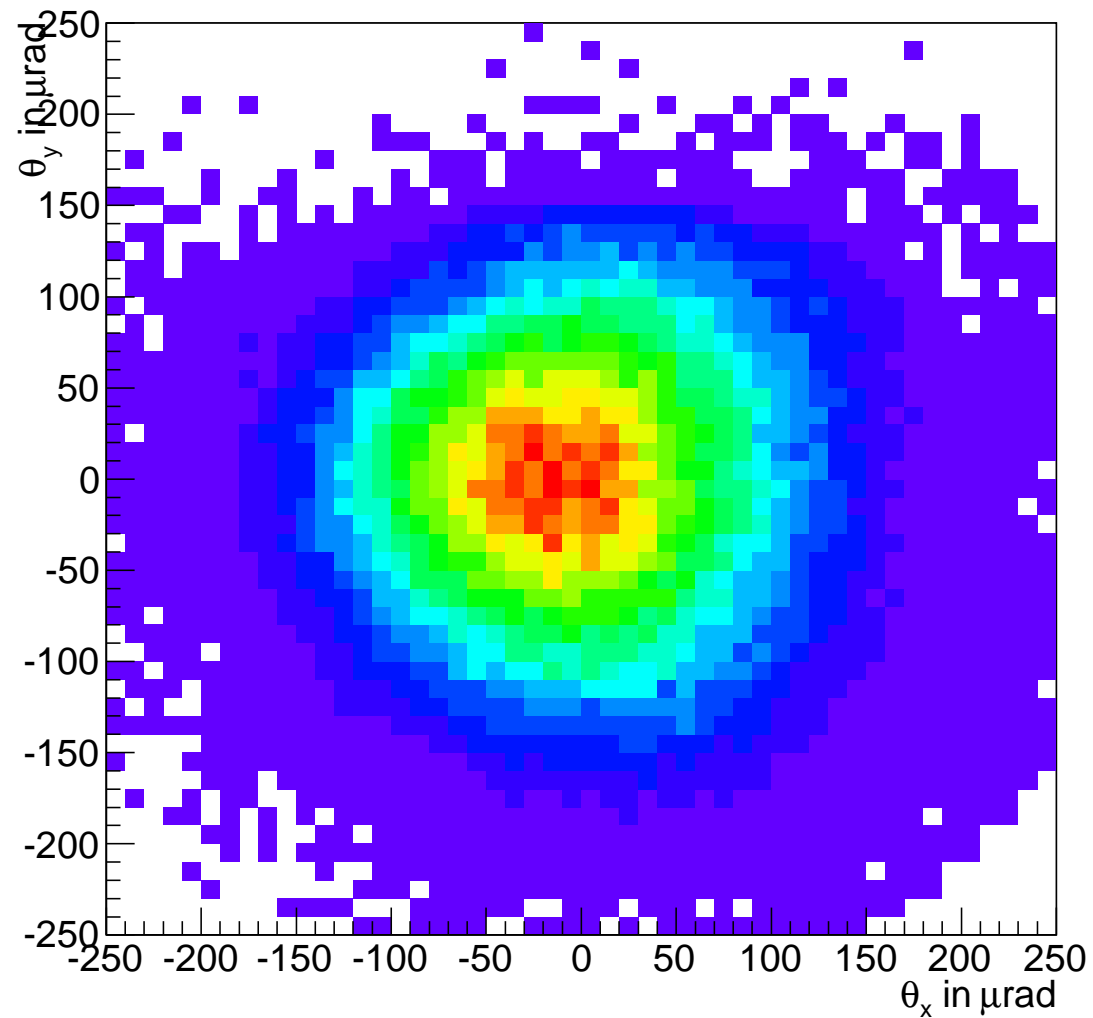
- ❖ Anmerkungen
- ❖ P(Signal/Kaon)
- ❖ P(Signal)
- ❖ P(Kaon)

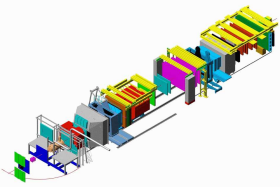
Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Probability for Divergence in CEDAR 1





# $P_{xy}$ (**Pion**)

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

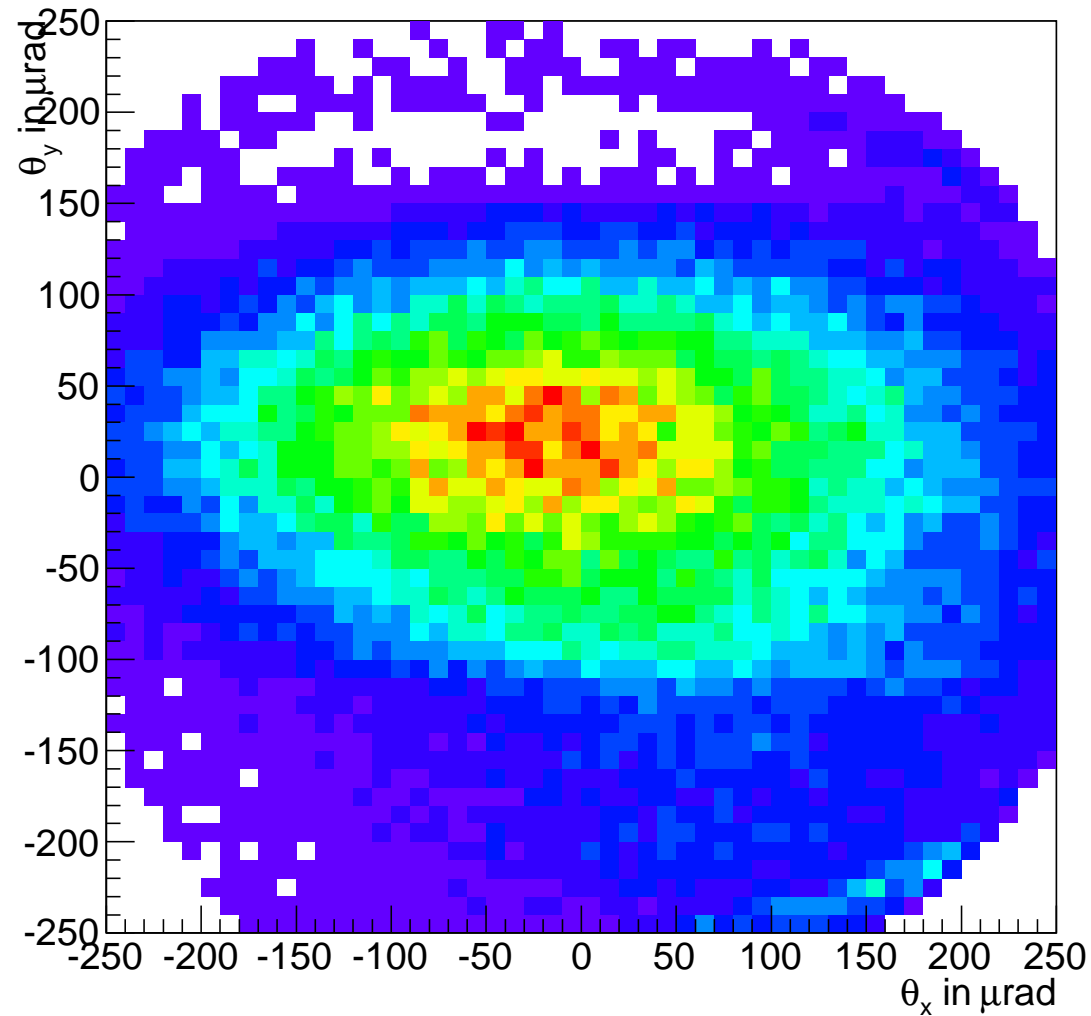
- ❖ Anmerkungen
- ❖ P(Signal/Kaon)
- ❖ P(Signal)
- ❖ P(Kaon)

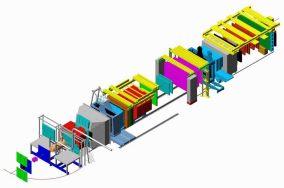
Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Probability for Divergence in CEDAR 1





Einige Gedanken zur  
Likelihood Methode

---

Vorgehensweise I

---

Bestimmung der  
Wahrscheinlichkei-  
ten

---

**Vorgehensweise II**

- ❖ Bestimmung der Likelihoods
- ❖ Ermittlung der PID
- ❖ Ermittlung der PID

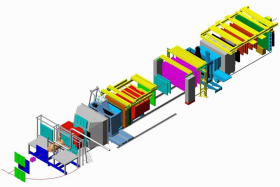
Ermittlung der  
Likelihoods

---

Ergebnisse

---

## Vorgehensweise II



Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

❖ Bestimmung der Likelihoods

❖ Ermittlung der PID

❖ Ermittlung der PID

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

# Bestimmung der Likelihoods

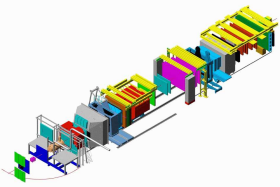
Die ermittelten Likelihoods werden nun logarithmiert und dann aufsummiert:

$$\log L^K = \sum_{i=1}^8 \log P_{xy}^i(\text{Kaon}|\text{Signal}) \cdot \eta^i + \sum_{i=1}^8 \log P_{xy}^i(\text{Kaon}|\overline{\text{Signal}}) \cdot (1 - \eta^i)$$

Wobei gilt:

$$\eta^i = \begin{cases} 1 & \text{Signal in PMT } i \\ 0 & \overline{\text{Signal}} \text{ in PMT } i \end{cases}$$





Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

❖ Bestimmung der Likelihoods

❖ Ermittlung der PID

❖ Ermittlung der PID

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

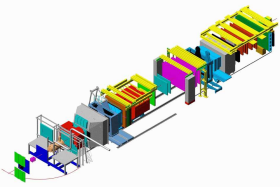
# Ermittlung der PID

Die log-Likelihood Werte werden miteinander verglichen, um eine PID festzulegen:

$\log L^K > \log L^\pi + 0,1 \text{ PID „K“}$

$\log L^\pi > \log L^K + 0,1 \text{ PID „}\pi\text{“}$

sonst PID „no PID“



# Ermittlung der PID

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

❖ Bestimmung der Likelihoods

❖ Ermittlung der PID

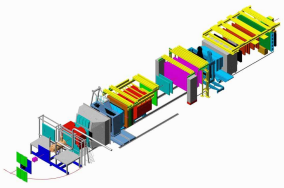
❖ Ermittlung der PID

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Die Informationen der beiden CEDARs werden dann kombiniert:

$\&$	$?$	$\pi$	$K$
$?$	$?$	$\pi$	$?$
$\pi$	$\pi$	$\pi$	$K$
$K$	$?$	$K$	$K$



Einige Gedanken zur  
Likelihood Methode

---

Vorgehensweise I

---

Bestimmung der  
Wahrscheinlichkei-  
ten

---

Vorgehensweise II

---

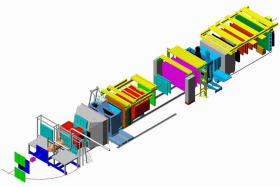
**Ermittlung der  
Likelihoods**

- ❖ Kaonsample
- ❖ Pionsample
- ❖ Beamsample

Ergebnisse

---

# Ermittlung der Likelihoods



# Kaonsample

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

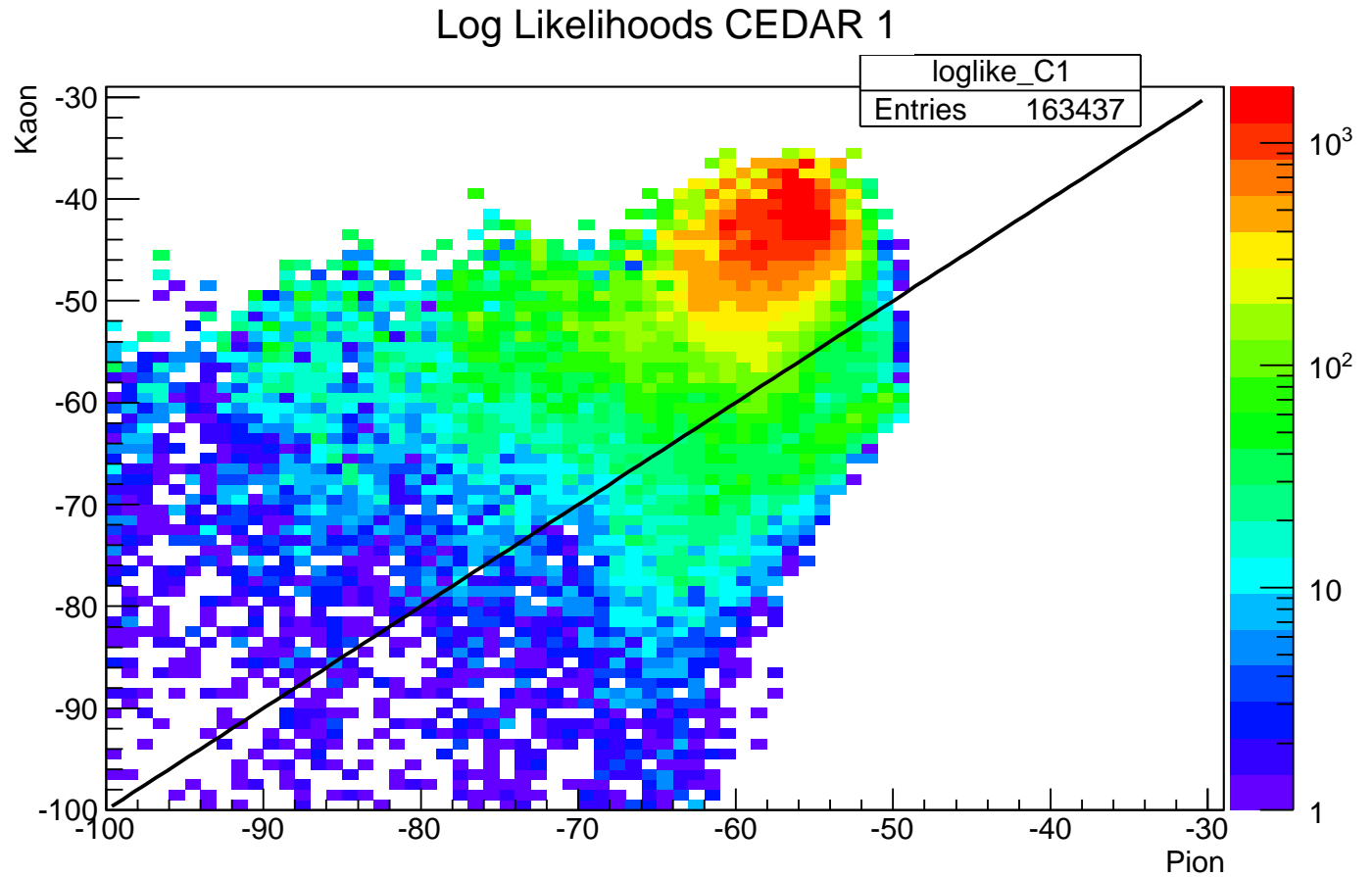
Ermittlung der Likelihoods

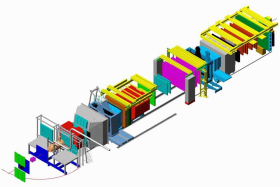
❖ Kaonsample

❖ Pionsample

❖ Beamsample

Ergebnisse





# Pionsample

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

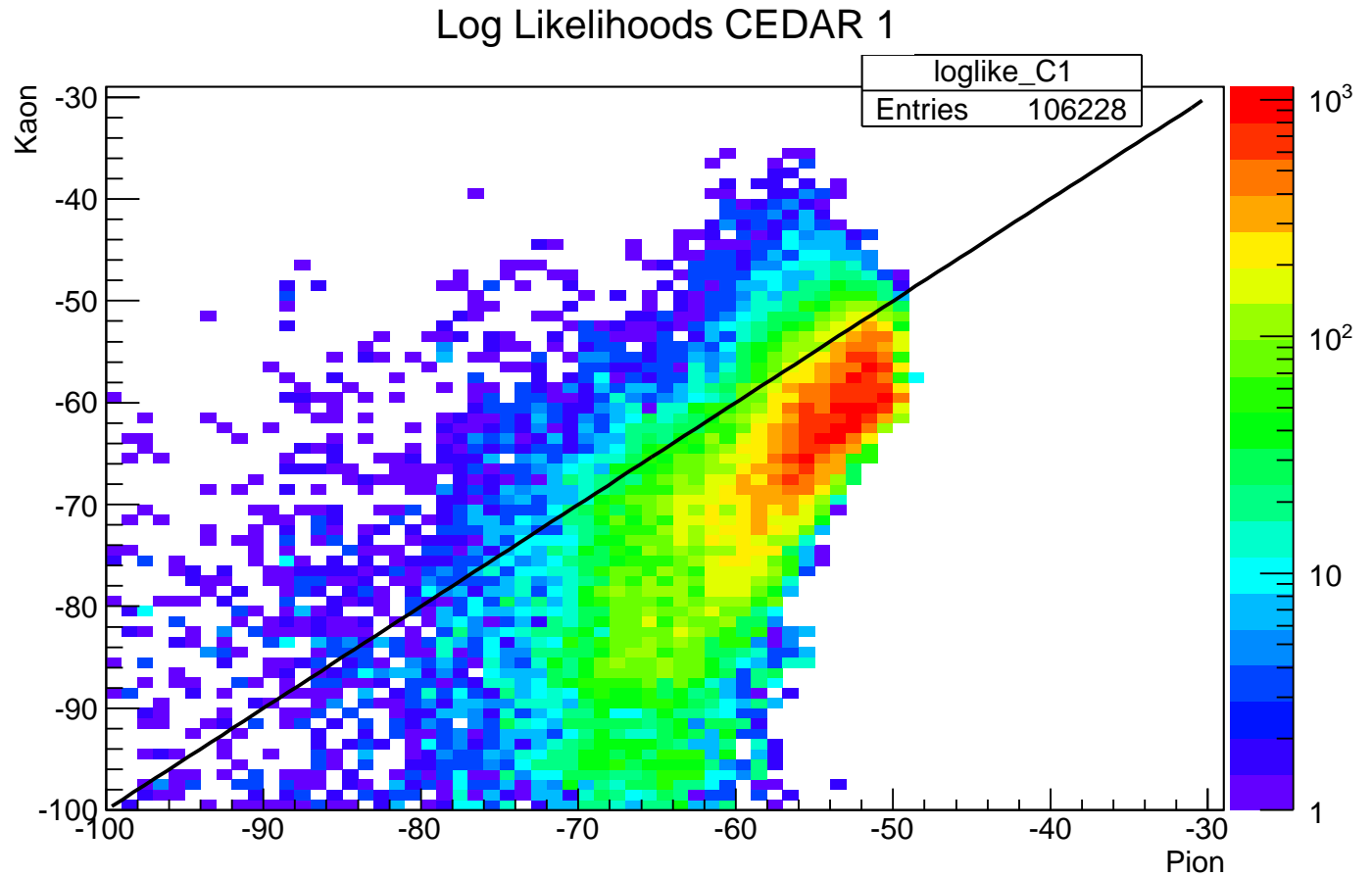
Ermittlung der Likelihoods

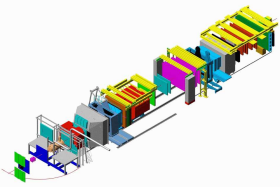
❖ Kaonsample

❖ **Pionsample**

❖ Beamsample

Ergebnisse





# Beamsample

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

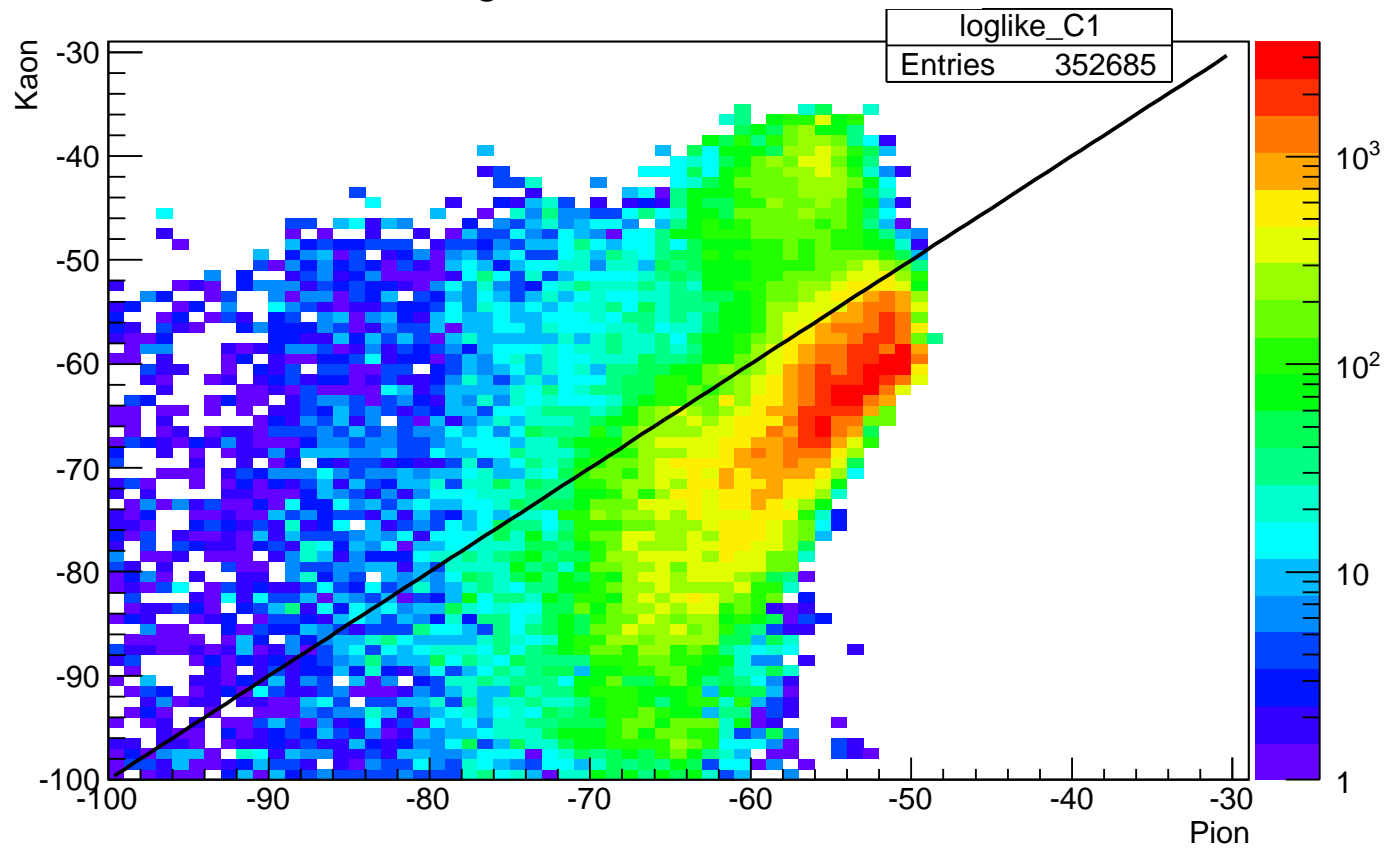
Ermittlung der Likelihoods

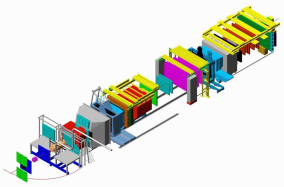
- ❖ Kaonsample
- ❖ Pionsample

❖ **Beamsample**

Ergebnisse

Log Likelihoods CEDAR 1





Einige Gedanken zur  
Likelihood Methode

---

Vorgehensweise I

---

Bestimmung der  
Wahrscheinlichkei-  
ten

---

Vorgehensweise II

---

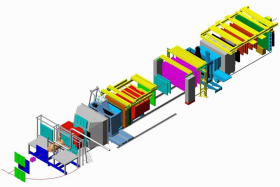
Ermittlung der  
Likelihoods

---

**Ergebnisse**

- ❖ Ermittelte PIDs  
Beamsample
- ❖ Vergleich mit  
Majorität 6
- ❖ Ausblick

# Ergebnisse



# Ermittelte PIDs Beamsample

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

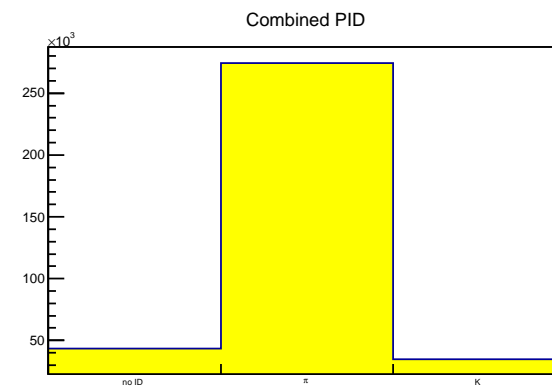
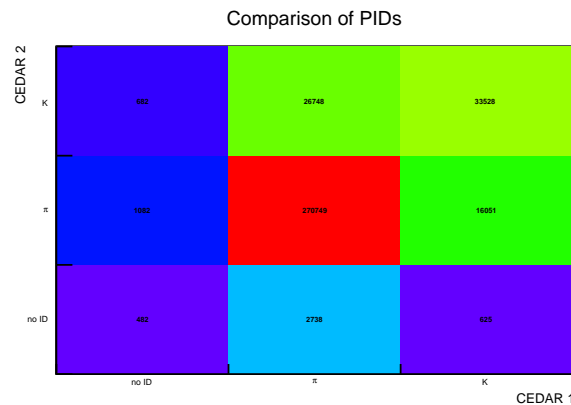
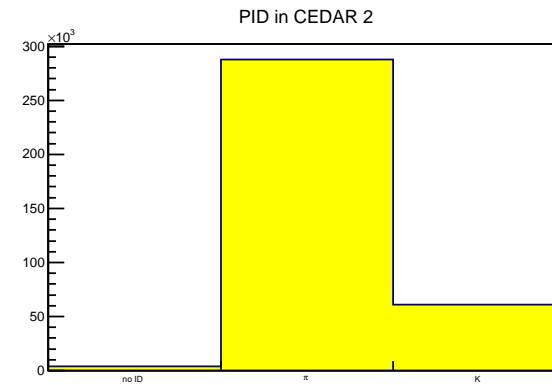
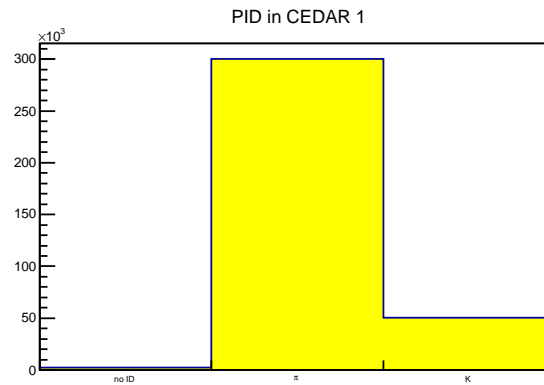
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

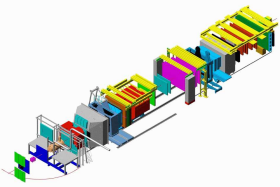
❖ Ermittelte PIDs Beamsample

❖ Vergleich mit Majorität 6

❖ Ausblick







# Ermittelte PIDs Beamsample

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

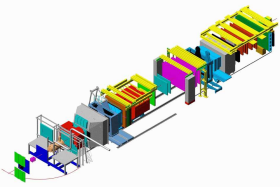
Ergebnisse

❖ Ermittelte PIDs Beamsample

❖ Vergleich mit Majorität 6

❖ Ausblick

	$\pi$	K	no ID
CEDAR 1	85.1284%	14.2348%	0.636829%
CEDAR 2	81.6258%	17.284%	1.09021%
combined	77.8511%	9.87709%	12.2719%



# Vergleich mit Majorität 6

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

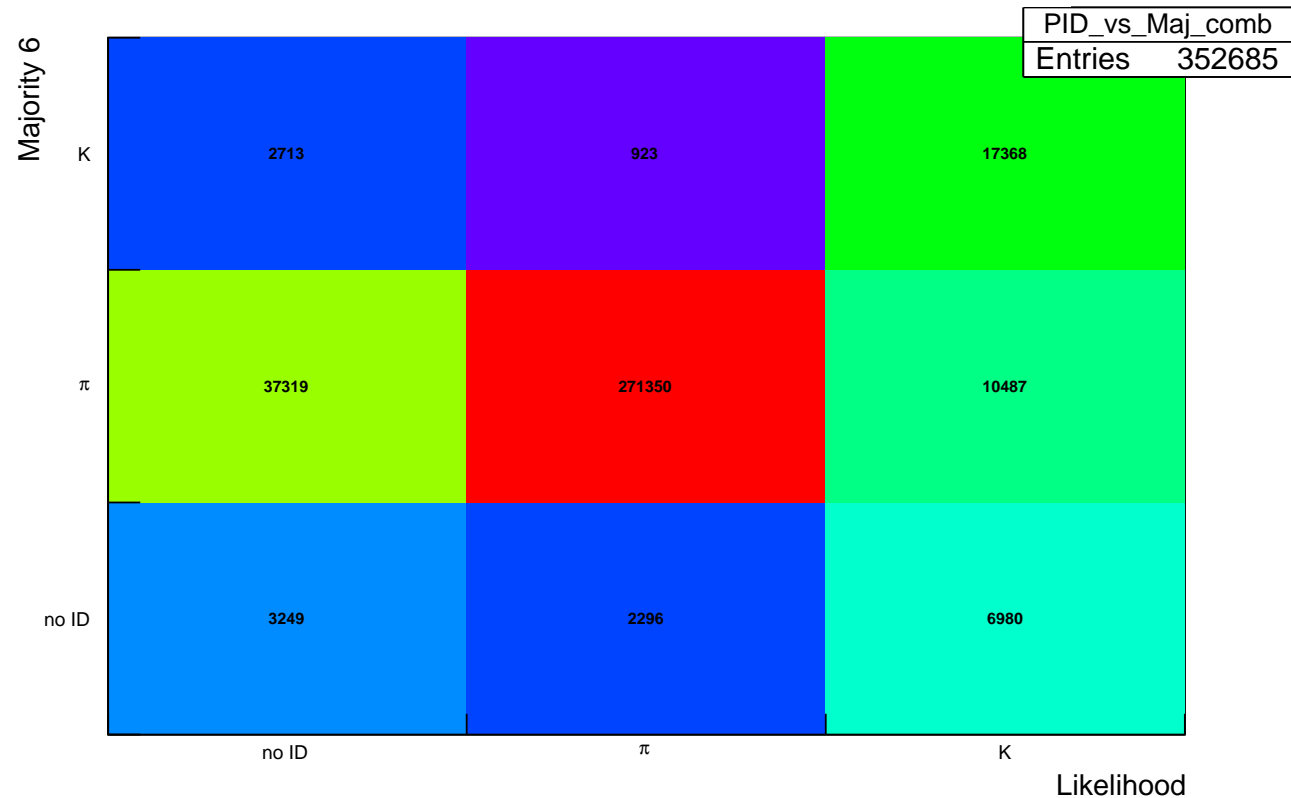
Ergebnisse

❖ Ermittelte PIDs Beamsample

❖ Vergleich mit Majorität 6

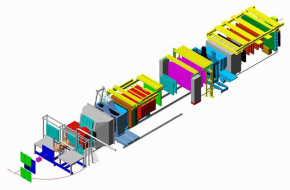
❖ Ausblick

Likelihood ID vs. Majority ID combined



- 4,4% der Majoritätskaonen werden als Likelihoodpionen identifiziert

# Ausblick



Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

**Ergebnisse**

❖ Ermittelte PIDs Beamsample

❖ Vergleich mit Majorität 6

❖ **Ausblick**

- Implementierung der Methode in den CEDAR-Helper (in Arbeit)
- Test der Methode (z.B. auf Tobi Schlüters Code)