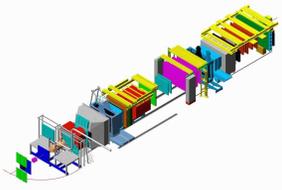


Wie die Likelihood-Methode funktionieren könnte

Tobias Weisrock

Institut für Kernphysik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

COMPASS Mainz Meeting – 4. Oktober 2011



Einige Gedanken zur Likelihood Methode

- ❖ Nachteile der ursprünglichen Methode
- ❖ Alternative

Vorgehensweise I

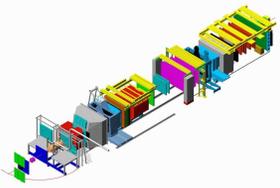
Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Einige Gedanken zur Likelihood Methode



Nachteile der ursprünglichen Methode

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

❖ Nachteile der ursprünglichen Methode

❖ Alternative

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

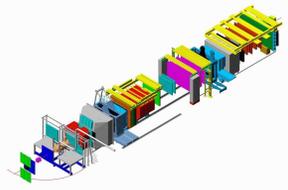
Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

- Dynamische Gruppierung der Photomultiplier geht von gleicher Effizienz aus
- Komplizierte Wahl der Koordinaten
- Fits der Verteilungen enthalten keine physikalische Information
- Unmotivierte Qualitätsschnitte auf Likelihoods

Alternative



Einige Gedanken zur Likelihood Methode

❖ Nachteile der ursprünglichen Methode

❖ Alternative

Vorgehensweise I

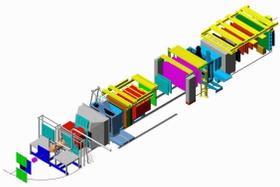
Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

- Betrachte jeden Photomultiplier einzeln
- Wähle als Koordinaten die Winkel des Strahls θ_x und θ_y
- Ersetze gefittete Verteilungen durch „natürlichere“ Definition der Wahrscheinlichkeiten
- Verwende Likelihood-Verhältnisse zur Entscheidung



Einige Gedanken zur
Likelihood Methode

Vorgehensweise I

- ❖ Zielsetzung
- ❖ Erinnerung: Das Theorem von Bayes
- ❖ Anwendung auf unser Problem

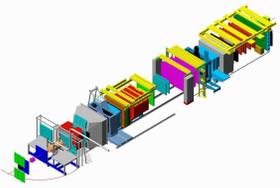
Bestimmung der
Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der
Likelihoods

Ergebnisse

Vorgehensweise I



Zielsetzung

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

❖ Zielsetzung

❖ Erinnerung: Das Theorem von Bayes

❖ Anwendung auf unser Problem

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

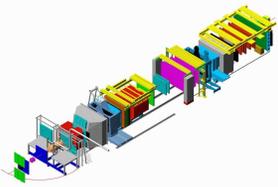
Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Was messen wir?

- Strahlwinkel θ_x und θ_y
- Verhalten der Photomultiplier (Signal oder kein Signal)



Zielsetzung

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

❖ Zielsetzung

❖ Erinnerung: Das Theorem von Bayes

❖ Anwendung auf unser Problem

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

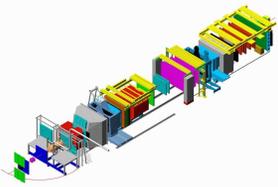
Ergebnisse

Was messen wir?

- Strahlwinkel θ_x und θ_y
- Verhalten der Photomultiplier (Signal oder kein Signal)

Was wollen wir daraus bestimmen?

- Wahrscheinlichkeit, dass ein Kaon bzw. Pion vorliegt (für jeden Photomultiplier)
- Likelihood als Produkt dieser Wahrscheinlichkeiten



Erinnerung: Das Theorem von Bayes

Das Theorem von Bayes für die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit lautet

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Dabei ist:

$P(A|B)$ die Wahrscheinlichkeit für A , falls B eingetreten ist

$P(B|A)$ die Wahrscheinlichkeit für B , falls A eingetreten ist

$P(A)$ die a-priori Wahrscheinlichkeit für A

$P(B)$ die a-priori Wahrscheinlichkeit für B

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

❖ Zielsetzung

❖ Erinnerung: Das Theorem von Bayes

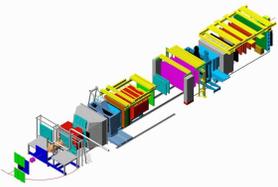
❖ Anwendung auf unser Problem

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse



Anwendung auf unser Problem

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

- ❖ Zielsetzung
- ❖ Erinnerung: Das Theorem von Bayes

❖ Anwendung auf unser Problem

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

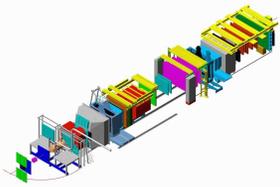
Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Signal an Photomultiplier i bei bestimmten Winkeln θ_x und θ_y durch ein Kaon verursacht wurde ergibt sich zu

$$P_{xy}^i(\text{Kaon}|\text{Signal}) = \frac{P_{xy}^i(\text{Signal}|\text{Kaon}) \cdot P_{xy}(\text{Kaon})}{P_{xy}^i(\text{Signal})}$$



Einige Gedanken zur
Likelihood Methode

Vorgehensweise I

**Bestimmung der
Wahrscheinlichkei-
ten**

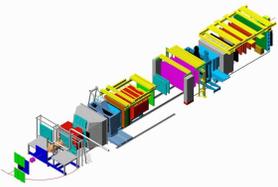
- ❖ Anmerkungen
- ❖ $P(\text{Signal/Kaon})$
- ❖ $P(\text{Signal})$
- ❖ $P(\text{Kaon})$

Vorgehensweise II

Ermittlung der
Likelihoods

Ergebnisse

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten



Anmerkungen

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖ P(Signal/Kaon)

❖ P(Signal)

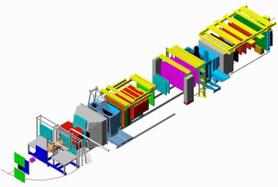
❖ P(Kaon)

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

- Es wird ein Bereich von $-250 \mu\text{rad} < \theta_i < 250 \mu\text{rad}$ betrachtet
- Der Bereich wird in je 50 (gleichgroße) Bins aufgeteilt
- Es werden 3 Samples verwendet:
 - ❖ Ein Kaonsample mit 163437 Ereignissen
 - ❖ Ein Pionsample mit 106228 Ereignissen
 - ❖ Ein ungefiltertes Sample („Beam,“) mit 352685 Ereignissen



Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖ P(Signal/Kaon)

❖ P(Signal)

❖ P(Kaon)

Vorgehensweise II

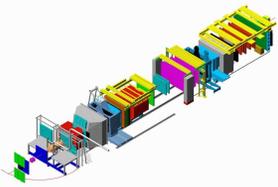
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Bestimmung von P_{xy}^i (Signal|Kaon)

Zur Bestimmung von P_{xy}^i (Signal|Kaon) betrachtet man sich für das Kaonsample das Treffermuster in den einzelnen Photomultipliern und normiert (binweise) auf das komplette Sample

Analog geht man für den Fall des nichtvorhandenen Signals, sowie für die Pionen vor.



P_{xy}^i (Signal|Kaon)

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖ $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$

❖ $P(\text{Signal})$

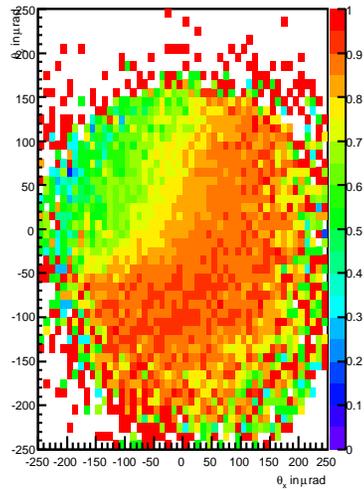
❖ $P(\text{Kaon})$

Vorgehensweise II

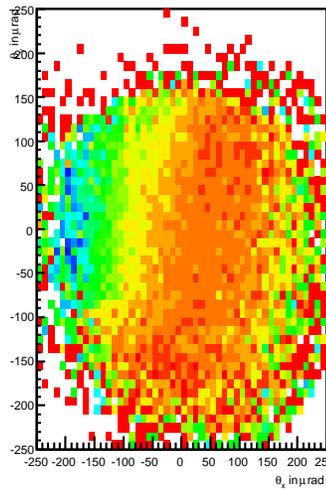
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

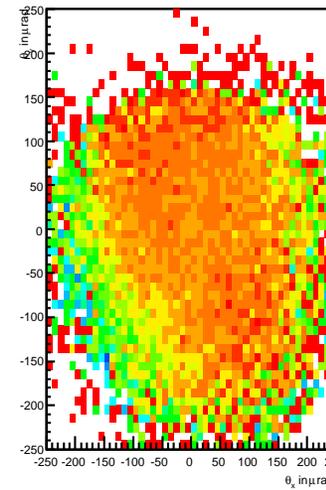
Hit in Cedar 1, PMT 0



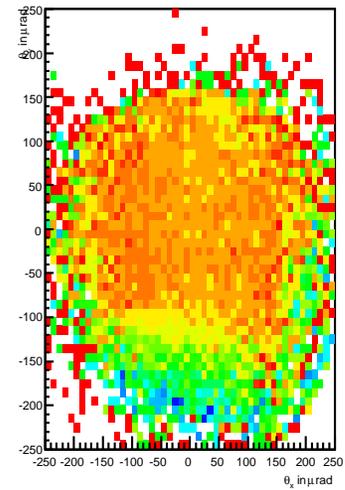
Hit in Cedar 1, PMT 1



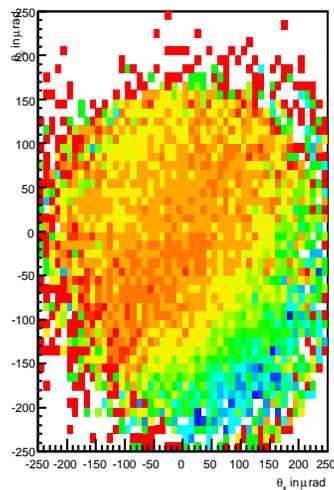
Hit in Cedar 1, PMT 2



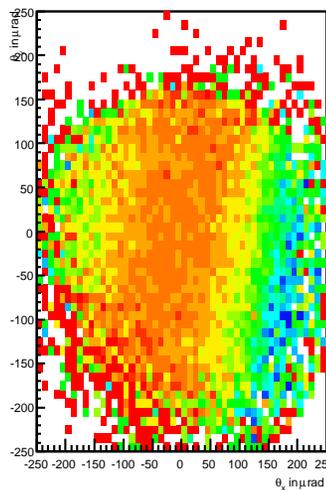
Hit in Cedar 1, PMT 3



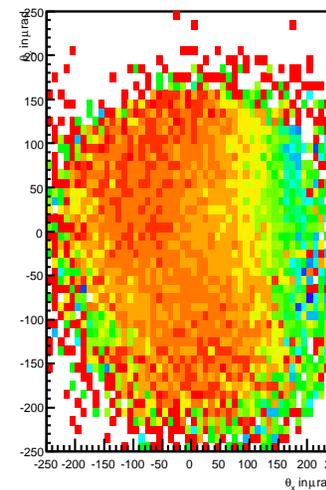
Hit in Cedar 1, PMT 4



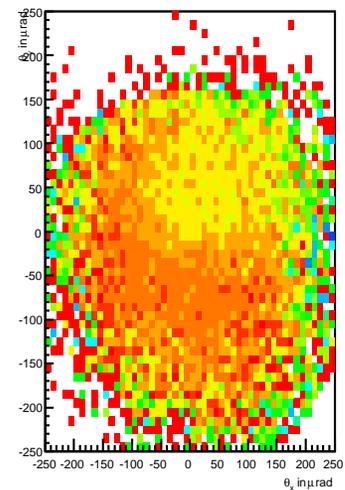
Hit in Cedar 1, PMT 5

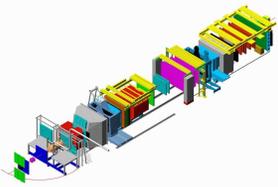


Hit in Cedar 1, PMT 6



Hit in Cedar 1, PMT 7





$P_{xy}^i(\text{Signal} | \text{Kaon})$

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖ $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$

❖ $P(\text{Signal})$

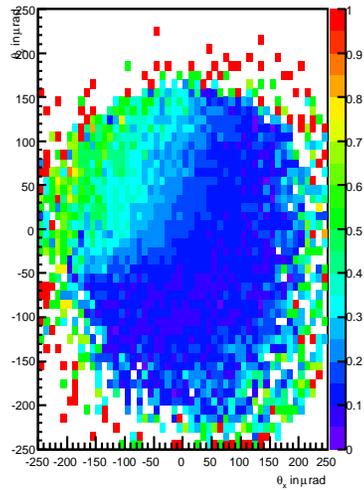
❖ $P(\text{Kaon})$

Vorgehensweise II

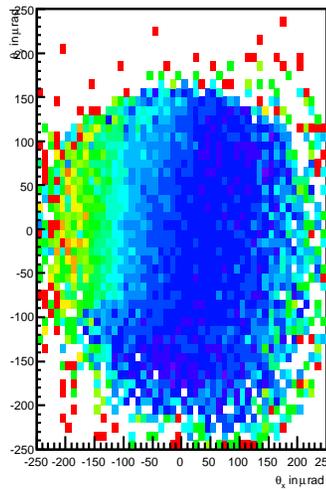
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

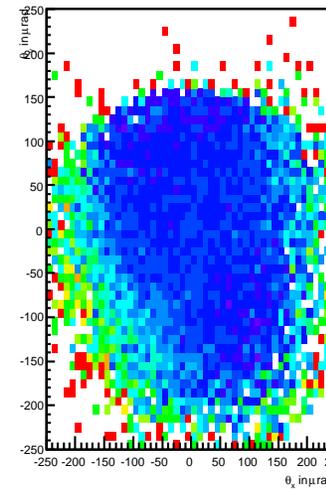
No hit in Cedar 1, PMT 0



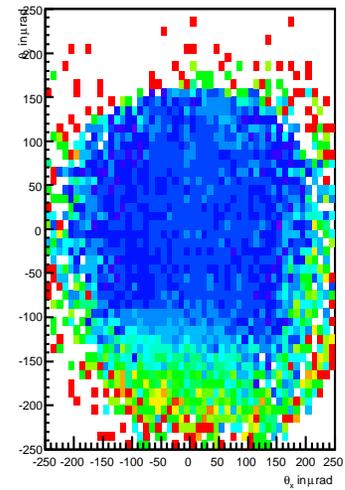
No hit in Cedar 1, PMT 1



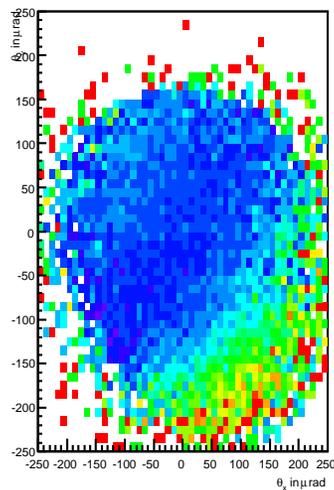
No hit in Cedar 1, PMT 2



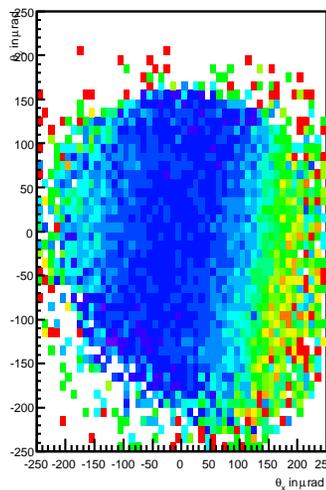
No hit in Cedar 1, PMT 3



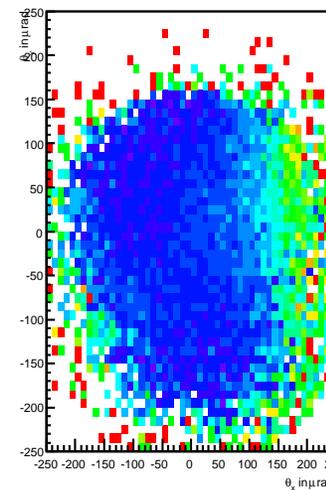
No hit in Cedar 1, PMT 4



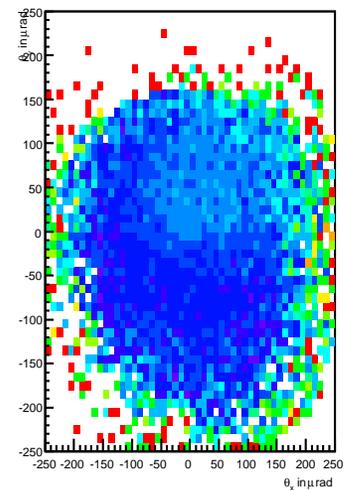
No hit in Cedar 1, PMT 5

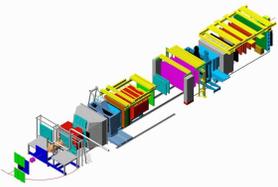


No hit in Cedar 1, PMT 6



No hit in Cedar 1, PMT 7





P_{xy}^i (Signal|Pion)

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖ $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$

❖ $P(\text{Signal})$

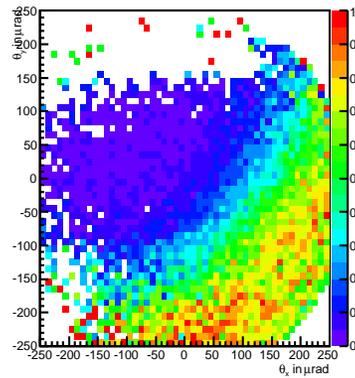
❖ $P(\text{Kaon})$

Vorgehensweise II

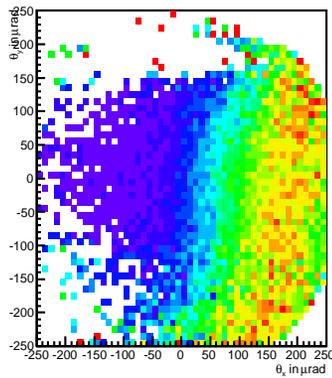
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

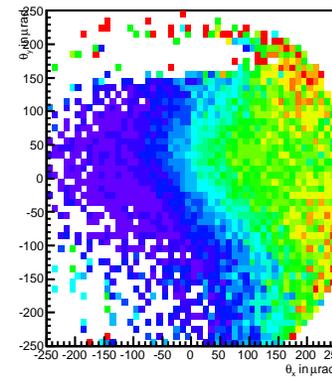
Hit in Cedar 1, PMT 0



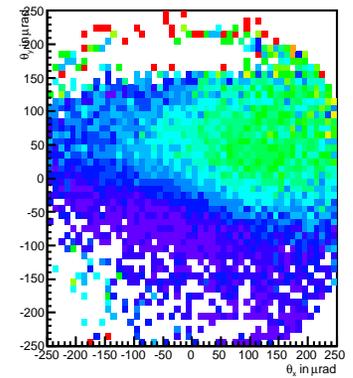
Hit in Cedar 1, PMT 1



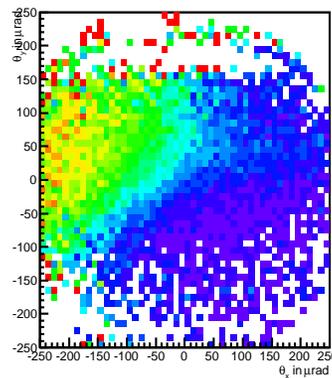
Hit in Cedar 1, PMT 2



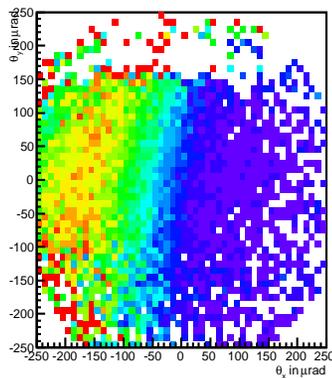
Hit in Cedar 1, PMT 3



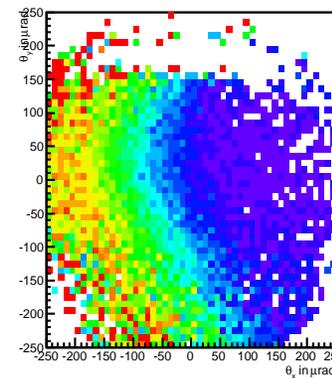
Hit in Cedar 1, PMT 4



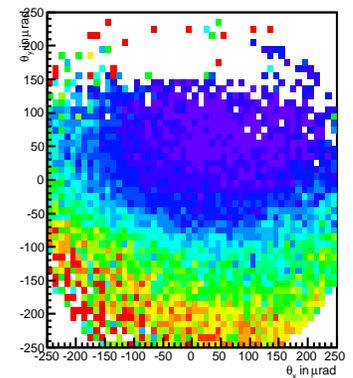
Hit in Cedar 1, PMT 5

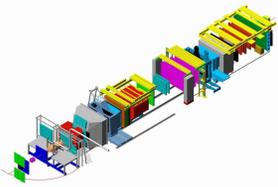


Hit in Cedar 1, PMT 6



Hit in Cedar 1, PMT 7





$P_{xy}^i(\text{Signal}|\text{Pion})$

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

❖ Anmerkungen

❖ $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$

❖ $P(\text{Signal})$

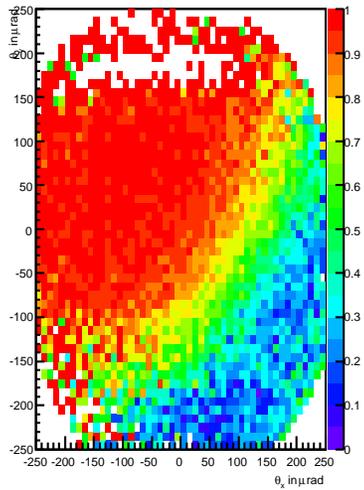
❖ $P(\text{Kaon})$

Vorgehensweise II

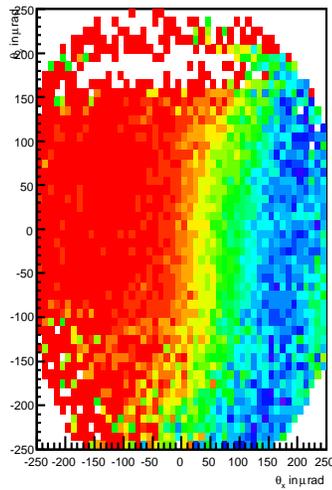
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

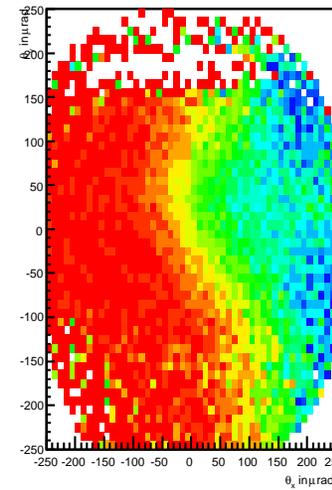
No hit in Cedar 1, PMT 0



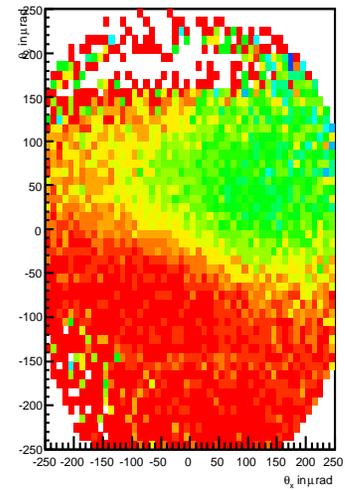
No hit in Cedar 1, PMT 1



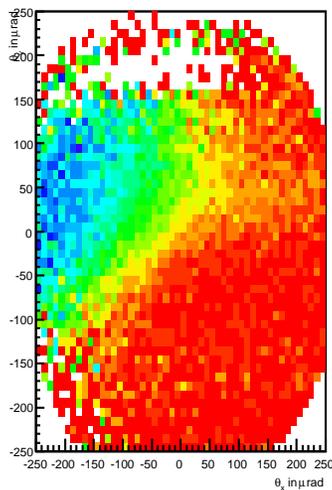
No hit in Cedar 1, PMT 2



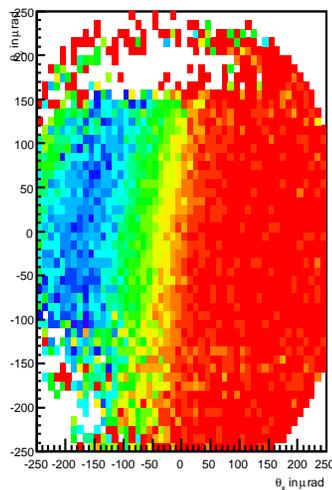
No hit in Cedar 1, PMT 3



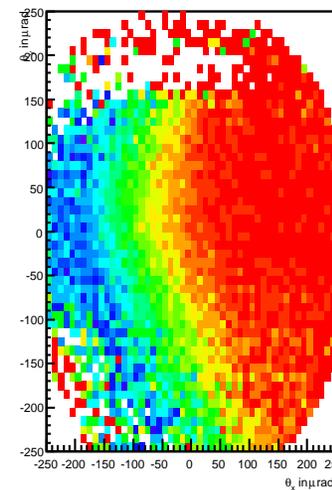
No hit in Cedar 1, PMT 4



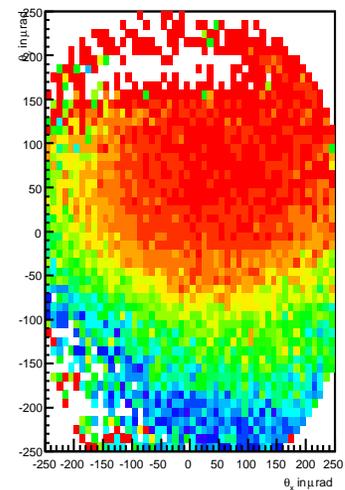
No hit in Cedar 1, PMT 5

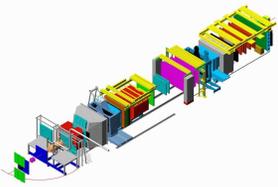


No hit in Cedar 1, PMT 6



No hit in Cedar 1, PMT 7





Bestimmung von $P_{xy}^i(\text{Signal})$

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

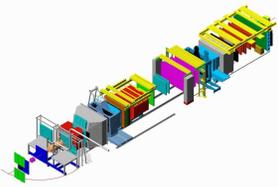
- ❖ Anmerkungen
- ❖ P(Signal/Kaon)
- ❖ P(Signal)
- ❖ P(Kaon)

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Für die Bestimmung von $P_{xy}^i(\text{Signal})$ und $P_{xy}^i(\overline{\text{Signal}})$ wird analog vorgegangen, allerdings wird das ungefilterte Sample verwendet.



P_{xy}^i (Signal)

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

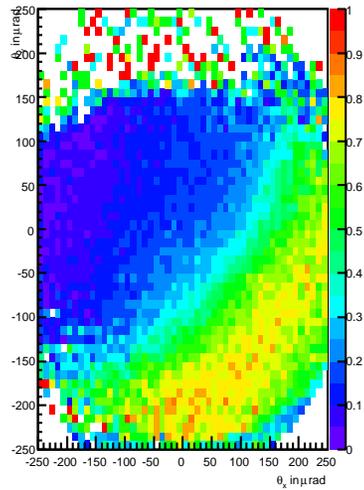
- ❖ Anmerkungen
- ❖ $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$
- ❖ $P(\text{Signal})$
- ❖ $P(\text{Kaon})$

Vorgehensweise II

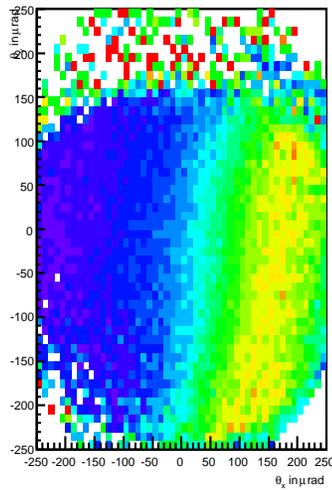
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

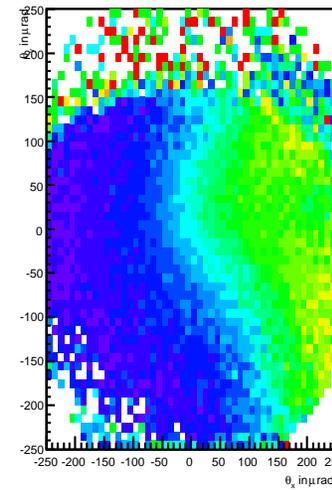
Hit in Cedar 1, PMT 0



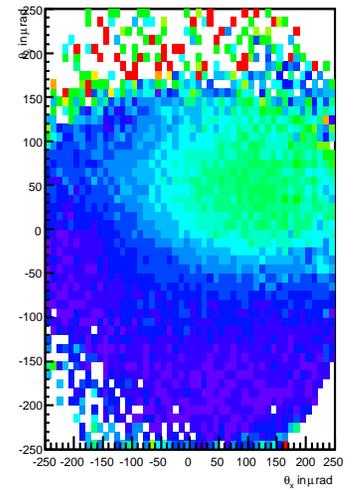
Hit in Cedar 1, PMT 1



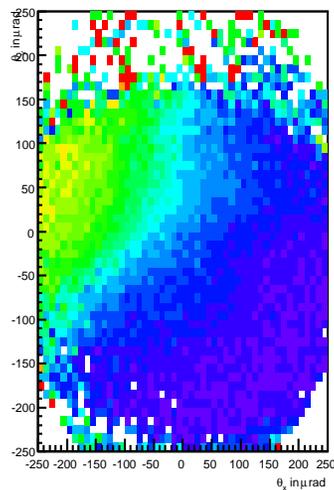
Hit in Cedar 1, PMT 2



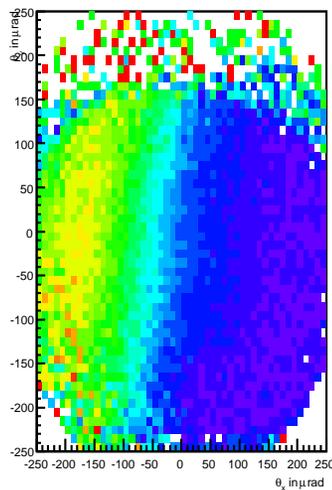
Hit in Cedar 1, PMT 3



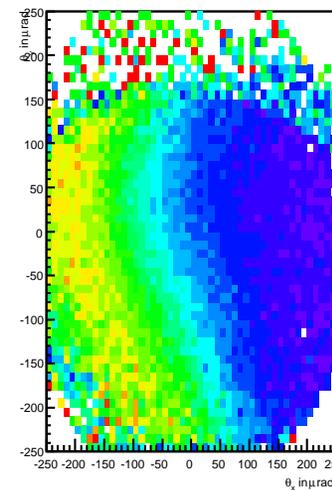
Hit in Cedar 1, PMT 4



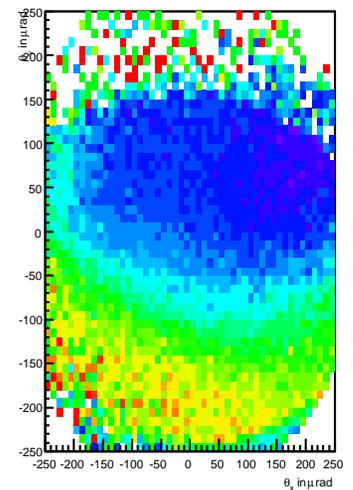
Hit in Cedar 1, PMT 5

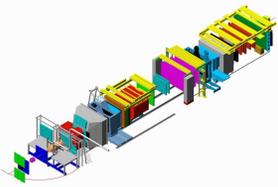


Hit in Cedar 1, PMT 6



Hit in Cedar 1, PMT 7





$$P_{xy}^i(\text{Signal})$$

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

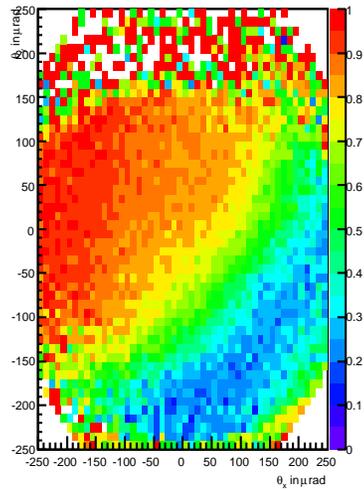
- ❖ Anmerkungen
- ❖ $P(\text{Signal}/\text{Kaon})$
- ❖ $P(\text{Signal})$
- ❖ $P(\text{Kaon})$

Vorgehensweise II

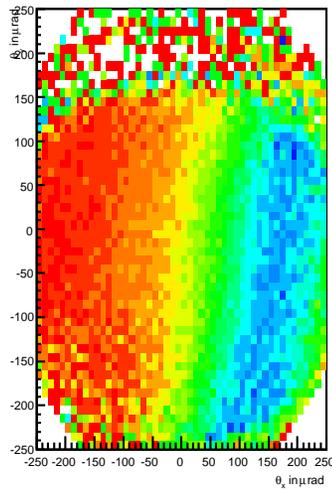
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

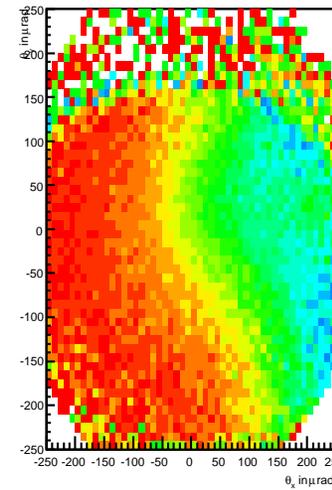
No hit in Cedar 1, PMT 0



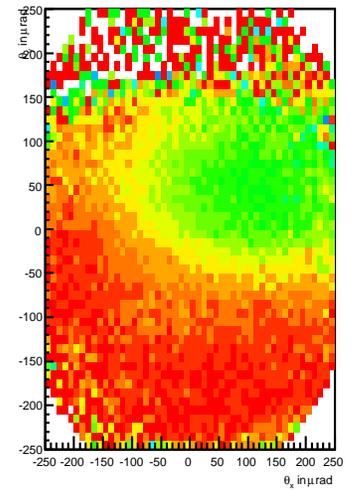
No hit in Cedar 1, PMT 1



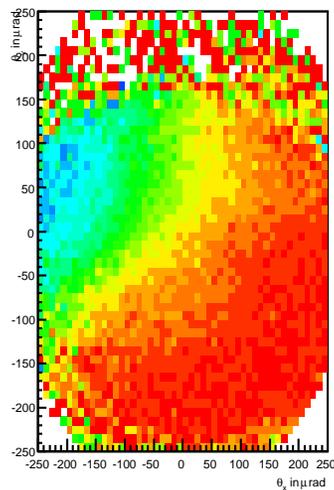
No hit in Cedar 1, PMT 2



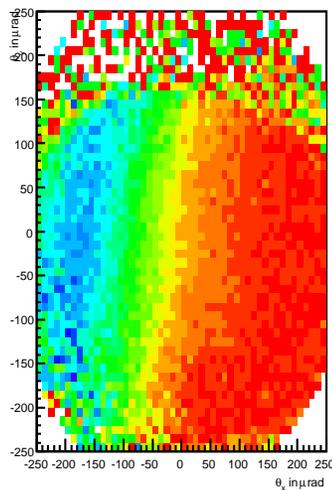
No hit in Cedar 1, PMT 3



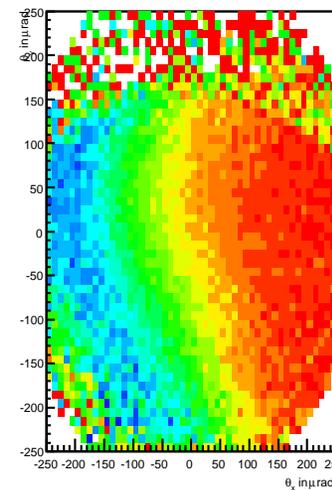
No hit in Cedar 1, PMT 4



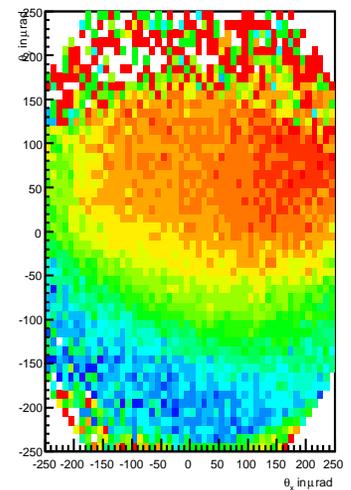
No hit in Cedar 1, PMT 5

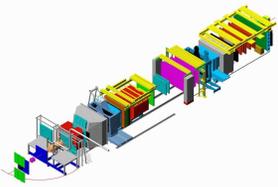


No hit in Cedar 1, PMT 6



No hit in Cedar 1, PMT 7





Bestimmung von $P_{xy}(\text{Kaon})$

$P_{xy}(\text{Kaon})$ ist die Wahrscheinlichkeit, ein Kaon mit bestimmten Strahlwinkeln θ_x und θ_y zu finden. Man erhält sie durch binweises normieren der Verteilung der Strahlwinkel auf das komplette Sample.

Analog wird für die Pionen vorgegangen.

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

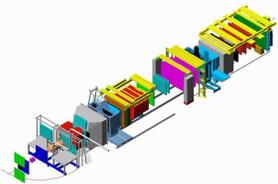
Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

- ❖ Anmerkungen
- ❖ P(Signal/Kaon)
- ❖ P(Signal)
- ❖ P(Kaon)

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse



$P_{xy}(\text{Kaon})$

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

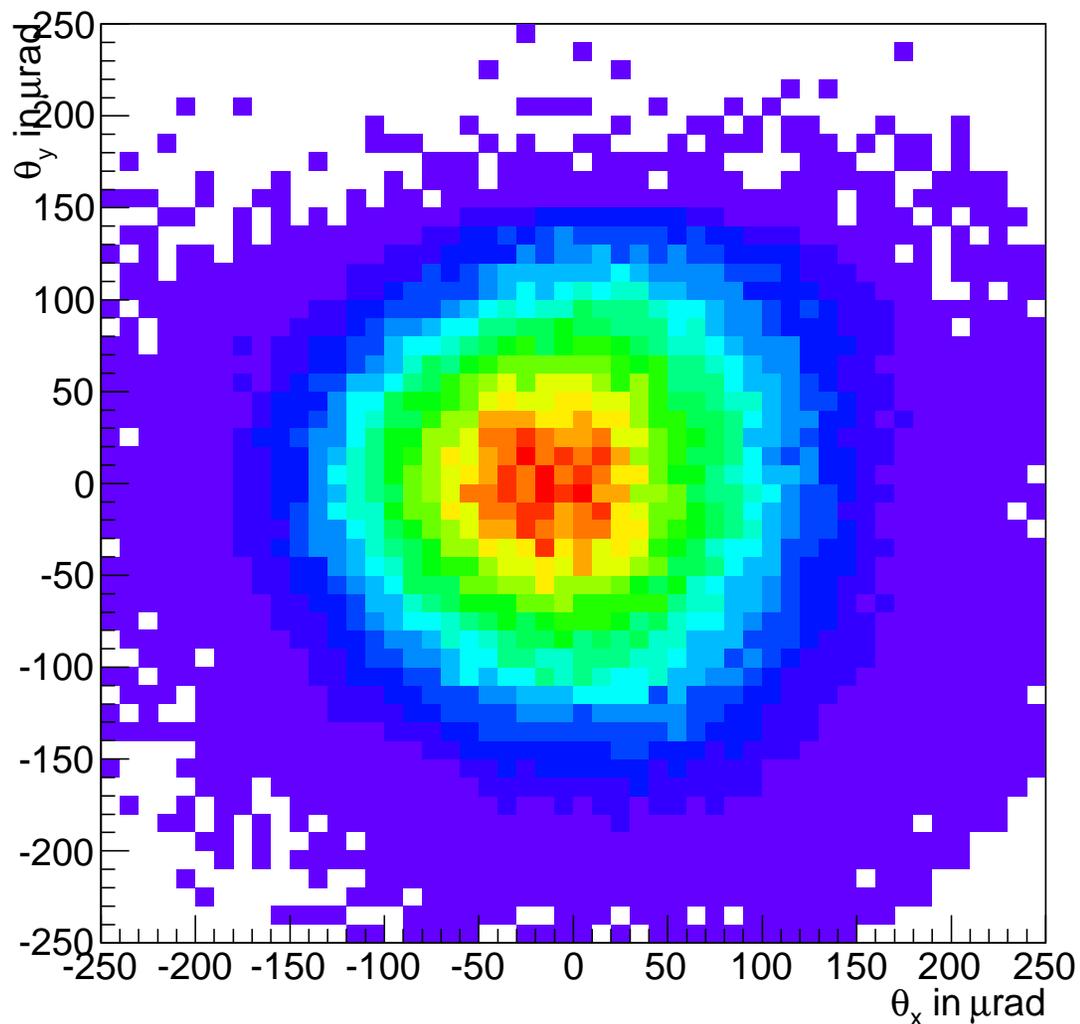
- ❖ Anmerkungen
- ❖ P(Signal/Kaon)
- ❖ P(Signal)
- ❖ P(Kaon)

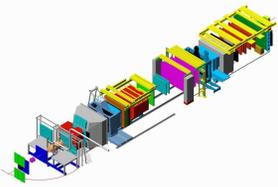
Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Probability for Divergence in CEDAR 1





P_{xy} (**Pion**)

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

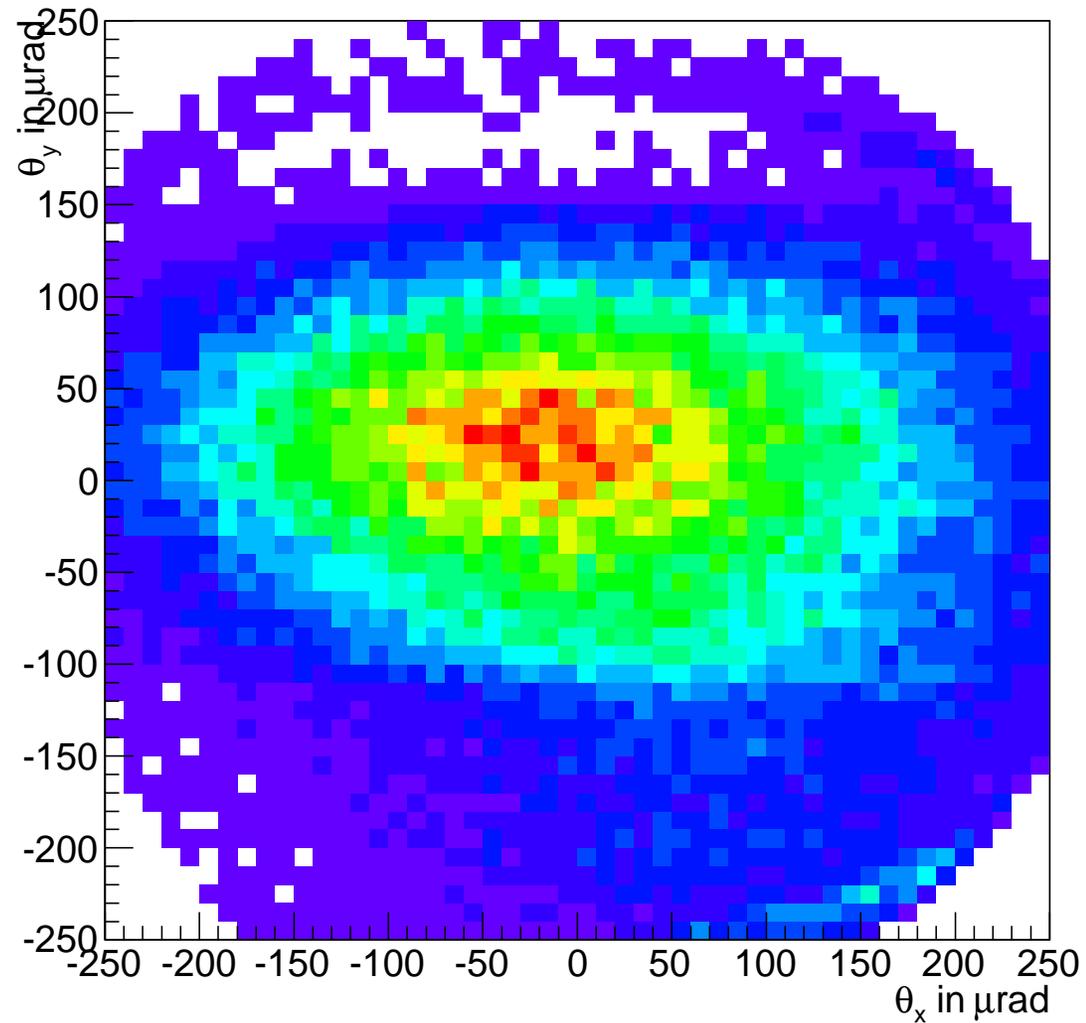
- ❖ Anmerkungen
- ❖ P(Signal/Kaon)
- ❖ P(Signal)
- ❖ P(Kaon)

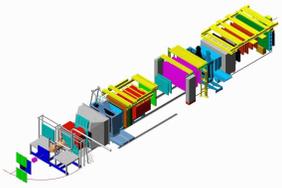
Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Probability for Divergence in CEDAR 1





Einige Gedanken zur
Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der
Wahrscheinlichkei-
ten

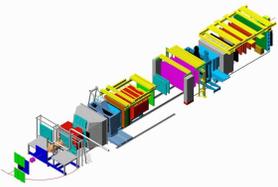
Vorgehensweise II

- ❖ Bestimmung der Likelihoods
- ❖ Ermittlung der PID
- ❖ Ermittlung der PID

Ermittlung der
Likelihoods

Ergebnisse

Vorgehensweise II



Bestimmung der Likelihoods

Die ermittelten Likelihoods werden nun logarithmiert und dann aufsummiert:

$$\log L^K = \sum_{i=1}^8 \log P_{xy}^i(\text{Kaon}|\text{Signal}) \cdot \eta^i + \sum_{i=1}^8 \log P_{xy}^i(\text{Kaon}|\overline{\text{Signal}}) \cdot (1 - \eta^i)$$

Wobei gilt:

$$\eta^i = \begin{cases} 1 & \text{Signal in PMT } i \\ 0 & \overline{\text{Signal}} \text{ in PMT } i \end{cases}$$

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

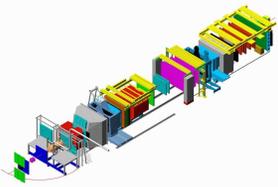
❖ Bestimmung der Likelihoods

❖ Ermittlung der PID

❖ Ermittlung der PID

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse



Ermittlung der PID

Die log-Likelihood Werte werden miteinander verglichen, um eine PID festzulegen:

+ 0,1 PID „K“

+ 0,1 PID „ π “

sonst PID „no PID“

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

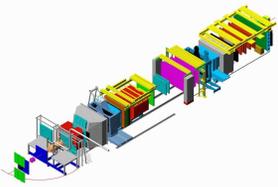
❖ Bestimmung der Likelihoods

❖ Ermittlung der PID

❖ Ermittlung der PID

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse



Ermittlung der PID

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

❖ Bestimmung der Likelihoods

❖ Ermittlung der PID

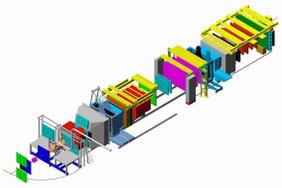
❖ Ermittlung der PID

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

Die Informationen der beiden CEDARs werden dann kombiniert:

$\&$	$?$	π	K
$?$	$?$	π	$?$
π	π	π	K
K	$?$	K	K



Einige Gedanken zur
Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der
Wahrscheinlichkei-
ten

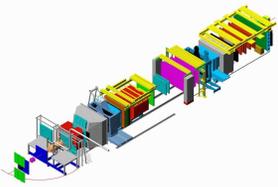
Vorgehensweise II

**Ermittlung der
Likelihoods**

- ❖ Kaonsample
- ❖ Pionsample
- ❖ Beamsample

Ergebnisse

Ermittlung der Likelihoods



Kaonsample

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

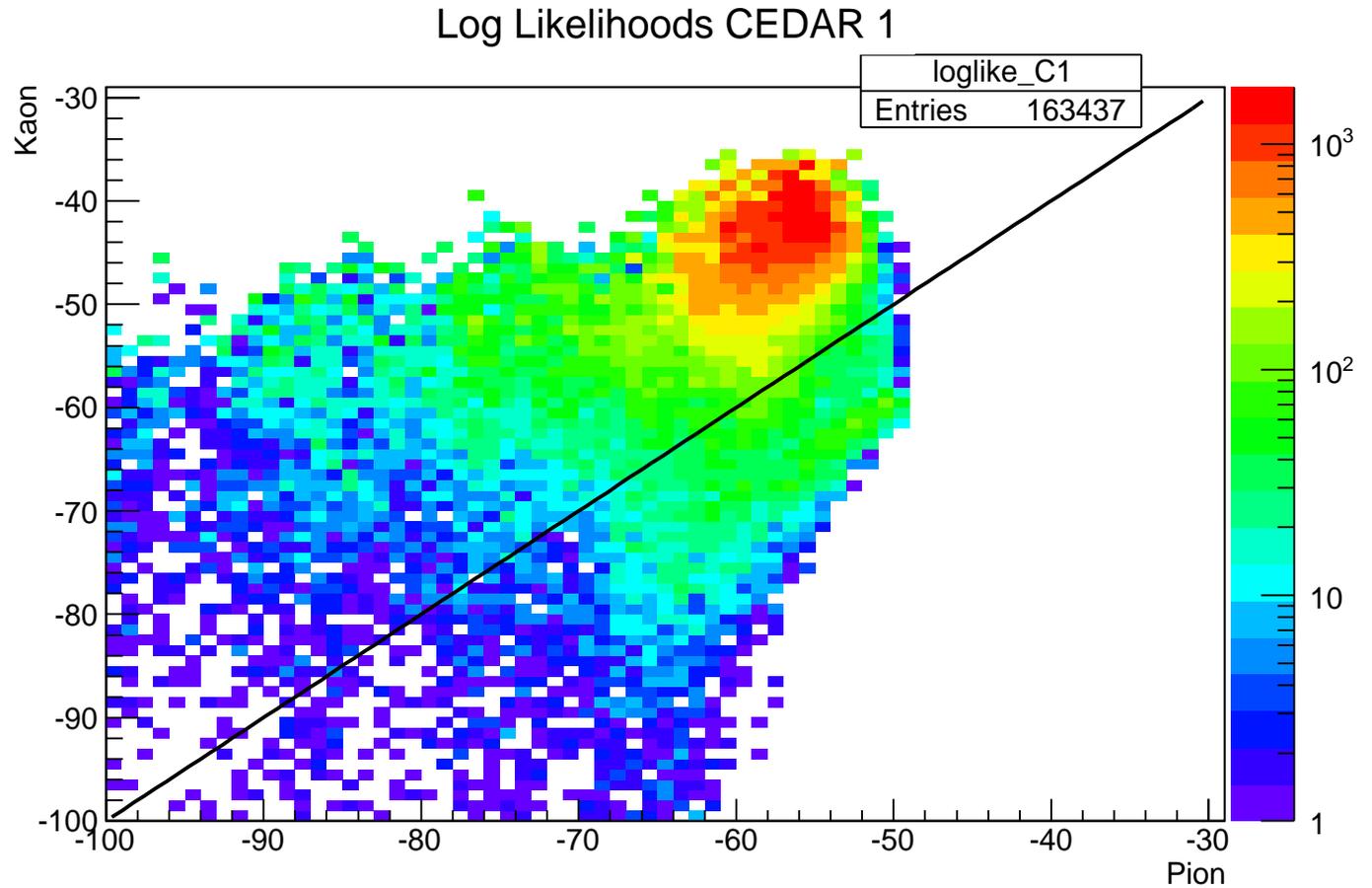
Ermittlung der Likelihoods

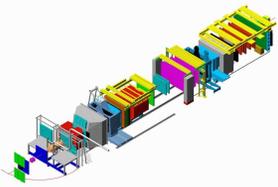
❖ Kaonsample

❖ Pionsample

❖ Beamsample

Ergebnisse





Pionsample

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

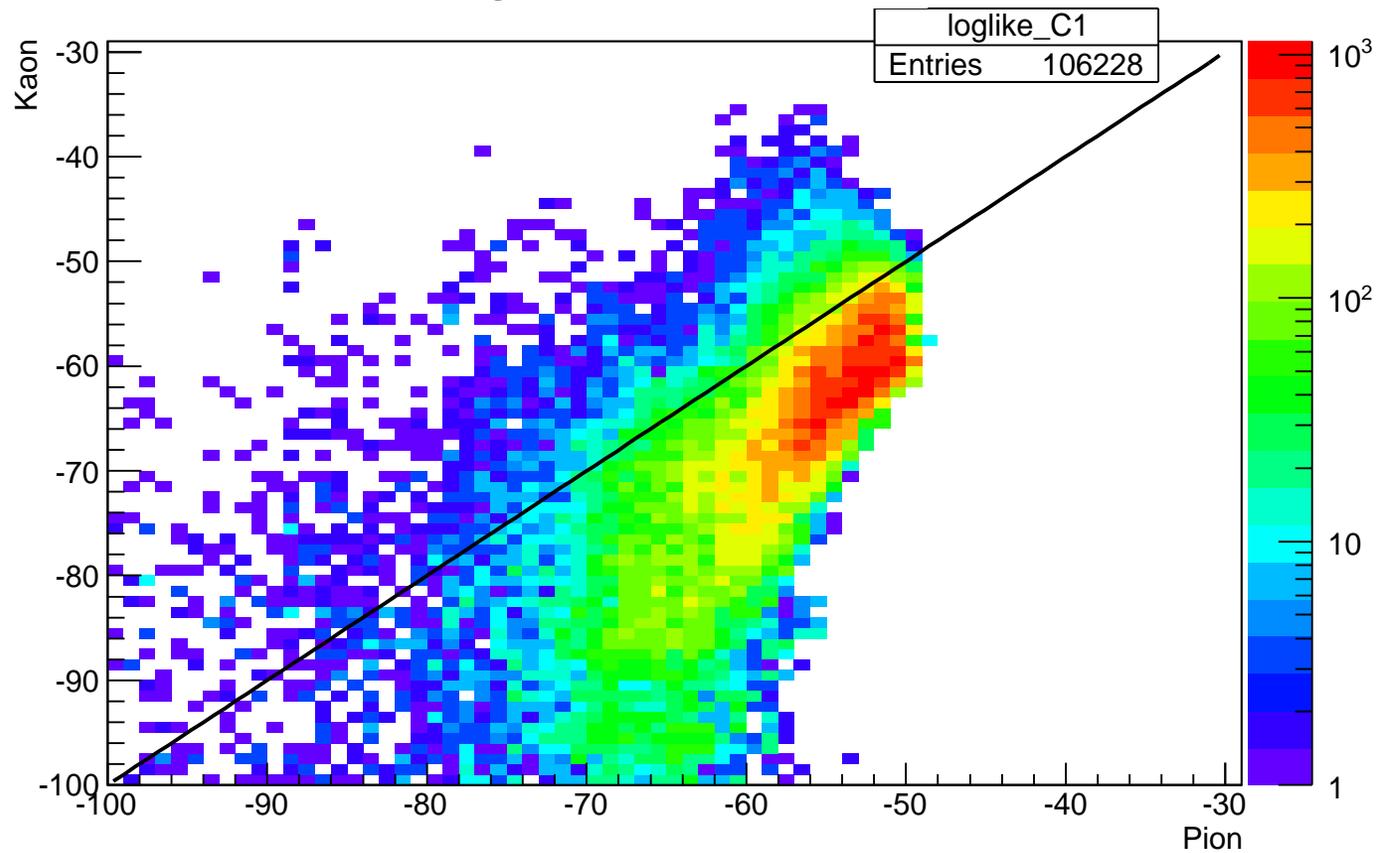
❖ Kaonsample

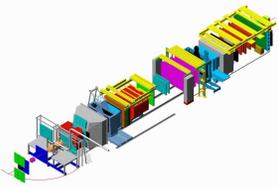
❖ **Pionsample**

❖ Beamsample

Ergebnisse

Log Likelihoods CEDAR 1





Beamsample

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

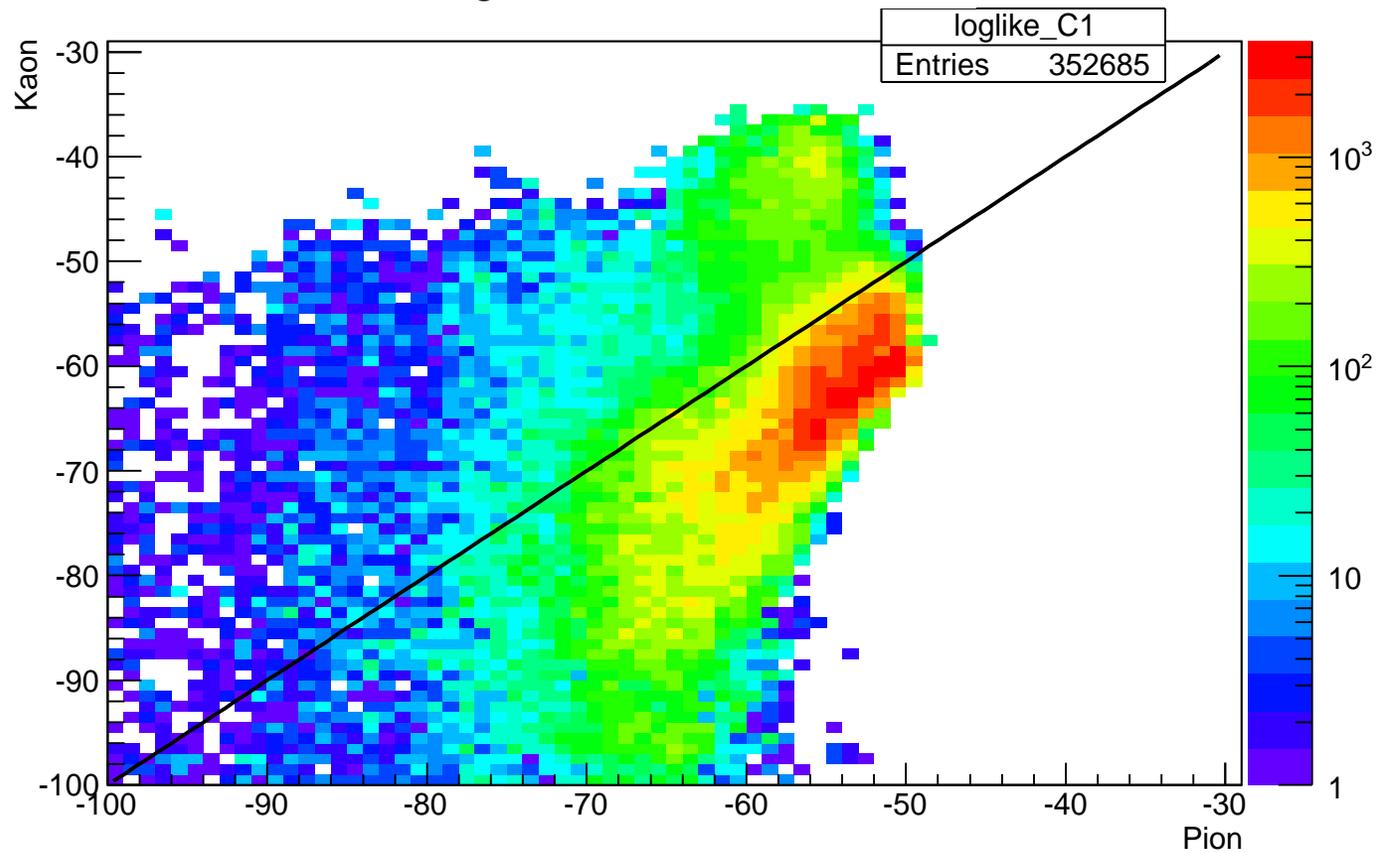
❖ Kaonsample

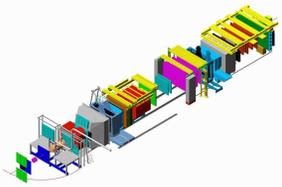
❖ Pionsample

❖ **Beamsample**

Ergebnisse

Log Likelihoods CEDAR 1





Einige Gedanken zur
Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der
Wahrscheinlichkei-
ten

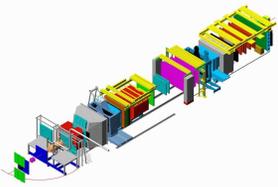
Vorgehensweise II

Ermittlung der
Likelihoods

Ergebnisse

- ❖ Ermittelte PIDs
Beamsample
- ❖ Vergleich mit
Majorität 6
- ❖ Ausblick

Ergebnisse



Ermittelte PIDs Beamsample

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

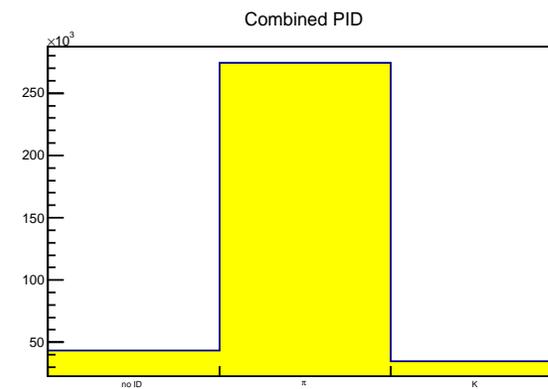
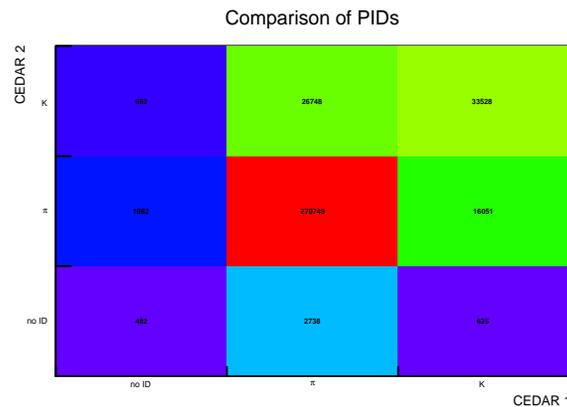
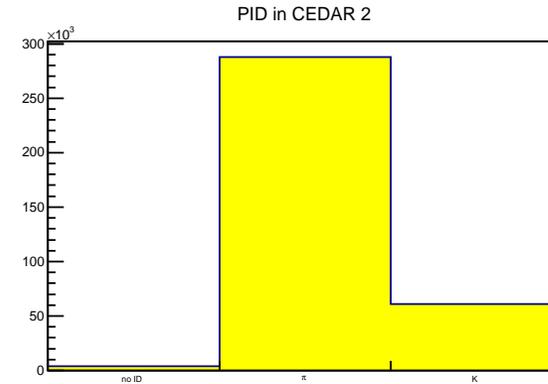
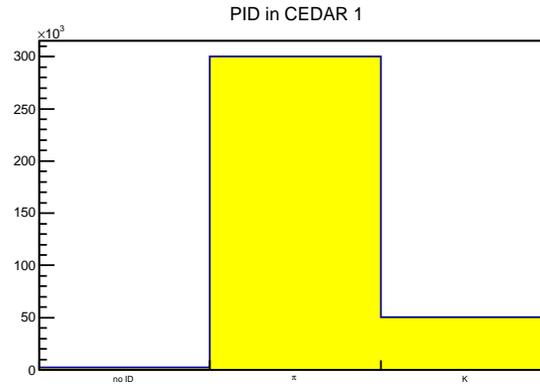
Ermittlung der Likelihoods

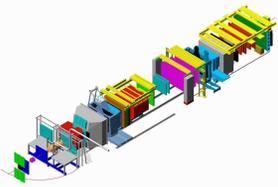
Ergebnisse

❖ Ermittelte PIDs Beamsample

❖ Vergleich mit Majorität 6

❖ Ausblick





Ermittelte PIDs Beamsample

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

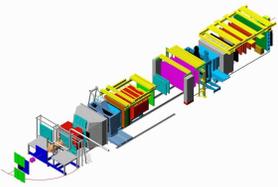
Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

❖ Ermittelte PIDs Beamsample

- ❖ Vergleich mit Majorität 6
- ❖ Ausblick

	π	K	no ID
CEDAR 1	85.1284%	14.2348%	0.636829%
CEDAR 2	81.6258%	17.284%	1.09021%
combined	77.8511%	9.87709%	12.2719%



Vergleich mit Majorität 6

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

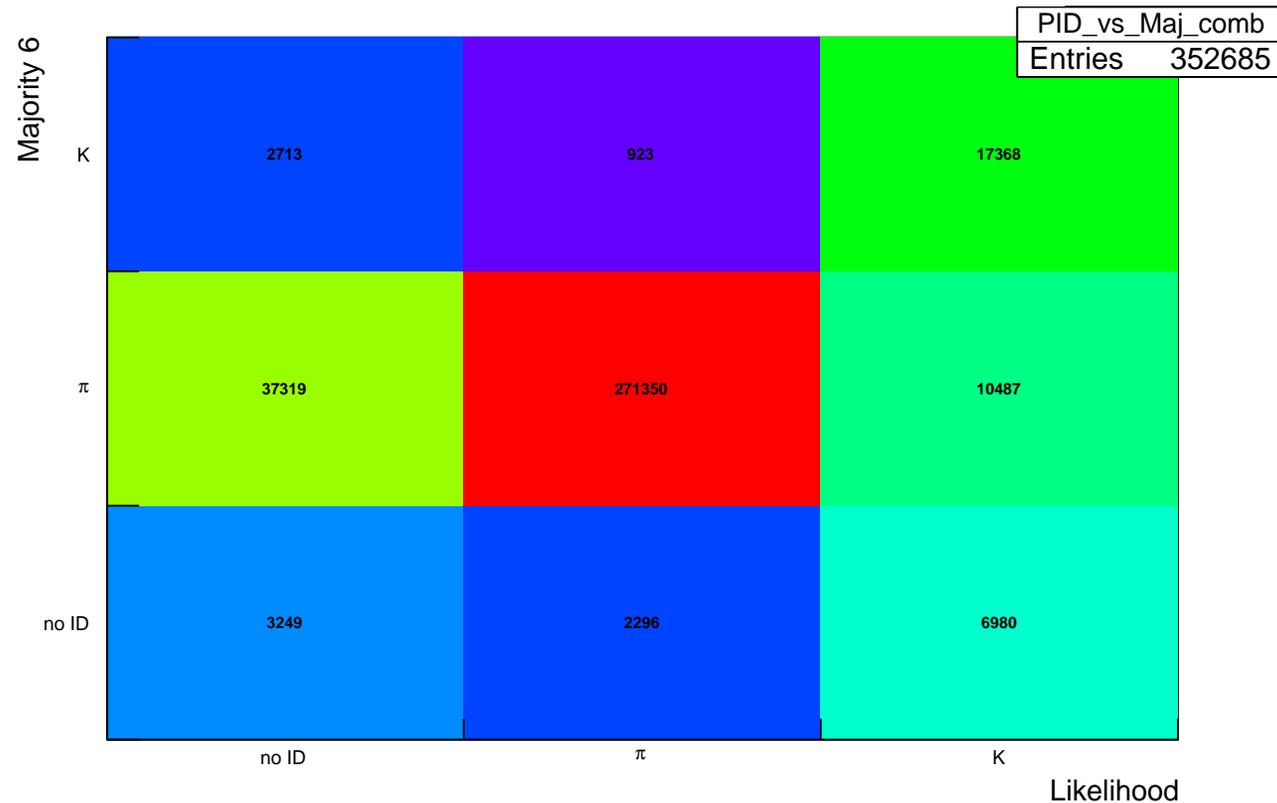
Ergebnisse

❖ Ermittelte PIDs Beamsample

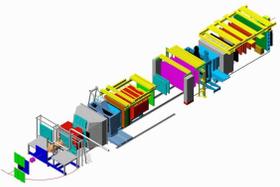
❖ Vergleich mit Majorität 6

❖ Ausblick

Likelihood ID vs. Majority ID combined



- 4,4% der Majoritätskaonen werden als Likelihoodpionen identifiziert



Ausblick

Einige Gedanken zur Likelihood Methode

Vorgehensweise I

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

Vorgehensweise II

Ermittlung der Likelihoods

Ergebnisse

❖ Ermittelte PIDs Beamsample

❖ Vergleich mit Majorität 6

❖ **Ausblick**

- Implementierung der Methode in den CEDAR-Helper (in Arbeit)
- Test der Methode (z.B. auf Tobi Schlüters Code)