

Elektrodynamik

Skript zur Vorlesung von **Prof. Dr. Peter van Dongen**
WS 2017/18

Institut für Physik
Staudingerweg 7, 55128 Mainz



Copyright ©2002 Peter van Dongen, Mainz, Germany

letzte Aktualisierung: 26. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Die Maxwell-Gleichungen	2
1.2	Statische elektromagnetische Felder	5
1.2.1	Analogie zum Gravitationsgesetz	8
1.3	Elektromagnetische Wellen und der statische Grenzfall	8
1.4	Elektromagnetische Potentiale	11
1.5	Sind die Maxwell-Gleichungen Galilei-invariant?	12
2	Spezielle Relativitätstheorie	16
2.1	Erste Konsequenzen der Postulate	18
2.2	Der Abstand und die Eigenzeit	20
2.3	4-Schreibweise und Lorentz-Transformationen	24
2.3.1	Poincaré- und Lorentz-Transformationen	25
2.4	Physikalische Konsequenzen der Lorentz-Invarianz	27
2.5	4-Vektoren	30
2.6	Masse und Energie	35
2.7	Die Lorentz-Kraft und elektromagnetische Felder	36
3	Kanonischer Formalismus	43
3.1	Kräftefreie Teilchen	43
3.2	Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld	49
3.3	Das Wirkungsfunktional der Felder	52
3.3.1	Eichinvarianz der Wirkung des Gesamtsystems	55
3.3.2	Zusammenfassung	56
3.4	Invarianten des elektromagnetischen Feldes	57
3.5	Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes	59
3.5.1	Drehimpulserhaltung	66
3.5.2	Der Virialsatz	67
4	Die Dynamik der Teilchen	68
4.1	Räumlich homogene, zeitunabhängige E - und B -Felder	68
4.2	Das Coulomb-Problem für ein einzelnes Teilchen	72
4.3	Coulomb-Wechselwirkung als Vielteilchenproblem	76

5	Statische elektromagnetische Felder	81
5.1	Das elektrostatische Potential und die Multipolentwicklung	82
5.1.1	Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten	82
5.1.2	Multipolentwicklung in beliebiger Ordnung	84
5.1.3	Multipolentwicklung in sphärischen Koordinaten	85
5.2	Das Vektorpotential und das magnetische Moment	88
6	Die Dynamik der Felder - elektromagnetische Wellen	91
6.1	Elektromagnetische Wellen im Vakuum	92
6.2	Der Einfluss von Ladungen und Strömen	95
6.3	Wellengleichungen in materiellen Medien	99
6.4	Skintiefe und Skineffekt	102
6.4.1	Die Skintiefe in Metallen	103
6.4.2	Der Skineffekt im leitenden Draht	105
6.5	Hohlraumresonatoren und Wellenleiter	109
6.5.1	Beispiel: Quaderförmiger Hohlraum	111
6.5.2	Zylindergeometrien	113
7	Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen	116
7.1	Das Feld bewegter Punktladungen	116
7.2	Geradlinige und kreisförmige Bewegung	119
7.3	Strahlungsfelder lokalisierter oszillierender Quellen	124
7.3.1	Was ändert sich bei Wellenausbreitung im Medium?	130
A	Retardierte elektromagnetische Felder	132
	Literaturverzeichnis	134

Kapitel 1

Einführung

Die Elektrodynamik befasst sich mit der Wechselwirkung elektromagnetischer Felder und geladener materieller Teilchen. Es liegen also zwei miteinander gekoppelte Probleme vor: Einerseits sind wir an der Zeitentwicklung der elektromagnetischen Felder in Anwesenheit von Ladungen und Strömen interessiert, andererseits möchten wir die Dynamik der Ladungen und Ströme in Anwesenheit der Felder bestimmen. Beide Probleme müssen prinzipiell gemeinsam gelöst werden.

In dieser Einführung beschäftigen wir uns zuerst kurz mit den elektromagnetischen Feldern und danach mit der Dynamik geladener Teilchen.

Traditionell konzentriert man sich bei der Untersuchung elektromagnetischer Phänomene oft auf entweder die *Elektrizität* oder den *Magnetismus*. Dass beide Phänomene lediglich unterschiedliche Aspekte eines einheitlichen Phänomens, nämlich des *Elektromagnetismus*, sind, wurde spätestens im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie klar. Auch vorher hatte es insbesondere durch die Arbeiten von Ørsted, Faraday und Maxwell bereits deutliche Hinweise darauf gegeben, dass Elektrizität und Magnetismus eng miteinander gekoppelt sind.

Beide Phänomene, sowohl die Elektrizität (Blitze, Elmsfeuer) als auch der Magnetismus (Magnetit, Bernstein) sind der Menschheit schon lange bekannt. Den ersten Kompass soll es bereits im 26. Jahrhundert vor Christus in China gegeben haben. Trotzdem hat es bis zum 19. Jahrhundert gedauert, bevor zuerst die Gesetze der Elektrostatik und Magnetostatik und dann die einheitlichen Gesetze des Elektromagnetismus formuliert wurden. Charles-Augustin de Coulomb zeigte 1785, dass zwei Teilchen mit den Ladungen q_1 und q_2 sich gemäß

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad , \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$$

anziehen bzw. abstoßen, abhängig vom Vorzeichen der beiden Ladungen. Jean-Baptiste Biot und Felix Savart zeigten Anfang des 19. Jahrhunderts, dass ein infinitesimales Segment $d\ell$ eines von einem Strom I durchflossenen Stromdrahts im Abstand \mathbf{r} das Magnetfeld

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad , \quad \mu_0 \equiv \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \equiv 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{kg m}}{\text{A}^2 \text{s}^2}$$

erzeugt, woraus z. B. folgt, dass das Magnetfeld eines unendlich langen geraden Stromdrahts durch $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{r}}$ gegeben ist, wobei \mathbf{r} nun den Relativvektor

zum Stromdraht (mit $\mathbf{r} \perp \mathbf{I}$) bezeichnet. Die *Dynamik* (also die Beschreibung der Zeitabhängigkeit) elektromagnetischer Phänomene und somit die Verschmelzung von Elektrizität und Magnetismus wurde hauptsächlich von drei Forschern begründet: Hans Christian Ørsted entdeckte 1820 (rein zufällig), dass elektrische Ströme Magnetfelder hervorrufen. Michael Faraday zeigte daraufhin 1831, dass auch das Umgekehrte gewissermaßen zutrifft: Zeitlich veränderliche Magnetfelder induzieren Ströme in Stromkreisen. Schließlich fasste James Clerk Maxwell die bisherigen Einsichten 1864 in den vier nach ihm benannten mathematischen Gleichungen zusammen, und aufgrund dieser Theorie machte er die Vorhersage, dass auch zeitlich veränderliche elektrische Felder Magnetfelder erzeugen. Eine weitere Vorhersage der Maxwell-Theorie, die Existenz elektromagnetischer Wellen, die sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit $c \equiv 299\,792\,458$ m/s ausbreiten, wurde 1887 von Heinrich Hertz verifiziert.

Die theoretische Beschreibung des zweiten Teils der Elektrodynamik, d. h. der Dynamik von Ladungen und Strömen in Anwesenheit von Feldern, wurde erst drei Jahrzehnte nach Maxwell (um 1895) von Hendrik Antoon Lorentz begründet, der sich auch um das Verständnis der Gesamtheorie und ihres Zusammenhangs sowie den Nachweis ihrer „Lorentz-Kovarianz“ sehr verdient gemacht hat.

1.1 Die Maxwell-Gleichungen

Die Form der Maxwell-Gleichungen „im Vakuum“ ist geringfügig einfacher als diejenige „im Medium“, auf die am Ende dieses Abschnitts näher eingegangen wird. Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum lauten:

$$\begin{aligned} \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho & \text{III. } \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \text{II. } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \text{IV. } \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j} . \end{aligned} \quad (1.1)$$

Sie bestimmen somit die Zeitentwicklung der elektrischen bzw. magnetischen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ für vorgegebene Ladungs- bzw. Stromdichten $\rho(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$. Die Maxwell-Theorie „im Vakuum“ ist im Gegensatz zu derjenigen „im Medium“ eine *fundamentale, mikroskopische, klassische* Theorie. Dies bedeutet insbesondere, dass die geladene Materie, die die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x}, t)$ und die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ definiert, als aus klassischen *Punktteilchen* aufgebaut gedacht wird. Dementsprechend haben die Ladungs- und Stromdichten die Form

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\nu} q_{\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\nu}) \quad , \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\nu} q_{\nu} \dot{\mathbf{x}}_{\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\nu}) \quad ,$$

wobei ν die verschiedenen Punktteilchen indiziert, q_{ν} bzw. $\mathbf{x}_{\nu}(t)$ die Ladung und die Bahn des ν -ten Punktteilchens darstellen und $\delta(\mathbf{x})$ die Dirac'sche Deltafunktion ist, die durch die Eigenschaft

$$\int d\mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

für alle glatten (stetigen) Funktionen f definiert ist. Wir lernen somit zweierlei: Einerseits ist nun klar, dass der Zusatz „im Vakuum“ die Zeitentwicklung der

elektromagnetischen Felder *im Vakuum* zwischen den klassischen Punktteilchen andeutet. Andererseits basieren die Maxwell-Gleichungen (1.1) offenkundig auf der Annahme, dass die Materie klassisch behandelt, d. h. dass die reale, *quantenmechanische* Zeitentwicklung im Sinne des Ehrenfest-Theorems durch klassische Bewegungsgleichungen ersetzt werden kann.

Bevor wir versuchen, die einzelnen Maxwell-Gleichungen zu interpretieren und mit dem Experiment in Verbindung zu bringen, sei auf einige allgemeine Eigenschaften der Maxwell-Theorie hingewiesen:

- Die Dynamik der Ladungs- und Stromdichten wird von der Maxwell-Theorie als bekannt vorausgesetzt und kann *nicht* aus ihr bestimmt werden. Falls die Ladungen und Ströme explizit durch \mathbf{E} und \mathbf{B} beeinflusst werden, ist die Maxwell-Theorie um weitere dynamische Gleichungen für ρ und \mathbf{j} zu ergänzen.
- Die Maxwell-Gleichungen sind linear in ρ und \mathbf{j} . Es gilt also ein *Superpositionsprinzip*: Der Effekt einer Summe von Ladungs- oder Stromdichten ist gleich der Summe der Effekte der einzelnen Dichten.
- Aus den Maxwell-Gleichungen I und IV folgt sofort, dass *Ladungserhaltung* gilt: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, im Einklang mit dem Experiment. Ladungserhaltung ist bekanntlich eines der fundamentalen Naturgesetze.
- Die vier Maxwell'schen Gleichungen sind die Bewegungsgleichungen einer *klassischen* Feldtheorie, da die orts- und zeitabhängigen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ reellwertige Vektoren bzw. Pseudovektoren darstellen. Im Quantenbereich, also wenn die Dynamik einzelner Photonen und ihre Wechselwirkung mit geladenen Elementarteilchen relevant werden, sind die reellwertigen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} durch entsprechende hermitesche Operatoren zu ersetzen.
- Die moderne mikroskopische Beschreibung elektromagnetischer Phänomene wurde stark von H. A. Lorentz mitgeprägt, so dass die entsprechenden Grundgleichungen (d. h. die Maxwell-Gleichungen) von A. Einstein sogar gelegentlich als die „Maxwell-Lorentz-Gleichungen“ bezeichnet wurden. Dieser Begriff hat sich in der Literatur jedoch nicht durchgesetzt.
- Die Maxwell-Theorie ist invariant unter der Lorentz- bzw. Poincaré-Gruppe, wie wir im Folgenden sehen werden, so dass sie ohne weiteres als Bestandteil einer *relativistischen* Elektrodynamik übernommen werden kann.

Wir wenden uns nun den einzelnen Maxwell-Gleichungen zu.

Die Maxwell-Gleichung I in (1.1) stellt das Coulomb'sche Gesetz in verallgemeinerter Form dar. Dies sieht man mit Hilfe des Gauß'schen Satzes:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial \mathcal{D}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) .$$

Wählt man nun $\rho(\mathbf{x}, t) = q_2 \delta(\mathbf{x})$ und $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| \leq r\}$, so folgt wegen der sphärischen Symmetrie $\mathbf{E} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{x}}$, so dass die Kraft auf eine Ladung q_1 am

Ort \mathbf{x} genau durch das Coulomb'sche Gesetz gegeben ist. Die zweite Maxwell-Gleichung (II) kann analog in der Form

$$\int_{\partial\mathcal{D}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0$$

geschrieben werden und besagt, dass keine magnetischen Ladungen („Monopole“) existieren. Die dritte Gleichung in (1.1) kann über eine zweidimensionale Fläche \mathcal{F} des dreidimensionalen Raums integriert und mit Hilfe des Stokes'schen Satzes umgeformt werden:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = - \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = - \oint_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) .$$

Diese Gleichung besagt, dass die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche \mathcal{F} eine Induktionsspannung in der Schleife $\partial\mathcal{F}$ (und somit einen Strom, falls $\partial\mathcal{F}$ ein Stromkreis ist) hervorruft. Dies ist das Faraday'sche Induktionsgesetz. Analog findet man aufgrund der vierten Maxwell-Gleichung:

$$\mu_0 \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \oint_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} ,$$

so dass elektrische Ströme und zeitlich veränderliche elektrische Felder tatsächlich Magnetfelder hervorrufen, wie von Ørsted experimentell beobachtet bzw. von Maxwell theoretisch vorhergesagt wurde. Ørsteds Befund ist heutzutage übrigens als „Ampère'sches Durchflutungsgesetz“ bekannt, da Ampère den von Ørsted gemessenen Effekt quantifiziert, formalisiert und systematisch untersucht hat.

Die Maxwell-Gleichungen „im Medium“ können durch eine *räumliche Mittelung* (typischerweise über Bereiche der Größenordnung 10^6 \AA^3 in einem Festkörper) aus denjenigen „im Vakuum“ hergeleitet werden und sind daher weniger fundamental als die Gleichungen (1.1). Im Medium sind bei der Formulierung der Maxwell-Gleichungen auch die Effekte der Magnetisierung \mathbf{M} und der Polarisation \mathbf{P} der Materie zu berücksichtigen. Führt man nun Hilfsfelder $\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ und $\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ ein, so erhalten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen I und IV die Form:

$$\text{I. } \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \text{IV. } \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} , \qquad (1.2)$$

während die homogenen Gleichungen II und III sich überhaupt nicht ändern. Die Polarisation und die Magnetisierung des Mediums hängen meist in einfacher Weise mit den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{H} zusammen:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad , \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} ,$$

wobei χ_m und χ_e als die magnetische bzw. dielektrische Suszeptibilität bezeichnet werden. Folglich gilt:

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = (1 + \chi_m) \mathbf{H} \equiv \mu_r \mathbf{H} \quad , \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D} = (1 + \chi_e) \mathbf{E} \equiv \varepsilon_r \mathbf{E} ,$$

mit der relativen Permeabilität μ_r und der relativen Dielektrizitätskonstante ε_r . In linearen, isotropen Medien haben die Maxwell-Gleichungen „im Medium“ und diejenige „im Vakuum“ also dieselbe Struktur: es wird lediglich ε_0 durch $\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0$ und μ_0 durch $\mu \equiv \mu_r \mu_0$ ersetzt. Hierbei ist aber stets zu bedenken, dass die (\mathbf{E}, \mathbf{B}) -Felder und (ρ, \mathbf{j}) „im Medium“ *räumlich gemittelte* Größen darstellen und sich somit fundamental von den (\mathbf{E}, \mathbf{B}) -Feldern und (ρ, \mathbf{j}) „im Vakuum“ unterscheiden.

1.2 Statische elektromagnetische Felder

Streng zeitunabhängige Felder $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ liegen immer dann vor, wenn die Ladungs- und Stromverteilungen zeitlich konstant sind. In diesem Fall reduzieren sich die Maxwell-Gleichungen auf

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{E})(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}) \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad , \quad (\nabla \times \mathbf{B})(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad , \end{aligned} \quad (1.3)$$

und man sieht, dass die Gleichungen der Elektrostatik und Magnetostatik in diesem Spezialfall entkoppelt sind. Viel interessanter (denn weniger speziell) ist jedoch, dass dieselben Gleichungen (1.3) auch für das *zeitgemittelte* Verhalten der Felder relevant sind, falls die Ladungs- und Stromverteilung *räumlich begrenzt* ist. In diesem Fall sind nämlich $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ (mindestens außerhalb dieses Raumbereichs) in ihrer zeitlichen Variation beschränkt und es gilt bei einer Zeitmittelung:

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}, T) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, 0)}{T} = \mathbf{0}$$

und analog:

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} = \mathbf{0} \quad ,$$

so dass sich die Maxwell-Gleichungen auf die Form

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \overline{\mathbf{E}})(\mathbf{x}) &= \overline{(\nabla \cdot \mathbf{E})(\mathbf{x})} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overline{\rho(\mathbf{x}, t)} \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \overline{\rho}(\mathbf{x}) \\ \nabla \times \overline{\mathbf{E}} &= \overline{\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overline{\mathbf{B}} &= \overline{\nabla \cdot \mathbf{B}} = 0 \\ \nabla \times \overline{\mathbf{B}} &= \overline{\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} = \mu_0 \overline{\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)} \equiv \mu_0 \overline{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

reduzieren. Die zeitlich gemittelten Größen $(\overline{\mathbf{E}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\rho}, \overline{\mathbf{j}})$ erfüllen also die Gleichungen (1.3) der Elektro- bzw. Magnetostatik.

Bilden wir nun die Rotation beider Glieder der Gleichungen $\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ und $\nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \mu_0 \bar{\mathbf{j}}$ unter Verwendung der Vektoridentität

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a} \quad , \quad (1.4)$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathbf{E}} &= \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \bar{\rho} \\ \Delta \bar{\mathbf{B}} &= \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}}) - \mu_0 \nabla \times \bar{\mathbf{j}} = -\mu_0 \nabla \times \bar{\mathbf{j}} \quad . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Die Komponenten der $\bar{\mathbf{E}}$ - und $\bar{\mathbf{B}}$ -Felder erfüllen daher Gleichungen der Form

$$(\Delta u)(\mathbf{x}) = -q(\mathbf{x}) \quad , \quad (1.6)$$

wobei $u(\mathbf{x})$ die Rolle eines allgemeinen Feldes und $q(\mathbf{x})$ diejenige der Quelle dieses Feldes spielt. Eine inhomogene Gleichung der Form (1.6) wird als *Poisson-Gleichung* bezeichnet, die homogene Variante $(\Delta u)(\mathbf{x}) = 0$ als *Laplace-Gleichung*. Die Poisson-Gleichung (1.6) ist natürlich nicht *eindeutig* lösbar, da man zu jeder Lösung $u(\mathbf{x})$ unendlich viele andere Lösungen $u'(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \lambda$ konstruieren kann, indem man lineare Terme $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ und Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ addiert, aber sie wird eindeutig lösbar, wenn man zusätzlich fordert, dass die Lösung für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ gegen Null strebt:

$$u(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad (|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) \quad . \quad (1.7)$$

In diesem Fall lautet die Lösung:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{q(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad . \quad (1.8)$$

Um zu zeigen, dass das Feld (1.8) tatsächlich die Poisson-Gleichung (1.6) mit der Randbedingung (1.7) erfüllt, weisen wir zuerst darauf hin, dass (1.8) sich in großem Abstand von der Quelle (d. h. für $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty$) wie

$$u(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{4\pi x} \int d\mathbf{x}' q(\mathbf{x}') \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

verhält und somit unter der Voraussetzung

$$Q \equiv \int d\mathbf{x}' q(\mathbf{x}') < \infty \quad ,$$

die für räumlich begrenzte Ladungs- und Stromverteilungen sicherlich erfüllt ist, in der Tat gegen Null strebt. Außerdem zeigen wir:

$$\Delta \left(-\frac{1}{4\pi x} \right) = \delta(\mathbf{x}) \quad , \quad \Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad , \quad (1.9)$$

wobei $\delta(\mathbf{x})$ die Dirac'sche Deltafunktion,

$$\int d\mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad ,$$

und Δ den Laplace-Operator darstellt. Aus (1.9) folgt dann sofort:

$$\Delta u = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{x}' q(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = - \int d\mathbf{x}' q(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -q(\mathbf{x}) \quad ,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. Um (1.9) zu beweisen, zeigen wir zuerst, dass für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt: $\Delta(-\frac{1}{4\pi x}) = 0$; dies folgt aus:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{x} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{1}{x^2} \frac{\partial x}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{x_i}{x^3} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{x^3} + \frac{3x_i}{x^4} \frac{\partial x}{\partial x_i} \right) = -\frac{3}{x^3} + 3 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{x^5} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Außerdem gilt bei Integration über einen beliebigen kugelförmigen Bereich $\mathcal{D}_\varepsilon \equiv \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ mit Mittelpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} d\mathbf{x} \Delta \left(-\frac{1}{4\pi x} \right) &= \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} d\mathbf{x} \nabla \cdot \nabla \left(-\frac{1}{4\pi x} \right) = \int_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} d\mathbf{S} \cdot \nabla \left(-\frac{1}{4\pi x} \right) \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} d\mathbf{S} \cdot \frac{\hat{\mathbf{e}}_x}{4\pi x^2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon^2} \int_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = 1 \quad , \quad (1.10) \end{aligned}$$

wobei der Gauß'sche Satz verwendet wurde. Insbesondere gilt (1.10) also auch für beliebig *kleine* Kugelradien $\varepsilon > 0$. In Kombination mit der vorher abgeleiteten Eigenschaft $\Delta(-\frac{1}{4\pi x}) = 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ schließen wir, dass die „Funktion“ $\Delta(-\frac{1}{4\pi x})$ ein Gesamtgewicht gleich Eins hat und dass dieses Gewicht vollständig im Ursprung lokalisiert ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \Delta \left(-\frac{1}{4\pi x} \right) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \Delta \left(-\frac{1}{4\pi x} \right) \\ &= f(\mathbf{0}) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} d\mathbf{x} \Delta \left(-\frac{1}{4\pi x} \right) = f(\mathbf{0}) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} 1 = f(\mathbf{0}) \quad , \end{aligned}$$

womit (1.9) gezeigt wurde. Es sollte noch darauf hingewiesen werden, dass die Dirac'sche Deltafunktion keine Funktion im üblichen Sinne, sondern eine *verallgemeinerte Funktion* oder *Funktional* ist.

Aus den Gleichungen (1.5) folgt nun sofort mit Hilfe der allgemeinen Form (1.8) der Lösung der Poisson-Gleichung:

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{(\nabla \bar{\rho})(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad , \quad \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{(\nabla \times \bar{\mathbf{j}})(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad .$$

Hiermit ist das allgemeine Problem der Elektro- bzw. Magnetostatik im Prinzip vollständig gelöst. Mit Hilfe einer partiellen Integration folgt noch

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad . \end{aligned} \quad (1.11)$$

Die Gleichung für $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x})$ in (1.11) stellt das Coulomb-Gesetz dar, diejenige für $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ das Biot-Savart'sche Gesetz.

1.2.1 Analogie zum Gravitationsgesetz

Aus den Gleichungen (2.2) und (2.3) des Theorie-1-Skriptes ist bekannt, dass eine *Massendichte* $\rho(\mathbf{x}, t)$ auf ein Punktteilchen der schweren Masse m die Kraft $m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G} \int d\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}$$

ausübt. Man kann die Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ alternativ auch als

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G} \int d\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \mathcal{G} \int d\mathbf{x}' \frac{(\nabla \rho)(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

schreiben. Es folgt einerseits

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{g})(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{G} \int d\mathbf{x}' (\nabla \rho)(\mathbf{x}', t) \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= -4\pi \mathcal{G} \int d\mathbf{x}' (\nabla \rho)(\mathbf{x}', t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= -4\pi \mathcal{G} (\nabla \rho)(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

und andererseits

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{g})(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{G} \int d\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= -4\pi \mathcal{G} \int d\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= -4\pi \mathcal{G} \rho(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Offensichtlich sind die physikalischen Größen $(\mathbf{g}, m, \mathcal{G}, \rho)$ aus der Gravitationstheorie vollkommen analog zu den Größen $(\overline{\mathbf{E}}, q, -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \overline{\rho})$ aus der Elektrostatik. Insbesondere ist (1.12) formal analog zur Poisson-Gleichung (1.5) für $\overline{\mathbf{E}}$ und ist (1.13) analog zur Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \overline{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \overline{\rho}$. Ein klarer Unterschied zwischen beiden physikalischen Problemen ist, dass die Zeitabhängigkeit von $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ und $\rho(\mathbf{x}, t)$ grundsätzlich beliebig ist, während das elektrische Analogon nur für zeitgemittelte Größen $(\overline{\mathbf{E}}, \overline{\rho})$, d. h. im statischen Grenzfall gezeigt wurde. Eine Verallgemeinerung des elektrostatischen Grenzfalls auf zeitlich langsam veränderliche Quellen und Felder wird im nächsten Abschnitt behandelt.

1.3 Elektromagnetische Wellen und der statische Grenzfall

Eine der sehr wichtigen Vorhersagen der Maxwell'schen Theorie des Elektromagnetismus ist die Existenz *elektromagnetischer Wellen*, ein Phänomen, das 1887 tatsächlich von Heinrich Hertz nachgewiesen werden konnte. Aus den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho & \text{III. } \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \text{II. } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{IV. } \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \end{array}$$

folgt mit Hilfe der Vektoridentität (1.4) für das Magnetfeld:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times (\mu_0 \mathbf{j} - \nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{j} + \Delta \mathbf{B}$$

oder mit Hilfe des d'Alembert-Operators $\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$:

$$\square \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{j} \quad . \quad (1.14)$$

Analog folgt für das elektrische Feld:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}) = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \\ &= \Delta \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \end{aligned}$$

und daher:

$$\square \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\nabla \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) \quad . \quad (1.15)$$

Die Gleichungen (1.14) und (1.15) zeigen, dass die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder inhomogene *Wellengleichungen* erfüllen. Die Inhomogenitäten im rechten Glied machen klar, dass die elektromagnetischen Wellen von den *Ladungen* und *Strömen* hervorgerufen werden, die somit als Quellen des elektromagnetischen Feldes wirken.

Wiederum ist klar, dass die erzeugten \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder für den Fall streng zeitunabhängiger Ladungen und Ströme selbst auch zeitunabhängig sind und Poisson-Gleichungen der Form

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho \quad , \quad \Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{j} \quad (1.16)$$

erfüllen. Viel interessanter (denn realistischer) ist jedoch der Fall *langsam* in der Zeit variierender Ladungen und Ströme. Wir betrachten daher im Folgenden das Strahlungsfeld einer räumlich lokalisierten, mit der typischen Frequenz ω oszillierenden Quelle. Da aus den Gleichungen (1.14) und (1.15) folgt, dass elektromagnetische Wellen sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten, werden die erzeugten elektrischen und magnetischen Felder durch eine typische Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ charakterisiert sein. Nehmen wir nun an, dass die Quelle die typische Ausdehnung a und der Experimentator den typischen Abstand x von der Quelle hat. Falls die Frequenz ω so klein ist, dass sowohl $a \ll \lambda$ als auch $x \ll \lambda$ gilt, wird der Experimentator die Wellennatur des Feldes nicht sehen können; stattdessen misst er zu jedem Zeitpunkt das (zeitlich langsam veränderliche) Feld einer effektiv *statischen* Ladungs- und Stromverteilung. Formal äußert sich dies dadurch, dass sich (1.14) und (1.15) nun zu Poisson-Gleichungen der Form (1.16) reduzieren:

$$(\Delta \mathbf{E})(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\nabla \rho)(\mathbf{x}, t) \quad , \quad (\Delta \mathbf{B})(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 (\nabla \times \mathbf{j})(\mathbf{x}, t) \quad ,$$

wobei die Ladungen und Ströme (und daher auch die Felder) langsam in der Zeit variieren dürfen. Statt der Gleichungen (1.11) erhalten wir nun für das Coulomb-Gesetz:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (1.17)$$

und für das Biot-Savart-Gesetz:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (1.18)$$

wobei - wie bereits mehrmals gesagt - die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte \mathbf{j} zeitlich genügend langsam variieren müssen. Der Raumbereich $\{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| \ll \lambda\}$, in dem diese Ergebnisse gelten, wird in der Elektrodynamik als die *Nahzone* bezeichnet. Interessant ist, dass die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ in (1.17) und (1.18) durch die *instantanen* Werte der Ladungs- und Stromverteilung bestimmt werden. Dies ist eine Konsequenz davon, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Signale in diesem Problem sehr viel größer als die relevanten Teilchengeschwindigkeiten in den Quellen ist und außerdem $\lambda \gg x$ gilt.

Als Anwendung betrachten wir den Fall zweier geladener nicht-relativistischer Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 , den Ladungen q_1 und q_2 und den Ortskoordinaten $\mathbf{x}_1(t)$ und $\mathbf{x}_2(t)$. Jedes der beiden Teilchen stellt eine (punktförmige) Ladungs- und Stromdichte dar und wird daher elektrische und magnetische Felder erzeugen, die auf das andere Teilchen wirken. Insbesondere definiert Teilchen 2 die Ladungs- und Stromdichten:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q_2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t)) \quad , \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q_2 \dot{\mathbf{x}}_2(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t)) \quad .$$

Einsetzen dieser Dichten in (1.17) und (1.18) liefert:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q_2 [\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t)]}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t)|^3} \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{q_2 \dot{\mathbf{x}}_2(t) \times [\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t)]}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t)|^3} \quad .$$

Auf Teilchen 1 wirkt nun aufgrund der Lorentz'schen Bewegungsgleichung im statischen Grenzfall eine elektrische Kraft $q_1 \mathbf{E}(\mathbf{x}_1, t)$ sowie eine magnetische Kraft $q_1 \dot{\mathbf{x}}_1 \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_1, t)$:

$$q_1 \mathbf{E}(\mathbf{x}_1, t) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}_{12}(t)}{|\mathbf{x}_{12}(t)|^3} \quad , \quad q_1 \dot{\mathbf{x}}_1 \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_1, t) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\dot{\mathbf{x}}_1(t) \times [\dot{\mathbf{x}}_2(t) \times \mathbf{x}_{12}(t)]}{c^2 |\mathbf{x}_{12}(t)|^3} \quad .$$

Analog wirken auf Teilchen 2 im statischen Grenzfall die elektrischen bzw. magnetischen Kräfte:

$$q_2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_2, t) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}_{21}(t)}{|\mathbf{x}_{21}(t)|^3} \quad , \quad q_2 \dot{\mathbf{x}}_2 \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_2, t) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\dot{\mathbf{x}}_2(t) \times [\dot{\mathbf{x}}_1(t) \times \mathbf{x}_{21}(t)]}{c^2 |\mathbf{x}_{21}(t)|^3} \quad .$$

Erstens ist klar, dass die magnetischen Kräfte, die die beiden Teilchen aufeinander ausüben, das dritte Newton'sche Gesetz nicht erfüllen. Außerdem ist offensichtlich, dass die magnetischen Kräfte zwischen zwei nicht-relativistischen Teilchen sehr klein sind, von Ordnung $\beta_1 \beta_2$ mit $\beta_1 \equiv \frac{|\dot{\mathbf{x}}_1|}{c}$ und $\beta_2 \equiv \frac{|\dot{\mathbf{x}}_2|}{c}$. Die magnetischen Kräfte, die zwei nicht-relativistische Teilchen aufeinander ausüben, stellen daher eine meist vernachlässigbare relativistische Korrektur zu den dominanten elektrischen Kräften dar.

Zu einem vollkommen anderen Schluss kommt man jedoch bei der Untersuchung der magnetischen Wechselwirkung eines einzelnen Teilchens mit makroskopisch vielen anderen geladenen Teilchen. Als Beispiel betrachten wir einen möglicherweise geladenen, stromtragenden metallischen Festkörper, also z. B. einen Draht oder ein Kabel. Nur die Leitungselektronen tragen zum Strom bei;

die Metallionen sind fest im Kristallgitter eingebunden. Ein Überschuss oder Defizit an Elektronen führt zu einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x}, t)$ des Gesamtfestkörpers, die aufgrund von (1.17) eventuell ein makroskopisches elektrisches Feld erzeugen kann. Ein makroskopischer Strom der Elektronen führt zu einer Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$, die aufgrund von (1.18) ein makroskopisches Magnetfeld erzeugen kann. Jedes bewegliche Elektron im Festkörper für sich führt zu einem kleinen relativistischen magnetischen Effekt von Ordnung $\beta_1\beta_2$, aber makroskopisch viele Elektronen können magnetische Effekte von Ordnung $N\beta_1\beta_2$ mit $N = \mathcal{O}(10^{23})$ hervorrufen, die sich auch in der nicht-relativistischen Welt klar manifestieren können.

1.4 Elektromagnetische Potentiale

Aus den *homogenen* Maxwell-Gleichungen, die also im Medium und im Vakuum dieselbe Form haben, folgt sofort, dass die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} mit Hilfe von Potentialen Φ und \mathbf{A} darstellbar sind:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.19)$$

Gleichung II in (1.1), $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, impliziert nämlich unter der (meist realistischen) Annahme, dass $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{0}$ gilt für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \int d\mathbf{x}' \frac{(\nabla \times \mathbf{B})(\mathbf{x}', t)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (1.20)$$

so dass \mathbf{B} tatsächlich in der Form $\nabla \times \mathbf{A}$ darstellbar ist; umgekehrt impliziert $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ natürlich $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, so dass wir folgern können, dass beide Ausdrücke äquivalent sind. Einsetzen von $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ in die Maxwell-Gleichung III liefert

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0},$$

so dass für $\mathbf{e} \equiv \mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ also $\nabla \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$ gilt. Nun impliziert die Gleichung $\nabla \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$ generell (wiederum unter der Bedingung, dass $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{0}$ gilt für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$):

$$\mathbf{e} = -\nabla \int d\mathbf{x}' \frac{(\nabla \cdot \mathbf{e})(\mathbf{x}', t)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (1.21)$$

so dass \mathbf{e} in der Form $-\nabla\Phi$ darstellbar ist; umgekehrt folgt aus $\mathbf{e} = -\nabla\Phi$ trivialiter $\nabla \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$, so dass beide Formen äquivalent sind. Hiermit ist die *Existenz* der Potentiale Φ und \mathbf{A} in (1.19) nachgewiesen. Die Gleichungen (1.20) und (1.21) lassen sich leicht mit Hilfe der Identität $\Delta \left(-\frac{1}{4\pi x} \right) = \delta(\mathbf{x})$ beweisen.

Das Vektorpotential \mathbf{A} und das skalare Potential Φ in (1.19) sind übrigens nicht *eindeutig* durch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} bestimmt. Aus $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ist klar, dass man zu \mathbf{A} einen beliebigen Gradienten addieren kann, ohne das \mathbf{B} -Feld zu ändern; damit auch das \mathbf{E} -Feld invariant bleibt, muss zu Φ eine entsprechende Zeitableitung addiert werden. Die Potentiale

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \frac{1}{c} \nabla \Lambda, \quad \tilde{\Phi} = \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (1.22)$$

beschreiben also dieselben physikalischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} wie die Potentiale (\mathbf{A}, Φ) . Die Invarianz der Maxwell-Theorie unter *Eichtransformationen* der Form (1.22) ist eng mit dem Gesetz der Ladungserhaltung verknüpft. In konkreten Berechnungen ist es oft vorteilhaft, die Potentiale (\mathbf{A}, Φ) durch weitere Bedingungen („Eichungen“) einzuschränken. Grundsätzlich kann man nur eine solche Zusatzbedingung fordern, da nur eine einzige Funktion $\Lambda(\mathbf{x}, t)$ für Eichtransformationen zur Verfügung steht. Als Beispiel sei die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ erwähnt, die die einfache Beziehung

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{x}' \frac{(\nabla \cdot \mathbf{E})(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

zwischen dem skalaren Potential Φ und der Ladungsdichte ρ impliziert.

Die Darstellung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} mit Hilfe der elektromagnetischen Potentiale (\mathbf{A}, Φ) wird z. B. bei der Behandlung der Relativitätstheorie im nächsten Kapitel sehr wichtig werden.

1.5 Sind die Maxwell-Gleichungen Galilei-invariant?

Bei der Behandlung der Lorentz-Kraft in Abschnitt [4.2] des Theorie-1-Skripts konnten wir feststellen, dass die Lorentz'sche Bewegungsgleichung invariant ist unter allgemeinen Galilei-Transformationen der Form

$$\mathbf{x}' = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{v}_\alpha t - \boldsymbol{\xi}_\alpha) \quad , \quad t' = t - \tau \quad ,$$

falls die elektrischen und magnetischen Felder gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') &= \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \\ \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t') &= R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

mittransformiert werden. Hier untersuchen wir, ob die Maxwell-Gleichungen mit diesem Transformationsverhalten verträglich sind.

Wir betrachten zuerst die *homogenen* Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$. Der Nabla-Operator ∇ wird bei einer Galilei-Transformation $\mathbf{x} = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}' + \mathbf{v}_\alpha(t' + \tau) + \boldsymbol{\xi}_\alpha$ wie folgt transformiert:

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sigma [R(\boldsymbol{\alpha})]_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sigma [R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}]_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

d. h.

$$\nabla' = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \nabla \quad .$$

Außerdem gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \quad .$$

Es folgt

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = [\sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \nabla] \cdot [R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \mathbf{B}] = \sigma \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
\nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} &= [\sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \nabla] \times \left\{ \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \right\} \\
&\quad + R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t'} \\
&= R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \left\{ \nabla \times [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{B} \right\} \\
&= R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \left[\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei

$$\nabla \times (\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v}_\alpha - (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{B} = -(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

verwendet wurde. Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind also durchaus mit der Galilei-Invarianz verträglich.

Betrachten wir nun die *inhomogenen* Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$ und $\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$. Das Transformationsverhalten der Inhomogenitäten ρ und \mathbf{j} folgt aus ihren Definitionen

$$\rho \equiv \sum_i q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad , \quad \mathbf{j} \equiv \sum_i q_i \dot{\mathbf{x}}_i(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$$

und der Rechenregel $\delta(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) = \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|} \delta(\mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})$, d. h. insbesondere

$$\delta(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) = \delta(\sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad ,$$

als

$$\rho'(\mathbf{x}', t') = \sum_i q_i \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_i(t')) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) = \rho(\mathbf{x}, t)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}'(\mathbf{x}', t') &= \sum_i q_i \dot{\mathbf{x}}'_i(t') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_i(t')) \\
&= \sum_i q_i \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} [\dot{\mathbf{x}}_i(t) - \mathbf{v}_\alpha] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \\
&= \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \left[\sum_i q_i \dot{\mathbf{x}}_i(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{v}_\alpha \sum_i q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \right] \\
&= \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} [\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}_\alpha \rho(\mathbf{x}, t)] \quad .
\end{aligned}$$

Kurz gefasst gilt also:

$$\rho' = \rho \quad , \quad \mathbf{j}' = \sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} (\mathbf{j} - \mathbf{v}_\alpha \rho) \quad . \quad (1.24)$$

Für den Spezialfall einer orthogonalen Transformation ($\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\xi}_\alpha = \mathbf{0}$) folgt aus diesem Ergebnis, dass die Ladungs- und Stromdichten wie ein *Skalar* bzw. wie ein *echter Vektor* transformiert werden. Die transformierten Ladungs- und

Stromdichten erfüllen auch im neuen Inertialsystem eine Kontinuitätsgleichung der Form

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \mathbf{j}' &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \right) \rho + [\sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \nabla] \cdot [\sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} (\mathbf{j} - \mathbf{v}_\alpha \rho)] \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot (\nabla \rho) + \nabla \cdot \mathbf{j} - \mathbf{v}_\alpha \cdot (\nabla \rho) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad .\end{aligned}$$

Wir stellen somit fest, dass die Konzepte der Ladungs- und Stromdichten *an sich* mit der Galilei-Invarianz der Theorie verträglich sind. Die Unverträglichkeit der Maxwell-Theorie insgesamt mit der Galilei-Invarianz wird erst ersichtlich, wenn man das Transformationsverhalten (1.23) der Felder und (1.24) der Ladungs- und Stromdichten mit den inhomogenen Maxwell-Gleichungen kombiniert. Es folgt nämlich:

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \mathbf{E}' &= [\sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \nabla] \cdot [\sigma R(\boldsymbol{\alpha})^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B})] \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{v}_\alpha \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho - \mathbf{v}_\alpha \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \neq \frac{1}{\varepsilon_0} \rho'\end{aligned}$$

und analog:

$$\begin{aligned}\nabla' \times \mathbf{B}' - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} &= (\sigma R^{-1} \nabla) \times (R^{-1} \mathbf{B}) \\ &\quad - \varepsilon_0 \mu_0 \sigma R^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \right) (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \\ &= \sigma R^{-1} \left[\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \right) (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \right] \\ &= \sigma R^{-1} \left\{ \mu_0 \mathbf{j} - \varepsilon_0 \mu_0 \left[\mathbf{v}_\alpha \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) (\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \right] \right\} \quad ,\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}\nabla' \times \mathbf{B}' - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} &= \mu_0 \mathbf{j}' + \varepsilon_0 \mu_0 \sigma R^{-1} \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{v}_\alpha \rho + \mathbf{v}_\alpha \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{E} - (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) (\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \right] \\ &\neq \mu_0 \mathbf{j}' \quad ,\end{aligned}$$

wobei man den letzten Schritt noch am einfachsten dadurch nachweist, dass das rechte Glied nur einen einzigen Term von Ordnung $|\mathbf{v}_\alpha|^2$ enthält, der im Allgemeinen ungleich Null ist und nicht durch andere Terme kompensiert werden kann.

Die fehlende Galilei-Invarianz der Maxwell-Theorie zeigt, dass die Newton'sche Dynamik der Teilchen und die Maxwell'sche Beschreibung der Felder nicht kompatibel sind, da sie durch unterschiedliche Symmetrien gekennzeichnet werden. Die kombinierte Theorie von Teilchen *und* Feldern hätte eine beobachterabhängige Struktur und wäre somit physikalisch unakzeptabel. Heutzutage

wissen wir, dass die Newton'sche Mechanik nur approximativ korrekt ist (nämlich für $\frac{|\mathbf{x}|}{c} \ll 1$) und dass man für eine einheitliche Theorie von Teilchen und Feldern einen relativistischen Formalismus benötigt, in dem die Lichtgeschwindigkeit (d. h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Signale) eine zentrale Rolle spielt. Im nächsten Kapitel werden wir uns daher mit einigen einführenden Überlegungen zur Relativitätstheorie auseinandersetzen und einige wichtige Anwendungen der relativistischen Mechanik diskutieren.

Kapitel 2

Spezielle Relativitätstheorie

Die Struktur der speziellen Relativitätstheorie ist derjenigen der nicht-relativistischen Klassischen Mechanik sehr ähnlich: In beiden Fällen beschreibt man die Dynamik von Körpern mit Hilfe einer (nicht-gekrümmten) vierdimensionalen Raum-Zeit. In beiden Fällen ist es sehr hilfreich, sich bei der Beschreibung dieser Dynamik zunächst auf *Punktteilchen* zu konzentrieren. In beiden Fällen gilt das *Relativitätsprinzip*, das die Existenz von *Inertialsystemen* postuliert. Genau wie in der nicht-relativistischen Mechanik sind Inertialsysteme auch in der Relativitätstheorie durch die zwei Eigenschaften charakterisiert, dass alle physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen zu jedem Zeitpunkt gleich sind und dass alle Koordinatensysteme, die sich relativ zu einem Inertialsystem in geradlinig-gleichförmiger Bewegung befinden, selbst ebenfalls Inertialsysteme sind. Die Äquivalenz aller Inertialsysteme impliziert insbesondere auch die Homogenität und die Isotropie des Raums und der Zeit. Schließlich gilt sowohl für die Relativitätstheorie als auch für die nicht-relativistische Klassische Mechanik das *deterministische Prinzip*, das besagt, dass die auf ein Teilchen einwirkenden Kräfte nur vom Ortsvektor und von der Geschwindigkeit dieses Teilchens sowie von der Zeit abhängig sein können.

Neben diesen Gemeinsamkeiten, von denen das Relativitätspostulat besonders wichtig ist, gibt es zwischen der relativistischen (R) und der nicht-relativistischen (NR) Mechanik auch einen wesentlichen Unterschied, der durch ein zweites Postulat zum Ausdruck gebracht wird:

(R): Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in allen Inertialsystemen denselben Wert $c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{m/s}$.

(NR): Die Lichtgeschwindigkeit ist effektiv unendlich groß im Vergleich zu allen anderen in der Theorie auftretenden Geschwindigkeiten.

Das zweite Postulat bedeutet physikalisch, dass die Wechselwirkung zwischen Teilchen (z. B. durch Austausch von Strahlungsenergie oder Einwirkung von elektromagnetischen Kräften) in der nicht-relativistischen Theorie *instantan* erfolgt, während die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Wechselwirkung in der relativistischen Theorie eine endliche universelle Konstante (gültig in jedem Inertialsystem) ist. Das zweite Postulat der NR-Mechanik kann auch in der folgenden Weise formuliert werden:

(NR): Die Zeit und der Abstand zweier gleichzeitiger Ereignisse sind in der nicht-relativistischen klassischen Mechanik *absolute* (d. h. beobachterunabhängige) Größen.

Mathematisch bedeutet das zweite Postulat, dass die Newton'sche nicht-relativistische Mechanik kovariant unter Galilei-Transformationen und die Einstein'sche relativistische Mechanik kovariant unter Lorentz-Transformationen ist. Das relativistische Pendant der *absoluten* Größen „Zeit“ und „Abstand“ in der Newton'schen Mechanik ist der beobachterunabhängige „*infinitesimale Abstand*“ $ds = [c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2]^{1/2}$ infinitesimal benachbarter Ereignisse, der somit eine der zentralen Größen der Relativitätstheorie darstellt.

Eine Bemerkung noch zum *Anwendungsbereich* der speziellen Relativitätstheorie: Die nicht-relativistische Klassische Mechanik beschreibt die Dynamik physikalischer Objekte unter der Einwirkung von Kräften, die mikroskopisch auf Gravitationswechselwirkung oder elektromagnetische Wechselwirkung zurückgeführt werden können. Da die spezielle Relativitätstheorie Gravitationskräfte bekanntlich nicht beschreiben kann (hierfür benötigt man die allgemeine Relativitätstheorie), bleiben als ihr Anwendungsbereich nur *elektromagnetische Kräfte* übrig. Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie beschreibt man also typischerweise die Dynamik elektromagnetischer Felder bei vorgegebenen Ladungen und Strömen oder die Dynamik von Ladungen und Strömen bei vorgegebenen elektromagnetischen Feldern. Die zentralen Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie sind daher die Maxwell-Gleichungen und die Lorentz'sche Bewegungsgleichung. Da diese beiden Pfeiler der Elektrodynamik *Teilsysteme* beschreiben und das Relativitätsprinzip für Teilsysteme - wie wir wissen - nur dann Sinn macht, wenn zusätzlich angegeben wird, wie die „Außenwelt“ mittransformiert wird, ist klar, dass die Bestimmung des Transformationsverhaltens von Ladungen, Strömen und Feldern unter Lorentz-Transformationen im Folgenden von großer Bedeutung sein wird.

Etliche Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie waren bereits vor Einsteins Arbeit (1905) bekannt. Erwähnt seien insbesondere die Lorentz-Transformation in linearer (Lorentz, 1895) und in beliebiger Ordnung (Larmor, 1898; Lorentz 1899; Poincaré, 1905), die Lorentz- (oder Fitzgerald-Lorentz-)Kontraktion (Fitzgerald, 1889; Lorentz, 1892), die Lorentz-Kraft (Lorentz, 1895), die Gruppenstruktur der Lorentz-Transformationen, das Relativitätsprinzip, die Invarianz der Eigenzeit und das Additionsgesetz für Geschwindigkeiten (Poincaré, 1905). Das Großartige von Einsteins Beitrag (1905) ist die Reduktion der Theorie auf zwei Postulate und die Herleitung von alten und auch neuen Ergebnissen aus diesen Postulaten.¹ Interessant ist noch, dass neben Lorentz' Arbeit (1895) das Fizeau'sche Experiment (1851) und die Aberration von Sternenlicht (Bradley, 1729) Einsteins Denken beeinflusst haben, das oft zitierte Michelson-Morley-Experiment jedoch kaum. Für mehr Details sei auf die ausgezeichnete Einstein-Biografie „Subtle is the Lord“ von Abraham Pais (Oxford University Press, 1982) verwiesen.

¹Neu sind z. B. der transversale Doppler-Effekt, die Fresnel-Formel $c' = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ und das sogenannte „Zwillingsparadoxon“.

2.1 Erste Konsequenzen der Postulate

Eine sofortige Konsequenz aus den Postulaten der speziellen Relativitätstheorie ist, dass die Zeit (anders als in der Newton'schen Mechanik) keine absolute Größe ist. Betrachten wir nämlich zwei Bezugssysteme K' und K , wobei K' die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$ relativ zu K hat, und nehmen wir an, dass in K' entlang der $\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{v}}$ -Achse ein Sender S und (in gleichem Abstand von S) zwei Empfänger E_1 und E_2 ruhen (siehe Abbildung 2.1). Zur Zeit $t = 0$ sendet S zwei Lichtsignale aus, eins zu E_1 und eins zu E_2 . Beide Empfänger werden ihre Signale (wegen der Isotropie des Raums) in K' gleichzeitig erhalten. Für einen Beobachter in K jedoch wird der Empfänger E_1 sein Signal *zuerst* erhalten, da E_1 sich auf das Licht, das sich auch in K mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, zubewegt. Ereignisse, die also gleichzeitig sind in K' , müssen nicht gleichzeitig sein in K , und Zeitintervalle, die gleich sind in K' , sind im Allgemeinen ungleich in K .

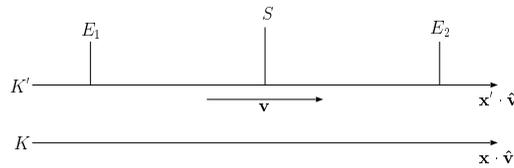


Abbildung 2.1: Gleichzeitigkeit von Ereignissen in zwei Inertialsystemen

Betrachten wir das Transformationsverhalten von Längen im Ortsraum und von Zeitintervallen etwas genauer. Abstände *senkrecht* zur Geschwindigkeitsrichtung werden in beiden Systemen K und K' als gleich groß empfunden. Nehmen wir z. B. an, im Ursprung $\mathbf{0}$ von K und im Ursprung $\mathbf{0}'$ von K' stehen zwei parallel zueinander (und senkrecht zur $\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{v}}$ -Achse) ausgerichteten Latten, beide mit einer Länge ℓ in ihrem Ruhesystem und beide mit einer Kreissäge an ihrem oberen Ende (siehe Abbildung 6.2). Wir nehmen des Weiteren an, dass $\mathbf{0}$ und $\mathbf{0}'$ für $t = t' = 0$ zusammenfallen. Nun kann L' aus der Sicht eines Beobachters im System K nicht *kürzer* als L selbst sein, da sonst (im Widerspruch zum Relativitätsprinzip) L durchgesägt wird und L' unversehrt bleibt. Umgekehrt kann L' aus der Sicht des Beobachters in K auch nicht *länger* sein. Also sind beide (aus der Sicht von Beobachtern in K oder K') gleich lang.

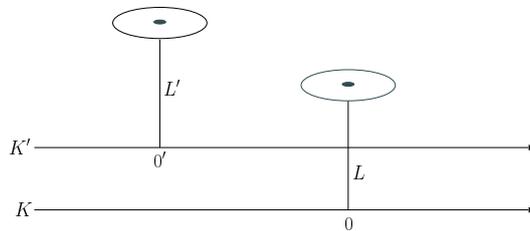


Abbildung 2.2: Invarianz einer Länge senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung

Befestigen wir nun statt der Kreissäge jeweils zwei Spiegel an den beiden

Latten, einen am oberen und einen am unteren Ende, und senden wir einen Lichtstrahl hin und her zwischen beiden Spiegeln (siehe Abbildung 6.3). Wir haben in dieser Weise zwei identische Uhren konstruiert, die in ihrem jeweiligen Ruhesystem durch die Periode $T = 2\ell/c$ charakterisiert werden. Berechnen wir nun die Periode T' der bewegten Uhr in K' aus der Sicht eines Beobachters in K . In einer Periode legt der Lichtstrahl in der an L' befestigten Uhr – wie in Abbildung 6.4 dargestellt – aus der Sicht des Beobachters in K einen Weg $2\sqrt{\ell^2 + \left(\frac{1}{2}vT'\right)^2}$ zurück. Da das Licht in K aufgrund des zweiten Postulats die Geschwindigkeit c hat, muss

$$T' = \frac{2}{c} \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{1}{2}vT'\right)^2}$$

d. h.

$$T' = \frac{2\ell/c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma T$$

gelten. Aus der Sicht des Beobachters in K dauert die Periode einer bewegten Uhr also *länger* als diejenige einer identischen Uhr in K , laufen bewegte Uhren demnach generell langsamer. Diese Konsequenz der Postulate der Relativitätstheorie wird als *Zeitdilatation* bezeichnet.

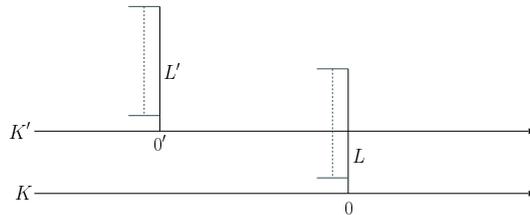


Abbildung 2.3: Zwei identische Uhren in den Inertialsystemen K und K'

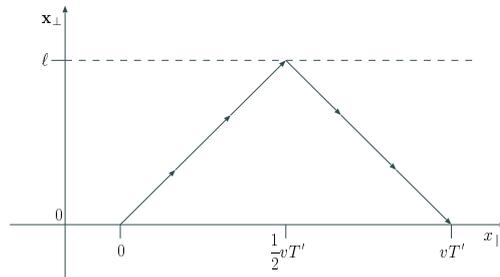


Abbildung 2.4: Berechnung der Periode einer sich relativ zum Beobachter mit der Geschwindigkeit v bewegendes Uhr

Kippen wir nun die Uhr in K' , so dass die Latte L' in Geschwindigkeitsrichtung zeigt (siehe Abbildung 6.5). Die Länge und die Periode der Uhr in K' sind

nach wie vor ℓ bzw. T , und die Periode aus der Sicht eines Beobachters in K ist T' . Bestimmen wir nun die Länge ℓ' der bewegten Uhr in K' aus der Sicht des Beobachters in K . Diese Uhr bewegt sich (aus der Sicht von K) mit einer Geschwindigkeit v nach rechts. Nehmen wir an, dass ein Lichtstrahl eine Zeit t'_{LR} bzw. t'_{RL} benötigt, um sich von links nach rechts oder rechts nach links zu bewegen. Aus der Sicht von K gilt:

$$t'_{\text{LR}} = \frac{\ell' + vt'_{\text{LR}}}{c} \quad , \quad t'_{\text{RL}} = \frac{\ell' - vt'_{\text{RL}}}{c}$$

d. h.

$$t'_{\text{LR}} = \frac{\ell'/c}{1 - \beta} \quad , \quad t'_{\text{RL}} = \frac{\ell'/c}{1 + \beta}$$

und daher

$$\gamma T = T' = t'_{\text{LR}} + t'_{\text{RL}} = \frac{\ell'}{c} \left(\frac{1}{1 - \beta} + \frac{1}{1 + \beta} \right) = \frac{2\ell'/c}{1 - \beta^2} = \frac{2\gamma^2 \ell'}{c} .$$

Es folgt also:

$$\ell' = \frac{Tc}{2\gamma} = \frac{\ell}{\gamma} ,$$

so dass die Länge eines bewegten Körpers in der Geschwindigkeitsrichtung *verkürzt* ist (im Vergleich zur Ruhelänge). Diese Konsequenz der Relativitätstheorie wird *Lorentz-* (oder *Fitzgerald-Lorentz-*)*Kontraktion* genannt.

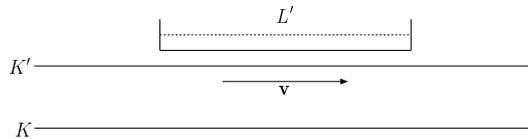


Abbildung 2.5: Zur Lorentz- bzw. Längenkontraktion

2.2 Der Abstand und die Eigenzeit

In der Einführung wurde bereits darauf hingewiesen, dass die nicht-relativistischen absoluten Größen „Zeit“ und „Abstand“ in der Relativitätstheorie durch den beobachterunabhängigen „infinitesimalen Abstand“ ersetzt werden. Der infinitesimale Abstand ist in der Relativitätstheorie von zentraler Bedeutung, da seine Invarianz unter Koordinatentransformationen zwischen Inertialsystemen zeigt, dass die physikalischen Gesetze Lorentz-kovariant sind. Im Folgenden führen wir die Begriffe „Abstand“ und „Eigenzeit“ ein und leiten ein Theorem (Einstein, 1905) über die Eigenzeit bewegter Bezugssysteme ab.

Betrachten wir die Emission eines Lichtsignals am Ort \mathbf{x}_1 zur Zeit t_1 im Bezugssystem K und seine Absorption am Ort \mathbf{x}_2 zur späteren Zeit t_2 , ebenfalls in K . Da das Signal sich in K gemäß dem zweiten Postulat mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, gilt offensichtlich

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 = 0 .$$

Seien die entsprechenden Koordinaten im Inertialsystem K' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$ durch (\mathbf{x}'_1, t'_1) und (\mathbf{x}'_2, t'_2) gegeben, dann gilt analog:

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1)^2 = 0 ,$$

da das Lichtsignal in K' nach dem zweiten Postulat ebenfalls die Geschwindigkeit c hat. Die Größe

$$s \equiv [c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

wird als *Abstand* zwischen den Ereignissen bei (\mathbf{x}_1, t_1) und (\mathbf{x}_2, t_2) bezeichnet. Das obige Argument zeigt, dass die Aussage $s = 0$ in *allen* Inertialsystemen gilt, falls sie in irgendeinem Inertialsystem zutrifft. Der Abstand infinitesimal benachbarter Ereignisse (\mathbf{x}, t) und $(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t + dt)$ in K ist durch

$$ds = \sqrt{c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2} \quad (2.1)$$

gegeben. Analog gilt in einem beliebigen Inertialsystem K' für den Abstand infinitesimal benachbarter Ereignisse: $ds' = \sqrt{c^2(dt')^2 - (d\mathbf{x}')^2}$, und wiederum impliziert $ds = 0$ in K die Identität $ds' = 0$ für alle K' . Das negative Vorzeichen von $(d\mathbf{x})^2$ in (2.1) zeigt, dass der Abstand hier nicht gemäß der euklidischen, sondern nach einer (von Hermann Minkowski eingeführten) pseudo-euklidischen Geometrie definiert wird. Der Abstand infinitesimal benachbarter Ereignisse ds wird alternativ auch als *Linienelement* oder als *differentielles (Raum-Zeit-)Intervall* bezeichnet. Es ist übrigens zu beachten, dass die infinitesimale Größe ds kein exaktes Differential darstellt, so dass die Auswertung von Integralen der Form $\oint ds$ entlang einer geschlossenen Schleife im Allgemeinen nicht Null ergibt.

Die Invarianz der Aussage $ds = 0$ unter Koordinatentransformationen, d. h. die Äquivalenz der Aussagen $ds = 0$ im Inertialsystem K und $ds' = 0$ in K' , hat weitreichende Konsequenzen. Um dies zu sehen, versuchen wir, diese Gleichungen geometrisch zu interpretieren. Mit den Notationen $\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \mathbf{u}$ und $\frac{\mathbf{u}}{c} \equiv \boldsymbol{\beta}_u$ gilt in K :

$$0 = (ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 = c^2(dt)^2(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}) = c^2(dt)^2(1 - \boldsymbol{\beta}_u^2) \quad .$$

Die geometrische Interpretation von $ds = 0$ in K ist daher, dass der dimensionslose Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\beta}_u$ auf einer Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $\mathbf{0}$ liegt, so dass $|\mathbf{u}| = c$ gilt. Da die Gleichung $ds = 0$ die Ausbreitung von Lichtsignalen beschreibt, kann dieses Ergebnis nicht erstaunen. Wir betrachten nun die Interpretation von $ds' = 0$ in K' : Hierzu nehmen wir an, dass die Orts- und Zeitkoordinaten (\mathbf{x}', t') in K' gemäß $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x}, t; \mathbf{v})$ und $t' = t'(\mathbf{x}, t; \mathbf{v})$ mit den Koordinaten (\mathbf{x}, t) in K verknüpft sind. In diesem Fall gilt die lineare Beziehung

$$\begin{pmatrix} c dt' \\ d\mathbf{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c dt \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix} \quad , \quad \Lambda(\mathbf{x}, t; \mathbf{v}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial t'}{\partial t} & c \left(\frac{\partial t'}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei die Matrix Λ offensichtlich *reell* ist.² Die Gleichung

$$0 = (ds')^2 = c^2(dt')^2 - (d\mathbf{x}')^2$$

²Die Transformationsmatrix Λ , die $(c dt, d\mathbf{x})$ in K mit $(c dt', d\mathbf{x}')$ in K' verknüpft, wird als *Lorentz-Transformation* bezeichnet. Wir werden später sehen, dass $\Lambda(\mathbf{x}, t; \mathbf{v})$ zwar explizit von \mathbf{v} abhängt, aber unabhängig von (\mathbf{x}, t) ist.

in K' kann daher in der Form

$$0 = \begin{pmatrix} c dt' \\ d\mathbf{x}' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt' \\ d\mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c dt \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} c dt \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix} = c^2 (dt)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta}_u \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta}_u \end{pmatrix}$$

mit

$$B(\mathbf{x}, t; \mathbf{v}) \equiv \tilde{\Lambda} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \Lambda \quad (2.2)$$

geschrieben werden, wobei die Matrix B reell und symmetrisch ist. Diese Gleichung für $\boldsymbol{\beta}_u$ in K' stellt nur dann eine Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $\mathbf{0}$ dar, wenn die Matrix B die Form

$$B = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}, t; \mathbf{v}) \quad (2.3)$$

hat, wobei ε reellwertig (mit $\varepsilon \neq 0$) ist. Es folgt:

$$(ds')^2 = \frac{1}{\varepsilon} c^2 (dt)^2 (1 - \boldsymbol{\beta}_u^2) = \frac{1}{\varepsilon} (ds)^2$$

und daher:

$$\left(\frac{ds}{ds'} \right)^2 = \varepsilon(\mathbf{x}, t; \mathbf{v}) \quad .$$

Hierbei kann ε jedoch wegen der Homogenität des Raums und der Zeit nicht von (\mathbf{x}, t) oder (\mathbf{x}', t') und wegen der Isotropie des Raums nicht von $\hat{\mathbf{v}}$ abhängen. Somit ist nur eine Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsbetrag v möglich:

$$(ds)^2 = \varepsilon(v) (ds')^2 \quad .$$

Betrachten wir nun umgekehrt eine Koordinatentransformation vom Inertialsystem K' zum Inertialsystem K , so dass $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K, K') = -\mathbf{v}$ gilt, dann erhält man analog

$$(ds')^2 = \varepsilon(v) (ds)^2 \quad .$$

Kombination der beiden Transformationen liefert

$$(ds)^2 = \varepsilon(v) (ds')^2 = [\varepsilon(v)]^2 (ds)^2 \quad \text{bzw.} \quad [\varepsilon(v)]^2 = 1 \quad .$$

Wegen $\varepsilon(0) = 1$ und der Kontinuität von $\varepsilon(v)$ als Funktion der Relativgeschwindigkeit v kommt nur die Wurzel $\varepsilon(v) = \varepsilon(0) = 1$ in Betracht. Wir erhalten somit:

$$(ds)^2 = (ds')^2 \quad (2.4)$$

und nach einer Integration auch: $s = s'$. Der Abstand ist also *invariant* unter Koordinatentransformation von einem Inertialsystem in ein anderes:

$$(s_{21})^2 = c^2 (t_{21})^2 - (\mathbf{x}_{21})^2 = c^2 (t'_{21})^2 - (\mathbf{x}'_{21})^2 = (s'_{21})^2 \quad , \quad (2.5)$$

wobei $t_{21} \equiv t_2 - t_1$ definiert wurde, usw. Durch Einsetzen des Ergebnisses $\varepsilon = 1$ in (2.2) und (2.3) können wir außerdem schließen, dass die Lorentz-Transformation Λ die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \Lambda \quad (2.6)$$

erfüllen muss. Diese Konsistenzgleichung schränkt die mögliche Form der Transformationsmatrix Λ stark ein.

Aus (2.5) wird klar, dass man nur dann zu zwei Ereignissen im System K ein anderes Bezugssystem K' finden kann, in dem diese Ereignisse *am selben Ort* auftreten ($\mathbf{x}'_{21} = \mathbf{0}$), wenn

$$(s_{21})^2 = c^2(t'_{21})^2 > 0$$

ist. Man bezeichnet reelle Abstände, $(s_{21})^2 > 0$, als *zeitartig*. Analog kann man nur dann zu zwei Ereignissen in K ein Bezugssystem K' finden, in dem diese Ereignisse gleichzeitig auftreten ($t'_{21} = 0$), falls

$$(s_{21})^2 = -(\mathbf{x}'_{21})^2 < 0$$

gilt. Imaginäre Abstände, $(s_{21})^2 < 0$, heißen *raumartig*. Nullabstände, $(s_{21})^2 = 0$, werden als *lichtartig* bezeichnet. Diese Einteilung ist invariant unter Koordinatentransformationen und daher *absolut*. Sie wird häufig mit Hilfe eines einfachen „Weltbilds“ (oder auch „Minkowski-Diagramm“) dargestellt. Neben dem Lichtkegel $(s_{21})^2 = 0$, der lichtartige Abstände zwischen Ereignissen repräsentiert, unterscheidet man die absolute Zukunft, $(s_{21})^2 > 0$ mit $t_{21} > 0$, die absolute Vergangenheit, $(s_{21})^2 > 0$ mit $t_{21} < 0$, und das absolut Entfernte, $(s_{21})^2 < 0$. Eine kausale Beziehung zwischen zwei Ereignissen ist nur dann möglich, wenn ihr Abstand zeit- oder eventuell lichtartig ist, d. h. wenn $(s_{21})^2 \geq 0$ gilt.

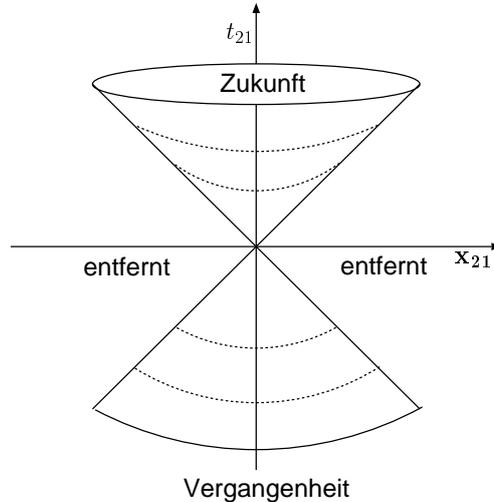


Abbildung 2.6: Weltbild mit Lichtkegel

Mit dem invarianten infinitesimalen Abstand ds ist offensichtlich eine invariante infinitesimale Zeit $d\tau$ verknüpft:

$$d\tau \equiv \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} dt = \sqrt{1 - \beta_u^2} dt = \frac{dt}{\gamma_u}. \quad (2.7)$$

Diese Gleichung besagt, dass in einem bewegten Bezugssystem (z. B. für ein Teilchen), das sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u}(t)$ relativ zum Inertialsystem K

bewegt, die Zeit $d\tau = \frac{dt}{\gamma_u}$ vergeht, wenn die unbewegte Uhr in K die Zeitdauer dt anzeigt. Nur wenn das bewegte Bezugssystem und das Inertialsystem K *identisch* sind, so dass ihre Relativgeschwindigkeit verschwindet: $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, gilt $d\tau = dt$; aus diesem Grund wird τ als die „Eigenzeit“ des bewegten Bezugssystems bezeichnet. Integration von (2.7) liefert:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \beta_u(t)^2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{\gamma_u(t)}. \quad (2.8)$$

Man sieht wiederum, dass bewegte Uhren langsamer laufen als ruhende. Wenn also zwei Uhren U_1 und U_2 anfangs im Inertialsystem K zusammen sind, U_1 auch weiterhin in K verbleibt und U_2 sich entlang einer geschlossenen Schleife bewegt, so dass beide Uhren schließlich wieder zusammen sind, dann ist U_2 aufgrund von (2.7) und (2.8) im Vergleich zu U_1 zurückgeblieben. Dieses Resultat geht auf Einstein (1905) zurück, der es als „Theorem“ bezeichnete. Die Fehlbezeichnung Uhren- oder Zwillingparadoxon ist jüngeren Datums (Langevin, 1911).

2.3 4-Schreibweise und Lorentz-Transformationen

Aufgrund der fundamentalen Bedeutung des invarianten Abstands infinitesimal benachbarter Ereignisse:

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 = \begin{pmatrix} d(ct) \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(ct) \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(ct) \\ d(-\mathbf{x}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d(ct) \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

ist klar, dass es vorteilhaft ist, einen *kontravarianten* 4-Vektor

$$x^\mu \equiv (ct, \mathbf{x}) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3),$$

den *metrischen Tensor*

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

und den mit x^μ assoziierten *kovarianten* 4-Vektor

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu}x^\nu = (ct, -\mathbf{x})$$

einzuführen.³ Generell kann man den metrischen Tensor dazu verwenden, Indizes herunter- oder heraufzuziehen. Es gilt z. B.:

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = g_\mu{}^\rho \equiv \delta_\mu{}^\rho \quad , \quad g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = g^\mu{}_\rho = \delta^\mu{}_\rho,$$

wobei $\delta_\mu{}^\rho$ oder $\delta^\mu{}_\rho$ das übliche Kronecker- δ bezeichnet. Hierbei wird implizit über zweimal (einmal unten und einmal oben) auftretende Indizes summiert (Einstein-Konvention). Wir führen die ko- bzw. kontravarianten Ableitungen

³Hierbei sollte man den Namen „kontravariant“ und „kovariant“ nicht zu viel Gewicht beimessen: In seiner „Theory of Relativity“ plädiert Pauli dafür, diese Bezeichnungen zu vertauschen, bzw. sie durch die älteren Namen „kogradient“ und „kontragradient“ zu ersetzen. Wie man sieht: That which we call a rose by any other name would smell as sweet.

nach den Raum-Zeit-Koordinaten wie folgt ein:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad ; \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} .$$

Der d'Alembert-Operator \square kann dementsprechend als Skalarprodukt $\partial_\mu \partial^\mu$ geschrieben werden:

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu .$$

Das Quadrat der infinitesimalen Eigenzeit bzw. des Raum-Zeit-Intervalls ds ist ebenfalls als Skalarprodukt darstellbar:

$$c^2(d\tau)^2 = (ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu .$$

Die linearen Transformationen des 4-Vektors x^μ , die die Eigenzeit $d\tau$ invariant lassen, werden als *Poincaré-Transformationen* oder als inhomogene Lorentz-Transformationen bezeichnet:

$$x^\mu \rightarrow (x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu . \quad (2.9)$$

Hierbei gilt $\Lambda^T g \Lambda = g$, denn die Invarianz der Eigenzeit erfordert:

$$c^2(d\tau)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} d(x')^\mu d(x')^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma dx^\rho dx^\sigma$$

d. h. $g_{\rho\sigma} = (\Lambda^T)^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma$ oder kurz: $g = \Lambda^T g \Lambda$. Die Inverse der Lorentz-Transformation folgt als $\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g$, oder explizit:

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = (g \Lambda^T g)^\mu_\nu = g^\mu_\rho (\Lambda^T)^\rho_\sigma g^\sigma_\nu = (\Lambda^T)^\mu_\nu = \Lambda_\nu^\mu .$$

Hierbei ist zu beachten, dass die transponierte Lorentz-Transformation $(\Lambda^T)^\mu_\nu \equiv \Lambda_\nu^\mu = g_{\nu\rho} g^{\mu\sigma} \Lambda^\rho_\sigma$ nicht (wie im Falle einer dreidimensionalen Drehung) der gespiegelten Matrix $(\tilde{\Lambda})^\mu_\nu \equiv \Lambda^\nu_\mu$ entspricht; die gemischt räumlich-zeitlichen Matrixelemente erhalten ein zusätzliches Minuszeichen. Aufgrund der Identität

$$g_{\mu\nu} = (\Lambda^T g \Lambda)_{\mu\nu} = (\Lambda^T)^\rho_\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu = \Lambda^\rho_\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu = (\tilde{\Lambda})^\mu_\rho g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu$$

ist klar, dass die Bestimmungsgleichung $g = \Lambda^T g \Lambda$ für Lorentz-Transformationen in 4-Schreibweise genau dem Resultat (2.6) in konventioneller Matrixnotation entspricht.

2.3.1 Poincaré- und Lorentz-Transformationen

Poincaré-Transformationen bestehen - wie gesagt - aus einem homogenen Anteil, der als Lorentz-Transformation Λ bezeichnet wird, und einem inhomogenen Anteil (d.h. einer Translation). Die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen $\{\Lambda | \Lambda^T g \Lambda = g\}$ bildet eine Gruppe, die *Lorentz-Gruppe* \mathcal{L} . Die Gruppenstruktur der Lorentz-Gruppe folgt direkt aus der Relation $\Lambda^T g \Lambda = g$, denn wenn Λ_1 und Λ_2 zur Lorentz-Gruppe gehören, gilt dasselbe für das Produkt $\Lambda_1 \Lambda_2$:

$$(\Lambda_2^T \Lambda_1^T) g (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T (\Lambda_1^T g \Lambda_1) \Lambda_2 = \Lambda_2^T g \Lambda_2 = g .$$

Außerdem folgt aus $\Lambda^T g \Lambda = g$, dass $[\det(\Lambda)]^2 = 1$ und daher $\det(\Lambda) = \pm 1$ gilt. Innerhalb der Lorentz-Gruppe \mathcal{L} ist die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe \mathcal{L}_+^\uparrow , deren Elemente die Bedingungen $\Lambda^0_0 \geq 1$ und $\det(\Lambda) = 1$ erfüllen, am wichtigsten. Zu dieser Untergruppe \mathcal{L}_+^\uparrow von \mathcal{L} gehören die gewöhnlichen Drehungen $\Lambda_R(\boldsymbol{\alpha})$ um eine feste Achse $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$:

$$\Lambda_R(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R(\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix}$$

mit

$$R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{x}) - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \times (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{x}) \cos(\alpha) + (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{x}) \sin(\alpha)$$

und die Geschwindigkeitstransformationen $\Lambda_B(\phi, \hat{\boldsymbol{\beta}})$ im Orts-Zeit-Raum, die auch als „boosts“, bezeichnet werden:

$$\Lambda_B(\phi, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} [\cosh(\phi) - 1] & -\sinh(\phi)\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \\ -\sinh(\phi)\hat{\boldsymbol{\beta}} & [\cosh(\phi) - 1]\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Hierbei hängen der Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ und der Parameter ϕ über die Beziehung $\mathbf{v} = c \tanh(\phi)\hat{\boldsymbol{\beta}}$ mit der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} der Bezugssysteme zusammen. Das Produkt $\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^T$ ist als Dyade aufzufassen. Im Falle der Geschwindigkeits-transformation lautet die Beziehung zwischen x' und x also explizit:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi)ct - \sinh(\phi)(\mathbf{x} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ -\sinh(\phi)ct\hat{\boldsymbol{\beta}} + [\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}] + \cosh(\phi)(\mathbf{x} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}.$$

Mit der Relation $\cosh(\phi) = [1 - \tanh^2(\phi)]^{-1/2} = [1 - \beta^2]^{-1/2} = \gamma$ folgt:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_\perp \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} ct - \beta x_\parallel \\ (x_\parallel - vt)\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}$$

wobei $x_\parallel \equiv \mathbf{x} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}$ die Projektion von \mathbf{x} auf die $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ -Richtung und $\mathbf{x}_\perp \equiv \mathbf{x} - x_\parallel \hat{\boldsymbol{\beta}}$ den senkrechten Anteil darstellt. Bei fester Geschwindigkeit v erhält man im Limes $c \rightarrow \infty$ offensichtlich die Galilei-Transformation zurück: $t' = t$, $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$.

Die Untergruppe \mathcal{L}_+^\uparrow der Lorentz-Gruppe ist eine kontinuierliche Gruppe (Lie-Gruppe) und hat dann auch die entsprechende Struktur: Aufgrund der expliziten Darstellung von Drehungen und Boosts, s. Gleichung (2.10), zeigt man leicht, dass mehrmalige Anwendung kleiner Drehungen eine große Drehung ergibt:

$$\Lambda_R(\boldsymbol{\alpha}) = \left[\Lambda_R \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{n} \right) \right]^n, \quad \Lambda_B(\phi, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \left[\Lambda_B \left(\frac{\phi}{n}, \hat{\boldsymbol{\beta}} \right) \right]^n \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2.11)$$

Da der Definitionsbereich von $\phi = \operatorname{artanh}(v/c)$ unbegrenzt ist, ist die Lorentz-Gruppe nicht kompakt. Außerdem folgt aus (2.10) und (2.11), dass man allgemeine eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformationen als

$$\Lambda = e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L} - \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{M}}, \quad \boldsymbol{\phi} \equiv \phi \hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad L_k = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \ell_k \end{pmatrix}, \quad M_k = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\mathbf{e}}_k^T \\ \hat{\mathbf{e}}_k & \emptyset_3 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

darstellen kann, wobei \emptyset_3 die 3×3 -Nullmatrix ist und $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ die Drehmatrizen sind:

$$\ell_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Erzeuger \mathbf{L} und \mathbf{M} der Lie-Gruppe \mathcal{L}_+^\uparrow erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k, \quad [M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k.$$

Aus der Darstellung (2.12) folgt sofort $\Lambda^\dagger \neq \Lambda^{-1}$, so dass die (nicht-kompakte!) Lie-Gruppe \mathcal{L}_+^\uparrow offensichtlich nicht-unitär ist.

2.4 Physikalische Konsequenzen der Lorentz-Invarianz

Wir haben oben festgestellt, dass das zweite Einstein'sche Postulat (in Kombination mit weiteren Annahmen über die Homogenität und Isotropie von Raum und Zeit) die Lorentz-Invarianz des Skalarprodukts

$$c^2(d\tau)^2 = (ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 = dx^\mu dx_\mu \tag{2.13}$$

bedingt. Umgekehrt impliziert die Invarianz dieses Skalarprodukts das zweite Postulat, also kann (2.13) als *die* zentrale Gleichung der Relativitätstheorie angesehen werden. Die Invarianz von (2.13) unter Lorentz-Transformationen bedeutet, dass *alle* physikalisch messbaren Größen entweder gemäß der Lorentz-Gruppe oder zumindest einer geeigneten Darstellung dieser Gruppe transformiert werden. Da Rotationen in der Relativitätstheorie meist unwesentlich sind, konzentrieren wir uns im Folgenden überwiegend auf Geschwindigkeitstransformationen, so dass die Koordinaten zweier Inertialsysteme K und K' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$, deren Ursprünge zur Zeit $t = t' = 0$ zusammenfallen, durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_\perp \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) \\ -\sinh(\phi)\hat{\boldsymbol{\beta}} & \cosh(\phi)\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_\parallel \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_\perp \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\boldsymbol{\beta} & \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_\parallel \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.14}$$

verknüpft sind. Da die \mathbf{x}_\perp -Komponenten invariant sind unter Lorentz-Transformationen, ist es oft sinnvoll, die zweidimensionale Darstellung

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_\parallel \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_\parallel \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

einzuführen. Explizit lautet (2.15):

$$\left| \begin{array}{l} t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x_\parallel) \\ x'_\parallel = \gamma(x_\parallel - vt) \end{array} \right. \quad \text{bzw.} \quad \left| \begin{array}{l} t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'_\parallel) \\ x_\parallel = \gamma(x'_\parallel + vt') \end{array} \right. . \tag{2.16}$$

Gleichung (2.14) zeigt, dass ein Maßstab, der im Inertialsystem K senkrecht zu $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ aufgestellt ist und dort die Länge ℓ hat, in K' genauso lang ist. Andererseits

hat ein Maßstab, parallel zu $\hat{\beta}$ in K , aus der Sicht von K' eine *kleinere* Länge: $\ell' < \ell$. Nehmen wir nämlich an, der Stab befinde sich in Ruhe zwischen $x_{\parallel}^{(1)}$ und $x_{\parallel}^{(2)}$, so dass $x_{\parallel}^{(2)} - x_{\parallel}^{(1)} = \ell$ gilt. Eine Messung der Länge des Stabs zur Zeit t' in K' ergibt dann:

$$\ell' = x_{\parallel}^{\prime(2)} - x_{\parallel}^{\prime(1)} = \left(\frac{1}{\gamma} x_{\parallel}^{(2)} - vt' \right) - \left(\frac{1}{\gamma} x_{\parallel}^{(1)} - vt' \right) = \frac{\ell}{\gamma}. \quad (2.17)$$

Dies ist die bereits bekannte Lorentz-Kontraktion. In der Herleitung geht also entscheidend ein, dass die Koordinaten $\mathbf{x}'^{(1)}$ und $\mathbf{x}'^{(2)}$ der Endpunkte bei dieser Längenmessung in K' *gleichzeitig* (zur selben Zeit t') bestimmt werden. Aus (2.17) folgt noch, dass das Volumen V eines beliebigen Körpers, der in K ruht, aus der Sicht von K' um einen Faktor $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2}$ kleiner ist, da es sich bei der Geschwindigkeitstransformation in der $\hat{\beta}$ -Richtung um diesen Faktor verringert.

Auch die Zeitdilatation lässt sich mit Hilfe der Lorentz-Transformation leicht nachweisen. Betrachten wir z. B. eine Uhr, die in K' ruht und anzeigt, dass zwischen zwei Ereignissen, die beide am Ort $(x'_{\parallel}, \mathbf{x}'_{\perp})$ in K' stattfanden, die Zeit $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ vergangen ist. Für einen Beobachter in K ist zwischen beiden Ereignissen sogar

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_{\parallel}) - \gamma(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_{\parallel}) = \gamma \Delta t'$$

vergangen, so dass er zum Schluss kommt, dass die Uhr in K' nachgeht: Bewegte Uhren laufen langsamer.

Lorentz-Transformationen sind im Allgemeinen nicht-kommutativ, und das Gleiche gilt für Geschwindigkeitstransformationen. Man überprüft zum Beispiel leicht, dass

$$\Lambda_{\mathbf{B}}(\phi_1, \hat{\mathbf{e}}_1) \Lambda_{\mathbf{B}}(\phi_2, \hat{\mathbf{e}}_2) \neq \Lambda_{\mathbf{B}}(\phi_2, \hat{\mathbf{e}}_2) \Lambda_{\mathbf{B}}(\phi_1, \hat{\mathbf{e}}_1)$$

gilt. Eine Ausnahme sind Boosts in derselben Richtung:

$$\Lambda_{\mathbf{B}}(\phi_2, \hat{\beta}) \Lambda_{\mathbf{B}}(\phi_1, \hat{\beta}) = \Lambda_{\mathbf{B}}(\phi_1 + \phi_2, \hat{\beta}),$$

denn Matrixmultiplikation zeigt:

$$\begin{pmatrix} \cosh(\phi_2) & -\sinh(\phi_2) \\ -\sinh(\phi_2) & \cosh(\phi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\phi_1) & -\sinh(\phi_1) \\ -\sinh(\phi_1) & \cosh(\phi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi_1 + \phi_2) & -\sinh(\phi_1 + \phi_2) \\ -\sinh(\phi_1 + \phi_2) & \cosh(\phi_1 + \phi_2) \end{pmatrix}.$$

Die entsprechenden Geschwindigkeiten β_1 , β_2 und β_{1+2} sind also durch

$$\begin{aligned} \beta_{1+2} &= \tanh(\phi_1 + \phi_2) = \tanh[\operatorname{artanh}(\beta_1) + \operatorname{artanh}(\beta_2)] \\ &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

miteinander verknüpft. Hiermit haben wir das Additionsgesetz für (parallel ausgerichtete) Geschwindigkeiten erhalten.

Wir betrachten - etwas allgemeiner und aus einem anderen Blickwinkel - zwei Inertialsysteme K und K' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$, deren Koordinaten durch eine Lorentz-Transformation verbunden sind:

$$\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}'_{\perp} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \hat{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x'_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Führen wir noch die Geschwindigkeiten

$$\mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad , \quad \mathbf{u}' \equiv \frac{d\mathbf{x}'}{dt'}$$

mit den Geschwindigkeitskomponenten $u_{\parallel} = \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}$ und $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - u_{\parallel} \hat{\boldsymbol{\beta}}$ und analog für \mathbf{u}' ein. Aus der ersten Zeile in (2.19) folgt:

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx'_{\parallel}}{dt'} \right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u'_{\parallel} \right)} ,$$

und die zweite Zeile impliziert:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{x}'_{\perp}}{dt'} + \gamma \left(\beta c + \frac{dx'_{\parallel}}{dt'} \right) \hat{\boldsymbol{\beta}} \right] \frac{dt'}{dt} = \frac{\mathbf{u}'_{\perp} + \gamma(v + u'_{\parallel}) \hat{\boldsymbol{\beta}}}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u'_{\parallel} \right)} . \quad (2.20)$$

Komponentenweise erhält man also:

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + \frac{1}{c^2} v u'_{\parallel}} \quad , \quad \mathbf{u}_{\perp} = \frac{\mathbf{u}'_{\perp}}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u'_{\parallel} \right)} . \quad (2.21)$$

Die Nichtkommutativität der Lorentz-Transformationen ist auch in (2.20) klar ersichtlich, denn \mathbf{u} hängt nicht-symmetrisch von \mathbf{u}' und \mathbf{v} ab.

Aus (2.21) kann auch das Transformationsverhalten von Winkeln bestimmt werden. Nehmen wir an, ein Teilchen bewegt sich in K mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} , die einen Winkel ϑ mit der $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ -Richtung einschließt: $u_{\parallel} = u \cos(\vartheta)$, $\mathbf{u}_{\perp} = u \sin(\vartheta) \hat{\mathbf{u}}_{\perp}$; analog gilt dann $u'_{\parallel} = u' \cos(\vartheta')$ und $\mathbf{u}'_{\perp} = u' \sin(\vartheta') \hat{\mathbf{u}}'_{\perp}$. Einsetzen in (2.21) liefert:

$$u \cos(\vartheta) = \frac{u' \cos(\vartheta') + v}{1 + \frac{1}{c^2} v u' \cos(\vartheta')} \quad , \quad u \sin(\vartheta) = \frac{u' \sin(\vartheta')}{\gamma \left[1 + \frac{1}{c^2} v u' \cos(\vartheta') \right]} ,$$

und daher:

$$\tan(\vartheta) = \frac{u' \sin(\vartheta')}{\gamma [u' \cos(\vartheta') + v]} .$$

Falls das „Teilchen“ ein Photon, oder klassisch: ein Lichtstrahl, ist und sich mit der Geschwindigkeit c bewegt, vereinfacht sich diese Formel auf

$$\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta')}{\gamma [\cos(\vartheta') + \beta]} . \quad (2.22)$$

Diese Richtungsänderung des Lichts beim Übergang auf ein anderes Inertialsystem ist als *Aberration* bekannt und wurde erstmals 1725 von dem britischen Astronomen James Bradley beobachtet. Bradley entdeckte, dass die Position der Sterne sich ändert aufgrund der Bewegung der Erde in ihrer Umlaufbahn um die Sonne. Für kleine β -Werte erhält man aus (2.22):

$$\frac{\vartheta - \vartheta'}{\cos^2(\vartheta')} \sim [\tan(\vartheta) - \tan(\vartheta')] \sim \tan(\vartheta') \left[\left(1 - \frac{\beta}{\cos(\vartheta')} \right) - 1 \right] ,$$

und daher:

$$\Delta\vartheta \equiv \vartheta' - \vartheta \sim \beta \sin(\vartheta') + O(\beta^2) ,$$

in Übereinstimmung mit Bradleys Ergebnissen.

2.5 4-Vektoren

Jede physikalische Größe $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, die unter Lorentz-Transformationen genauso transformiert wird wie der 4-Ortsvektor x^μ ,

$$(a')^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu ,$$

heißt *kontravarianter* 4-Vektor, jede Größe a_μ , die wie x_μ transformiert wird,

$$(a')_\mu = \Lambda_\mu^\nu a_\nu \quad , \quad \Lambda_\mu^\nu = g_{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \Lambda^\rho_\sigma \quad ,$$

ein *kovarianter* 4-Vektor. Mit Hilfe des metrischen Tensors kann man aus einem kovarianten 4-Vektor immer einen kontravarianten 4-Vektor machen, $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$, und umgekehrt. Das *Quadrat* eines 4-Vektors ist als

$$a^2 \equiv a^\mu a_\mu$$

definiert; es ist offensichtlich invariant unter Lorentz-Transformationen. Vektoren mit $a^2 > 0$, $a^2 = 0$ oder $a^2 < 0$ werden zeit-, licht- oder raumartig genannt. Eine Größe, die invariant ist unter Lorentz-Transformationen, wird allgemein ein (Lorentz-) *Skalar* genannt. Auch das Skalarprodukt zweier unterschiedlicher 4-Vektoren,

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu$$

ist Lorentz-invariant und daher ein Skalar:

$$\begin{aligned} (a')_\mu (b')^\mu &= g_{\mu\nu} (a')^\nu (b')^\mu = \Lambda^\mu_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho b^\sigma a^\rho \\ &= (\Lambda^T g \Lambda)_{\sigma\rho} b^\sigma a^\rho = g_{\sigma\rho} b^\sigma a^\rho = a_\sigma b^\sigma \quad . \end{aligned}$$

Falls $\varphi(x)$ ein Skalar ist, dann ist der 4-*Gradient*

$$\partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi \right)$$

ein kovarianter 4-Vektor. Dies folgt aus der Form der Poincaré-Transformation:

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad \text{bzw.} \quad x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu [(x')^\nu - a^\nu] \quad ,$$

die das Transformationsverhalten der Ableitungen:

$$\partial'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial (x')^\nu} \partial_\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \partial_\mu = \Lambda_\nu^\mu \partial_\mu$$

impliziert. Analog ist $\partial^\mu \varphi$ wegen $(\partial')^\nu = \Lambda^\nu_\mu \partial^\mu$ ein kontravarianter 4-Vektor. Das Skalarprodukt

$$\frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu a^\mu = \partial^\mu a_\mu \equiv \partial \cdot a$$

wird als 4-*Divergenz* bezeichnet; die 4-Divergenz ist also invariant unter Lorentz-Transformationen.

Ein weiterer 4-Vektor ist die 4-Geschwindigkeit u^μ eines Teilchens, das sich mit der 3-Geschwindigkeit $\mathbf{u}(t)$ im Inertialsystem K bewegt,

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds} \quad , \quad ds = c dt \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} .$$

Es ist zu beachten, dass die so definierte 4-Geschwindigkeit *dimensionslos* ist,⁴ da sowohl x^μ als auch s die Dimension einer Länge besitzen. Da u^μ also als Ableitung von x^μ (einem 4-Vektor) nach dem Abstand s des Teilchens (einem Skalar) definiert ist, wird u^μ selbst ebenfalls wie ein 4-Vektor transformiert. Die explizite Form von u^μ ist:

$$u^\mu = \frac{\frac{d}{dt}(ct, \mathbf{x})}{c\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \left(1, \frac{\mathbf{u}}{c}\right) \equiv \gamma_u(1, \boldsymbol{\beta}_u).$$

Entweder aus dieser expliziten Form oder direkt aus $dx^\mu dx_\mu = (ds)^2$ kann man nun $u^2 = u^\mu u_\mu = 1$ folgern. Das Quadrat der 4-Geschwindigkeit ist also auf Eins normiert; ihre Komponenten sind daher nicht unabhängig.

Analog definiert man die 4-Beschleunigung $\frac{du^\mu}{ds}$, die ebenfalls ein 4-Vektor ist und die physikalische Dimension [LÄNGE⁻¹] hat. Durch Ableiten von $u^\mu u_\mu = 1$ findet man, dass die 4-Beschleunigung stets senkrecht auf der 4-Geschwindigkeit steht: $\frac{du^\mu}{ds} u_\mu = 0$.

Wir untersuchen nun das Transformationsverhalten einiger Größen, die in der Elektrodynamik relevant sind. Als erste Größe betrachten wir die *elektrische Ladung* von Elementarteilchen oder ganzen Körpern. Es ist ein experimentelles Faktum, dass die elektrische Ladung ein Lorentz-Skalar ist. Alles andere würde unserer Alltagserfahrung widersprechen: Obwohl die Ionen und Elektronen in Festkörpern sehr unterschiedliche Geschwindigkeiten haben und diese außerdem temperatur- und materialabhängig sind, sind Alltagsgegenstände - wie wir wissen - elektrisch neutral.

Es folgt, dass die *Ladungsdichte* wie $\rho' = \gamma_v \rho_0$ transformiert wird, wenn ρ_0 die Ladungsdichte im Ruhesystem K darstellt und ρ' die Ladungsdichte in einem Inertialsystem K' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$. Dies folgt sofort daraus, dass die Gesamtladung in einem Volumenelement erhalten ist, $\rho_0 dV = \rho' dV'$, und das Volumenelement gemäß $dV' = \frac{dV}{\gamma_v}$ transformiert wird.

Nehmen wir nun an, die Ladungsdichte ruht nicht in K , sondern bewegt sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} in diesem Inertialsystem. Sie befindet sich somit offensichtlich in Ruhe im Inertialsystem K' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{u}$. Die in K gemessene Ladungsdichte ist daher $\rho = \gamma_u \rho_0$ mit $\gamma_u \equiv (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-1/2}$. Neben der Ladungsdichte misst K auch eine Stromdichte $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u} = \gamma_u \rho_0 \mathbf{u}$. Insgesamt verhält

$$j^\mu \equiv (c\rho, \mathbf{j}) = \rho_0 c \gamma_u \left(1, \frac{\mathbf{u}}{c}\right) = \rho_0 c \gamma_u(1, \boldsymbol{\beta}_u) = \rho_0 c u^\mu$$

sich also wie ein 4-Vektor und wird dementsprechend als 4-Stromdichte bezeichnet. Folglich wird j^μ gemäß der Lorentz-Gruppe transformiert.

In diesem Argument wurde vorausgesetzt, dass alle an ρ beteiligten Einzelladungen die gleiche Geschwindigkeit \mathbf{u} haben. Im allgemeinen Fall, in dem die Ladungsdichte aus Ladungen unterschiedlicher Geschwindigkeit aufgebaut ist, erreicht man denselben Schluss, dass $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ wie ein kontravarianter 4-Vektor transformiert wird, indem man sich die Gesamtladungsdichte aus Teil-

⁴Wir übernehmen hiermit die Notation von Landau und Lifschitz, Band II. Auch die Konvention $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ ist üblich. In vielen Büchern sind beide Konventionen sowieso ununterscheidbar, da $c = 1$ gesetzt wird.

ladungsdichten uniformer Geschwindigkeit aufgebaut denkt. Das Erhaltungsgesetz für die Gesamtladung, das in differentieller Form als Kontinuitätsgleichung darstellbar ist, lautet in der 4-Schreibweise

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial x^i} j^i = \frac{\partial}{\partial x^0} j^0 + \frac{\partial}{\partial x^i} j^i = \partial_\mu j^\mu .$$

Die manifeste Lorentz-Invarianz dieser Gleichung zeigt, dass die Gesamtladung in allen Inertialsystemen erhalten ist, falls sie in irgendeinem Inertialsystem erhalten ist.

Wir zeigen nun, dass auch das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} zu einem 4-Vektor, dem 4-Potential $A^\mu = (\Phi, c\mathbf{A})$, kombiniert werden können. Aus den homogenen Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$ folgt bekanntlich:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} .$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen liefern daher:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_0 c} (c\rho) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta\Phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \\ &= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ &= \square\Phi - \frac{\partial}{\partial(ct)} \left[\nabla \cdot (c\mathbf{A}) + \frac{\partial \Phi}{\partial(ct)} \right] = \square\Phi - \frac{\partial}{\partial(ct)} (\partial_\nu A^\nu) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_0 c} \mathbf{j} &= \mu_0 c \mathbf{j} = c \left(\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= c \left[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2} \left(-\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \right] \\ &= c \left[\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \\ &= \nabla \left[\nabla \cdot (c\mathbf{A}) + \frac{\partial \Phi}{\partial(ct)} \right] + \square(c\mathbf{A}) = \square(c\mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial(-\mathbf{x})} (\partial_\nu A^\nu) . \end{aligned}$$

Die Kombination dieser beiden Gleichungen liefert in 4-Schreibweise:

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) . \quad (2.23)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist ein 4-Vektor, also muss auch die rechte Seite wie ein 4-Vektor transformiert werden. Wegen der Eichfreiheit bei der Wahl von A^μ bedeutet dies noch keineswegs, dass die einzelnen Terme $\square A^\mu$ und $\partial^\mu (\partial_\nu A^\nu)$ in (2.23) wie 4-Vektoren transformiert werden; um dies zu erreichen, muss man die Eichung festlegen. Die Eichtransformation hat in 4-Schreibweise die Form

$$A^\mu \longrightarrow \tilde{A}^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu \Lambda ,$$

wobei Λ eine zunächst beliebige Funktion des 4-Ortsvektors x^ν ist. Um diese Eichfreiheit zu eliminieren, wird häufig die Lorenz-Eichung,

$$\partial_\nu A^\nu = 0 , \quad (2.24)$$

aufgelegt. Die Bestimmungsgleichung für das 4-Potential reduziert sich in dieser Eichung auf:

$$\square A^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu . \quad (2.25)$$

Die Lorenz-Eichung läßt sich immer realisieren, denn wenn $\partial_\nu \bar{A}^\nu \neq 0$ gilt, kann man immer eine Funktion χ und ein neues 4-Potential A^μ einführen:

$$\begin{aligned} \square \chi &\equiv -\partial_\mu \bar{A}^\mu \\ A^\mu &\equiv \bar{A}^\mu + \partial^\mu \chi , \end{aligned}$$

so dass A^μ dieselben physikalischen Felder wie \bar{A}^μ beschreibt und außerdem die Lorenz-Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ erfüllt. Die Lorenz-Bedingung (2.24) legt das 4-Potential nicht eindeutig fest, da auch das alternative Potential

$$\tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda \quad , \quad \square \Lambda = 0 \quad (2.26)$$

die gleichen physikalischen Felder beschreibt und die Lorenz-Bedingung erfüllt. Das 4-Potential ist in der Lorenz-Eichung also bis auf eine Lösung der Wellengleichung bestimmt. Für alle möglichen Lorenz-Skalare Λ in (2.26) sind sowohl A^μ als auch \tilde{A}^μ physikalisch äquivalente 4-Vektoren.

Gleichung (2.25) zeigt, dass das 4-Potential in der Lorenz-Eichung eine *inhomogene Wellengleichung* erfüllt. Genau wie bei der alternativen (und äquivalenten) Formulierung mit Hilfe der Coulomb-Eichung stellen wir fest, dass die Maxwell-Theorie elektromagnetische Wellen vorhersagt. Falls keine Quellen des elektromagnetischen Feldes vorhanden sind, also für $j^\mu = 0$, genügt $A^\mu(x)$ der homogenen Wellengleichung $\square A^\mu = 0$ und kann somit als Überlagerung ebener Wellen der Form

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= (A_0)^\mu e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} = (A_0)^\mu e^{-i(\frac{\omega}{c}ct - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \\ &= (A_0)^\mu e^{-ik_\nu x^\nu} = (A_0)^\mu e^{-i\varphi(x)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

geschrieben werden, wobei die Phase $\varphi(x) = k_\nu x^\nu$ und der 4-Wellenvektor $k^\nu = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ mit der Frequenz $\omega = c|\mathbf{k}|$ eingeführt wurden. Nehmen wir an, (2.27) gilt im Inertialsystem K . Im Inertialsystem K' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$ gilt dann:

$$(A')^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu (A_0)^\nu e^{-i\varphi(x)} = (A'_0)^\mu e^{-i\varphi'(x')}$$

mit

$$(A'_0)^\mu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu (A_0)^\nu$$

und

$$\varphi'(x') \equiv \varphi(x) = k_\nu x^\nu = k_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu (x')^\mu = k_\nu \Lambda_\mu{}^\nu (x')^\mu \equiv (k')_\mu (x')^\mu .$$

Wir stellen also fest, dass die Amplitude des 4-Potentials wie ein 4-Vektor und die Phase wie ein Lorentz-Skalar transformiert werden. Außerdem haben wir die wichtige Entdeckung gemacht, dass auch der 4-Wellenvektor k^ν ein echter 4-Vektor ist, d. h. gemäß der Lorentz-Gruppe transformiert wird: $(k')_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu k_\nu$ bzw. $(k')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu$. Im Falle von Wellenpaketen, d. h. von Überlagerungen

ebener Wellen, gelten diese Schlussfolgerungen auch für jede einzelne Fourier-Komponente.

Aus der Quantenmechanik ist bekannt, dass ein Photon mit dem Wellenvektor \mathbf{k} und der Frequenz ω einen Impuls $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ und eine Energie $\mathcal{E} = \hbar\omega$ besitzt. Für den Spezialfall des Photons stellen wir hier also erstmals fest, dass Impuls und Energie in der Relativitätstheorie zu einem 4-Vektor vereint werden: $p^\mu \equiv \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right) = \hbar \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) = \hbar k^\mu$. Wir werden später sehen, dass diese enge Verflechtung von Energie und Impuls auch allgemeiner gilt.

Die Lorentz-Transformation für den 4-Wellenvektor $k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$ mit $k_{\parallel} \equiv \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}} \equiv k \cos(\vartheta)$ und $\mathbf{k}_{\perp} \equiv \mathbf{k} - k_{\parallel} \hat{\boldsymbol{\beta}} \equiv k \sin(\vartheta) \hat{\mathbf{k}}_{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} \omega'/c \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{k}_{\perp} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_{\parallel} \end{pmatrix}$$

zeigt, dass die Frequenz ω der Welle abhängig vom Einfallswinkel ϑ wie folgt transformiert wird:

$$\omega' = \gamma(\omega - \beta c k_{\parallel}) = \gamma\omega \left(1 - \beta \frac{k_{\parallel}}{k}\right) = \gamma\omega[1 - \beta \cos(\vartheta)] . \quad (2.28)$$

Hierbei ist das Transformationsgesetz für den Winkel,

$$\tan(\vartheta') = \frac{|\mathbf{k}'_{\perp}|}{k'_{\parallel}} = \frac{|\mathbf{k}_{\perp}|}{\gamma(k_{\parallel} - \beta \frac{\omega}{c})} = \frac{|\mathbf{k}_{\perp}|/k}{\gamma\left(\frac{k_{\parallel}}{k} - \beta\right)} = \frac{\sin(\vartheta)}{\gamma[\cos(\vartheta) - \beta]}$$

oder umgekehrt

$$\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta')}{\gamma[\cos(\vartheta') + \beta]} ,$$

natürlich gleich dem Gesetz (2.22) für die Transformation von Winkeln, das wir im Rahmen unserer Untersuchung von Aberration von Sternenlicht erhielten. Gleichung (2.28) beschreibt den relativistischen *Doppler-Effekt*: Die Frequenz ω wird nicht nur mit dem winkelabhängigen Faktor $1 - \beta_v \cos(\vartheta)$ multipliziert, der bereits vom nicht-relativistischen Doppler-Effekt bekannt ist, sondern auch mit dem Faktor γ_v , der also eine relativistische Korrektur darstellt und sogar für transversal einfallendes Licht ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) einen Doppler-Effekt hervorruft („transversaler Doppler-Effekt“). Beim longitudinalen Doppler-Effekt ($\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$) wird die Frequenz ω wie folgt transformiert:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \omega \quad (\vartheta = 0) \quad , \quad \omega' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \omega \quad (\vartheta = \pi) \quad .$$

Beim transversalen Doppler-Effekt ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) tritt offensichtlich eine *Rotverschiebung* auf: $\omega = \frac{1}{\gamma_v} \omega' < \omega'$. Als typische Anwendung des transversalen Doppler-Effekts betrachten wir einen Stern, der im Inertialsystem K' ruht und dort Licht mit der Frequenz ω' ausstrahlt. Ein Beobachter auf der Erde („Inertialsystem K “), für den dieses Licht unter dem Winkel $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ relativ zur \mathbf{v} -Richtung einfällt, wird die kleinere Frequenz $\omega = \omega'/\gamma_v$ messen. Der transversale Doppler-Effekt ist eine Konsequenz der Zeitdilatation, denn für den Beobachter auf der Erde wird eine in K' ruhende Uhr (in diesem Fall also der Licht ausstrahlende Stern) um einen Faktor $\frac{1}{\gamma_v}$ langsamer laufen als eine Uhr, die im Inertialsystem K ruht.

2.6 Masse und Energie

Wegen der einfachen quantenmechanischen Relation $\mathcal{E} = \hbar\omega$ für die Energie eines Photons mit der Frequenz ω kann man aufgrund des Doppler-Effekts, Gleichung (2.28), sofort das Transformationsgesetz für die *Energie elektromagnetischer Strahlung* angeben: Sendet ein Körper in seinem Ruhesystem K insgesamt N Photonen der Frequenz ω unter einem Winkel ϑ zur $\hat{\beta}$ -Achse aus, so misst ein Beobachter im Inertialsystem K' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v} = v\hat{\beta}$ die ausgestrahlte Energie

$$\mathcal{E}' = N\hbar\omega' = \gamma N\hbar\omega[1 - \beta \cos(\vartheta)] = \gamma\mathcal{E}[1 - \beta \cos(\vartheta)] . \quad (2.29)$$

Betrachten wir nun einen Körper der Masse m_0 in seinem Ruhesystem K , der in den Richtungen ϑ und $\vartheta - \pi$ jeweils N Photonen der Frequenz ω ausstrahlt, stets zwei Photonen (eins in jeder Richtung) zur gleichen Zeit. Die Energie des Körpers vor und nach dem Ausstrahlen sei $\mathcal{E}(0)$ bzw. $\mathcal{E}^{(0)}(0)$. Schreiben wir noch: $2N\hbar\omega = \varepsilon$, dann lautet das Gesetz der Energieerhaltung in K :

$$\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}^{(0)}(0) + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \mathcal{E}^{(0)}(0) + \varepsilon .$$

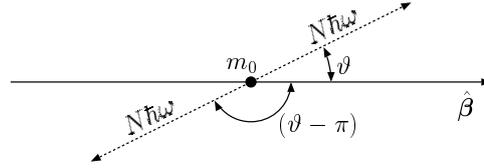


Abbildung 2.7: Ausstrahlung von Photonen in zwei entgegengesetzte Richtungen

Auch in K' gilt Energieerhaltung, nun für die Energien des bewegten Körpers und der Strahlung:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(v) &= \mathcal{E}^{(0)}(v) + \frac{1}{2}\varepsilon\gamma[1 - \beta \cos(\vartheta)] + \frac{1}{2}\varepsilon\gamma[1 - \beta \cos(\vartheta - \pi)] \\ &= \mathcal{E}^{(0)}(v) + \varepsilon\gamma . \end{aligned}$$

Zieht man die Energieerhaltungsgesetze in K und K' unter Verwendung von

$$\mathcal{E}_{\text{kin}}(v) \equiv \mathcal{E}(v) - \mathcal{E}(0) \quad , \quad \mathcal{E}_{\text{kin}}^{(0)}(v) \equiv \mathcal{E}^{(0)}(v) - \mathcal{E}^{(0)}(0)$$

voneinander ab, so folgt für $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{kin}}^{(0)}(v) = \mathcal{E}_{\text{kin}}(v) - \varepsilon(\gamma - 1) &\sim \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\beta^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m_0 - \frac{\varepsilon}{c^2}\right)v^2 = \frac{1}{2}m_0^{(0)}v^2 . \end{aligned}$$

Das Massendefizit $\mu_0 \equiv m_0 - m_0^{(0)} = \frac{\varepsilon}{c^2}$ entspricht also einer Energie ε :

$$\varepsilon = \mu_0c^2 .$$

Da man prinzipiell die ganze Ruhemasse eines Körpers in Strahlung umwandeln kann (z. B. durch Annihilation von Materie und Antimaterie), folgt für $\mathcal{E}^{(0)}(0) = \mathcal{E}^{(0)}(v) = 0$ aus den beiden Energieerhaltungsgesetzen:

$$\mathcal{E}(0) = \varepsilon = m_0 c^2 \quad , \quad \mathcal{E}(v) = \varepsilon \gamma = \gamma m_0 c^2 = m c^2 \quad .$$

Hierbei wurde die relativistische Masse $m \equiv \gamma m_0$ eingeführt. Masse und Energie sind demnach äquivalent. Außerdem folgt nun auch für Teilchen, dass der 4-Impulsvektor

$$p^\mu \equiv \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, m\mathbf{u} \right) = mc \left(1, \frac{\mathbf{u}}{c} \right) = m_0 c \gamma_u (1, \boldsymbol{\beta}_u) = m_0 c u^\mu$$

ein 4-Vektor ist, der die physikalischen Größen Energie \mathcal{E} und Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \gamma_u m_0 \mathbf{u}$ untrennbar miteinander verknüpft.

Das hier dargestellte Argument stammt aus einer Arbeit von A. Einstein (Annalen der Physik, **17**, 639 (1905)), in der er übrigens interessanterweise eine *klassische* (d. h. nicht-quantenmechanische) Herleitung des Transformationsgesetzes (2.29) für die Strahlungsenergie gab. Das Konzept des Photons, das er ja selbst wenige Monate zuvor in seiner Arbeit über den photoelektrischen Effekt vorgeschlagen hatte, muss ihm wohl noch zu spekulativ erschienen sein.

2.7 Die Lorentz-Kraft und elektromagnetische Felder

Ein Wort vorab über Zusammensetzungen („tensorielle Produkte“) von Vierervektoren: Das dyadische Produkt $D^{\mu\nu}$ zweier Vierervektoren a^μ und b^ν ,

$$D^{\mu\nu} \equiv a^\mu b^\nu \tag{2.30}$$

wird natürlich wie folgt transformiert:

$$(D')^{\mu\nu} = (a')^\mu (b')^\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma a^\rho b^\sigma = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma D^{\rho\sigma} \quad .$$

Dies folgt sofort aus dem bekannten Transformationsverhalten von Vierervektoren. Die Dyade $D^{\mu\nu}$ (mit den Indizes oben) heißt *kontravariant*, die Dyade $D_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} D^{\rho\sigma} = a_\mu b_\nu$ heißt *kovariant*, und die Mischformen $D_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} D^{\rho\nu}$, und $D^\mu{}_\nu = g_{\nu\sigma} D^{\mu\sigma}$ werden als *gemischt* bezeichnet. Die Verallgemeinerung:

$$D^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \equiv a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \dots a_n^{\nu_n} \tag{2.31}$$

wird analog wie

$$(D')^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2} \dots \Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n} D^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}$$

transformiert, wenn a_1, a_2, \dots, a_n alle kontravariante 4-Vektoren sind. Tensoren sind die Verallgemeinerung von (2.30) und (2.31): Jede Größe $T^{\mu\nu}$, die genauso transformiert wird (in unserem Fall unter Lorentz-Transformationen) wie $D^{\mu\nu}$ heißt (kontravarianter) Tensor 2. Stufe, jede Größe $T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}$, die genauso transformiert wird wie $D^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}$ in (2.31) heißt (kontravarianter) Tensor n -ter Stufe.

Vierervektoren und Skalare sind Tensoren erster bzw. nullter Stufe. Die Bildung von Skalarprodukten führt zur „Verjüngung“ eines Tensors: So stellen z. B.

$$d^\mu \equiv D^{\mu\nu} c_\nu = a^\mu b^\nu c_\nu \quad \text{und} \quad t^\mu \equiv T^{\mu\nu} c_\nu$$

beide kontravariante 4-Vektoren dar.

Betrachten wir nun die Ableitungen des 4-Potentials nach dem 4-Ortsvektor. Diese Ableitungen sind physikalisch äußerst relevant, da sie die Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder bilden. Aufgrund der obigen Bemerkungen ist klar, dass

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

die Differenz zweier Dyaden und somit ein antisymmetrischer, kontravarianter 4-Tensor zweiter Stufe ist, der wie folgt transformiert wird:

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (2.32)$$

Die explizite Form von $F^{\mu\nu}$ folgt aus $F^{\mu\mu} = 0$ und

$$\begin{aligned} F^{i0} &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = \left[-\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right]_i = E_i \\ F^{ij} &= \varepsilon_{ijk}(-cB_k) = -c\varepsilon_{ijk}B_k \end{aligned}$$

als

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Da die Elemente von $F^{\mu\nu}$ durch (\mathbf{E}, \mathbf{B}) bestimmt werden, heißt $F^{\mu\nu}$ auch *elektromagnetischer Feldtensor*. Da \mathbf{E} und \mathbf{A} unter Raumspiegelungen ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$) bekanntlich wie *echte* Vektoren ($\mathbf{E}' = -\mathbf{E}, \mathbf{A}' = -\mathbf{A}$) transformiert werden, das Magnetfeld \mathbf{B} dagegen wie ein *Pseudovektor* ($\mathbf{B}' = \mathbf{B}$) transformiert wird, folgt für das Transformationsverhalten des Feldtensors unter Raumspiegelungen

$$F^{\mu\nu} \rightarrow (F')^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ -E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Feldtensor zeigt somit das allgemeine Transformationsverhalten von Tensoren unter Raumspiegelungen, die wir hier als $\Lambda^\mu{}_\nu = \sigma(\mu)\delta^\mu{}_\nu$ mit $\sigma(0) = 1$ und $\sigma(1) = \sigma(2) = \sigma(3) = -1$ darstellen:

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \sigma(\mu)\sigma(\nu)F^{\mu\nu}.$$

Antisymmetrische Tensoren 2. Stufe $A^{\mu\nu}$, wie der Feldtensor, können also generell mit Hilfe eines *polaren* (oder *echten*) Vektors \mathbf{p} und eines *axialen* (oder *Pseudo*-)Vektors \mathbf{a} beschrieben werden:

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{p}, \mathbf{a}),$$

denn man überprüft leicht, dass \mathbf{p} und \mathbf{a} unter dreidimensionalen Drehungen wie $\mathbf{p}' = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{p}$, $\mathbf{a}' = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{a}$ transformiert werden. In dieser Notation gilt für den elektromagnetischen Feldtensor: $F^{\mu\nu} = (\mathbf{E}, c\mathbf{B})$.

Das Transformationsverhalten der \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder folgt sofort aus (2.32). Für das \mathbf{E} -Feld findet man zunächst (aufgrund von $F^{00} = 0$):

$$\begin{aligned} (E')_i &= (F')^{i0} = \Lambda^i{}_\rho \Lambda^0{}_\sigma F^{\rho\sigma} \\ &= \Lambda^i{}_j \Lambda^0{}_0 F^{j0} + \Lambda^i{}_0 \Lambda^0{}_j F^{0j} + \Lambda^i{}_j \Lambda^0{}_k F^{jk} \end{aligned}$$

Setzt man hier nun die explizite Form der Lorentz-Transformation $\Lambda^\mu{}_\nu$ ein:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbb{1}_3 + (\gamma - 1)\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix},$$

dann folgt für das \mathbf{E} -Feld:

$$\begin{aligned} (E')_i &= \gamma[\delta_{ij} + (\gamma - 1)\hat{\beta}_i\hat{\beta}_j]E_j + (-\gamma\beta_i)(-\gamma\beta_j)(-E_j) \\ &\quad + [\delta_{ij} + (\gamma - 1)\hat{\beta}_i\hat{\beta}_j](-\gamma\beta_k)\varepsilon_{jkl}(-cB_l) \\ &= \gamma(E_i + \varepsilon_{jkl}v_k B_l) + [\gamma(\gamma - 1) - \gamma^2\beta^2]\hat{\beta}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{E}) \end{aligned}$$

d. h. (wegen $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$):

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - (\gamma - 1)(\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{E})\hat{\boldsymbol{\beta}},$$

während sich für das \mathbf{B} -Feld analog:

$$\mathbf{B}' = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}\right) - (\gamma - 1)(\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{B})\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

ergibt. Komponentenweise findet man also:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} & B'_{\parallel} &= B_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp}). \end{aligned}$$

Hiermit ist auch das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Felder unter Lorentz-Transformationen bekannt.

Wir befassen uns nun mit der relativistischen Formulierung der Lorentz-Kraft und definieren hierzu den 4-Vektor

$$K^\mu \equiv qF^{\mu\nu}u_\nu,$$

der durch Verjüngung von $F^{\mu\nu}$ mittels der 4-Geschwindigkeit u_ν entsteht. Durch explizite Berechnung sieht man, dass K^μ eine relativistische Verallgemeinerung der Lorentz-Kraft darstellt:

$$\begin{aligned} K^\mu &= q(F^{\mu 0}u_0 + F^{\mu j}u_j) = q\gamma u[\mathbf{E}^{\mu 0} + F^{\mu j}(-\beta_j)] \\ &= q\gamma u(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}, \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \tag{2.34}$$

wobei benutzt wurde:

$$F^{ij}(-\beta_j) = (-\varepsilon_{ijk}cB_k)(-\beta_j) = c(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})_i = (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_i.$$

Der Zeitanteil von K^μ in (2.34) ist genau die Leistung, die das elektromagnetische Feld am Teilchen verrichtet. Betrachten wir nun die Gleichung

$$m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = K^\mu \quad , \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma_u} \quad , \quad (2.35)$$

die K^μ mit einem anderen 4-Vektor, der 4-Beschleunigung, in Verbindung bringt. Gleichung (2.35) ist sicherlich korrekt im momentanen Ruhesystem des Teilchens, denn dann lautet sie:

$$\left(0, m_0 \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right) = (0, q\mathbf{E}) \quad .$$

Da das Gesetz (2.35) in diesem speziellen Inertialsystem gilt und Lorentzkovariant formuliert wurde, muss es nach dem Relativitätsprinzip in *jedem* Inertialsystem gelten. Wir haben somit die relativistische Formulierung der Lorentz'schen Bewegungsgleichung gefunden. Es sei noch daran erinnert, dass die 4-Beschleunigung stets senkrecht auf der 4-Geschwindigkeit stehen muss. Das Gleiche muss gemäß (2.35) dann natürlich auch für die 4-Kraft K^μ gelten. Aufgrund der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ folgt tatsächlich:

$$u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = u_\mu \left(\frac{1}{m_0 c} K^\mu \right) = \frac{q}{m_0 c} u_\mu F^{\mu\nu} u_\nu = 0 \quad ,$$

so dass diese Konsistenzbedingung automatisch erfüllt ist.

Nachdem wir die Dynamik der Teilchen relativistisch formuliert haben, wenden wir uns nun der Dynamik der Felder zu. Aus der expliziten Form von $F^{\mu\nu}$ in (2.33) folgt:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = \frac{1}{\varepsilon_0 c} c\rho = \mu_0 c j^0$$

und

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu j} &= \partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} = \frac{\partial(-E_j)}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial x_i} (-c\varepsilon_{ijk} B_k) \\ &= c \left(\varepsilon_{jik} \frac{\partial}{\partial x_i} B_k - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_j}{\partial t} \right) = c \left(\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)_j \\ &= \mu_0 c j^j \end{aligned}$$

und daher insgesamt:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 c j^\nu \quad . \quad (2.36)$$

Gleichung (2.36) stellt die relativistisch kovariante Form der *inhomogenen* Maxwell-Gleichungen dar.

Bevor wir die *homogenen* Maxwell-Gleichungen kovariant formulieren können, sind ein paar Bemerkungen über spezielle Tensoren angebracht. Zum Beispiel ist das *Kronecker-Delta*, $g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ ein Tensor, weil

$$\Lambda^\mu_\rho \Lambda_\nu^\sigma \delta^\rho_\sigma = \Lambda^\mu_\rho \Lambda_\nu^\rho = \Lambda^\mu_\rho (\Lambda^{-1})^\rho_\nu = \delta^\mu_\nu$$

gilt. Hieraus folgt sofort:

$$\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma g^{\rho\sigma} = g^{\nu\tau} (\Lambda^\mu_\rho \Lambda_\tau^\sigma g^\rho_\sigma) = g^{\nu\tau} g^\mu_\tau = g^{\mu\nu} \quad ,$$

so dass auch der „metrische Tensor“ tatsächlich ein echter kontravarianter Tensor 2. Stufe ist. Analog ist $g_{\mu\nu}$ ein kovarianter Tensor. Ein anderer (relativ trivialer) spezieller Tensor wäre der *Nulltensor*. Ein weiterer Tensor, der im Folgenden sehr wichtig wird, ist der *Levi-Civita-Tensor* $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, der in allen Inertialsystemen gleich definiert ist:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \begin{cases} \text{sgn}(P) & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) = (P0, P1, P2, P3) , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Dass wir es hier, trotz des einfachen Transformationsverhaltens, $(\varepsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, mit einem Tensor bezüglich eigentlicher, orthochroner Lorentz-Transformationen zu tun haben, folgt aus der Relation:

$$\Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} \Lambda^\rho_{\rho'} \Lambda^\sigma_{\sigma'} \varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = C(\Lambda) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} .$$

Das linke Glied dieser Gleichung ist nämlich vollständig antisymmetrisch in den Indizes $\mu\nu\rho\sigma$ und muss daher proportional zu $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ sein. Die Proportionalitätskonstante $C(\Lambda)$ dürfte selbstverständlich von Λ abhängen. Um die Konstante $C(\Lambda)$ zu bestimmen, setzen wir $(\mu\nu\rho\sigma) = (0123)$, so dass das linke Glied gleich $\det(\Lambda) = 1$ und das rechte Glied gleich $C(\Lambda)$ ist. Es folgt $C(\Lambda) = \det(\Lambda)$, so dass $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ unter \mathcal{L}_+^\uparrow -Transformationen (mit $\det(\Lambda) = 1$) tatsächlich wie ein Tensor transformiert wird. Im Falle einer Raumspiegelung am Ursprung (mit $\det(\Lambda) = -1$) würde man jedoch für einen *echten* Tensor $(\varepsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \det(\Lambda) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ erwarten, während tatsächlich (per definitionem) $(\varepsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ gilt. In diesem Sinne weicht das Transformationsverhalten von $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ also von demjenigen eines *echten* Tensors ab. Analog zur Klassifizierung von Vektoren aufgrund ihres Transformationsverhaltens unter Raumspiegelungen (z. B. $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$, jedoch $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$) unterscheidet man auch *echte* und *Pseudotensoren*: Ein Lorentz-Pseudotensor wird unter \mathcal{L}_+^\uparrow , jedoch nicht unter \mathcal{L}_-^\uparrow , wie ein Tensor transformiert. Im Falle von \mathcal{L}_-^\uparrow -Transformationen erhält der Pseudotensor im Vergleich zum Transformationsverhalten des echten Tensors ein zusätzliches Minuszeichen.

Man kann den Levi-Civita-Tensor auch zur Erzeugung neuer Tensoren verwenden:

$$\tilde{a}^{\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_\sigma \quad , \quad \tilde{a}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_{\rho\sigma} \quad , \quad \tilde{a}^\mu = \frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_{\nu\rho\sigma} \quad , \quad (2.37)$$

wobei natürlich nur antisymmetrische Tensoren oder Pseudotensoren $a^{\rho\sigma}$ und $a^{\nu\rho\sigma}$ von Interesse sind⁵. Falls a^σ ein Tensor ist, dann ist $\tilde{a}^{\mu\nu\rho}$ ein Pseudotensor und umgekehrt. Analoges gilt für $a^{\rho\sigma}$ und $\tilde{a}^{\mu\nu}$ und $a^{\nu\rho\sigma}$ und \tilde{a}^μ . Die Größen a^σ und $\tilde{a}^{\mu\nu\rho}$ heißen *dual* zueinander, und analog für $a^{\rho\sigma}$ und $\tilde{a}^{\mu\nu}$ und für $a^{\nu\rho\sigma}$ und \tilde{a}^μ . Diese Dualitätstransformation ist umkehrbar: $\tilde{\tilde{a}}^\mu = a^\mu$, $\tilde{\tilde{a}}^{\mu\nu} = -a^{\mu\nu}$ und $\tilde{\tilde{a}}^{\mu\nu\rho} = a^{\mu\nu\rho}$. Wendet man die Dualitätstransformation an auf *echte* antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe der Form $A^{\mu\nu} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})$, so erhält man für den dualen Tensor $\tilde{A}^{\mu\nu} = (\mathbf{a}, -\mathbf{p})$ und für den doppeltdualen Tensor $\tilde{\tilde{A}}^{\mu\nu} = (-\mathbf{p}, -\mathbf{a}) = -A^{\mu\nu}$.

Der in Abschnitt [1.4] behandelte *Satz von Helmholtz* erhält für antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe eine sehr elegante Form: Er besagt, dass aus

⁵Die Kontraktion symmetrischer und antisymmetrischer Tensoren ist offensichtlich gleich Null.

der Divergenzfreiheit $\partial_\mu A^{\mu\nu} = 0$ des Tensors $A^{\mu\nu}$ die Existenz eines 4-Vektors ξ^μ mit $A^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \xi_\sigma$ folgt; falls $A^{\mu\nu}$ ein *echter* Tensor ist, muss ξ^μ also ein 4-Pseudovektor sein. Man beweist diese Aussage wie folgt: aus $\partial_\mu A^{\mu\nu} = 0$ mit $A^{\mu\nu} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})$ ergibt sich einerseits für $\nu = 0$:

$$0 = \partial_\mu A^{\mu 0} = \nabla \cdot \mathbf{p} \iff \exists \xi \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} = \nabla \times \xi$$

und andererseits für die räumlichen Komponenten $\nu = j$:

$$0 = \partial_\mu A^{\mu j} = \varepsilon_{jik} \partial_i (a_k - \partial_0 \xi_k) \quad , \quad \nabla \times (\mathbf{a} - \partial_0 \xi) = \mathbf{0} \quad ,$$

so dass aufgrund des Helmholtz'schen Satzes gilt:

$$0 = \partial_\mu A^{\mu j} \iff \exists \xi_0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = \partial_0 \xi + \nabla \xi_0 \quad .$$

Mit der Definition $\xi^\mu \equiv (\xi_0, \xi)$ folgt daher:

$$A^{\mu\nu} = (\mathbf{p}, \mathbf{a}) = (\nabla \times \xi, \partial_0 \xi + \nabla \xi_0) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \xi_\sigma \quad (2.38)$$

und nach einer Dualitätstransformation:

$$\tilde{A}^{\mu\nu} = (\mathbf{a}, -\mathbf{p}) = (\partial_0 \xi + \nabla \xi_0, -\nabla \times \xi) = -(\partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu) \quad . \quad (2.39)$$

Man sieht hier bereits den engen Zusammenhang zwischen der Existenz eines „4-Potentials“ ξ^μ , das den „Feldtensor“ $-\tilde{A}^{\mu\nu}$ definiert, und der Divergenzfreiheit $\partial_\mu (-\tilde{A}^{\mu\nu}) = \partial_\mu A^{\mu\nu} = 0$ des zu $-\tilde{A}^{\mu\nu}$ dualen Feldtensors. Für den echten elektromagnetischen Feldtensor $-\tilde{A}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$ werden wir diese Zusammenhänge im Folgenden im Detail herstellen.

Wir wenden die in (2.37) definierte Dualitätstransformation daher nun an auf den elektromagnetischen Feldtensor $F^{\mu\nu}$:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -c\mathbf{B}^T & & \\ & 0 & E_3 & -E_2 \\ c\mathbf{B} & -E_3 & 0 & E_1 \\ & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.40)$$

Da $F^{\mu\nu}$ ein „echter“ Tensor und $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ein Pseudotensor ist, muss auch $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ein Pseudotensor sein⁶. $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ist als *dualer Feldtensor* bekannt. Seine 4-Divergenz ist für $\nu = 0$ bzw. $\nu = j = 1, 2, 3$ durch

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} = \nabla \cdot (c\mathbf{B}) = c(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu j} &= \partial_0 \tilde{F}^{0j} + \partial_i \tilde{F}^{ij} = \partial_0 (-cB_j) + \partial_i (\varepsilon_{ijk} E_k) \\ &= -\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right)_j = 0 \end{aligned}$$

und daher insgesamt durch

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.41)$$

⁶Allgemein gilt, dass das Produkt zweier Pseudotensoren oder zweier echter Tensoren einen *echten* Tensor ergibt und das Produkt eines echten und eines Pseudotensors einen *Pseudotensor*.

gegeben. Gleichung (2.41) fasst die *homogenen* Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form zusammen. Eine Alternativform von (2.41) ist:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} = 0 \quad (2.42)$$

und daher

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0.$$

Die kompakte Form (2.41) der homogenen Maxwell-Gleichungen ist jedoch offensichtlich viel bequemer.

Es ist übrigens zu beachten, dass (2.41) nur dann einen nicht-trivialen physikalischen Inhalt hat, wenn man den Feldtensor mit Hilfe der elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} beschreibt: $\tilde{F}^{\mu\nu} = (c\mathbf{B}, -\mathbf{E})$. Drückt man die Felder (und somit auch $F^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$) jedoch mit Hilfe des 4-Potentials aus, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, dann wird Gleichung (2.41) sofort zu einer Trivialität reduziert. Dies sieht man noch am einfachsten in der Form (2.42), die wegen der Antisymmetrie von $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ und der Symmetrie von $\partial_\mu\partial_\rho$ keinerlei Einschränkungen für das 4-Potential A_σ beinhaltet:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma = 0. \quad (2.43)$$

Die Erklärung hierfür ist natürlich, dass die Annahme der Existenz eines 4-Potentials bereits äquivalent zu den homogenen Maxwell-Gleichungen ist. Die Identität (2.43) drückt also lediglich aus, dass die homogenen Maxwell-Gleichungen sich selbst implizieren.

Kapitel 3

Kanonischer Formalismus

Nachdem im vorigen Kapitel die Strukturen der relativistischen Klassischen Mechanik erforscht wurden, lautet unsere nächste Frage, ob dieses neue Gebilde demselben Bauprinzip wie die nicht-relativistische Klassische Mechanik gehorcht. Insbesondere ist zu klären, ob vertraute Begriffe wie „Hamilton’sches Prinzip“ „Lagrange-Funktion“ „Hamilton-Funktion“ „kanonisch konjugierter Impuls“ usw. auch für die relativistische Variante der Klassischen Mechanik relevant sind. Diese Frage lässt sich auch so formulieren: Kann die Relativitätstheorie aus einem Wirkungsfunktional hergeleitet werden? Die gesuchte Wirkung müsste dann sowohl die Freiheitsgrade der Teilchen als auch diejenigen der Felder und außerdem die Wechselwirkung zwischen beiden enthalten und hätte daher die allgemeine Form

$$S = S_M + S_{WW} + S_F, \quad (3.1)$$

wobei „M“ für *Materie*, „WW“ für *Wechselwirkung* und „F“ für die elektromagnetischen *Felder* steht. Aus dem gesuchten Wirkungsfunktional müssten dann durch Minimierung bezüglich der möglichen „Bahnen“ der Teilchen und Felder zum einen die bereits bekannte Dynamik der Teilchen

$$m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (3.2)$$

und zum anderen die Dynamik der Felder folgen:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 c j^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.3)$$

Im Folgenden werden wir ein solches Wirkungsfunktional konstruieren.

3.1 Kräftefreie Teilchen

Der gesuchte kanonische Formalismus müsste natürlich vor allem imstande sein, die Dynamik des kräftefreien Teilchens zu reproduzieren. Die Bewegungsgleichung eines Teilchens in Abwesenheit von Feldern ($F^{\mu\nu} = 0$) folgt sofort aus (3.2) als

$$m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \gamma_u \frac{dx^\mu}{dt} = \text{konstant}$$

und hat die Lösung

$$\gamma_u \mathbf{u} = \text{konstant} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u} = \text{konstant}$$

In diesem Spezialfall liegt also erwartungsgemäß eine geradlinig-gleichförmige Bewegung vor. Die *Energie* eines kräftefreien Teilchens folgt aus Einsteins berühmter Formel als $\mathcal{E} = \gamma_u m_0 c^2 = mc^2$. Auch dieses Resultat ist zu reproduzieren, wobei „Energie“ im kanonischen Formalismus (zumindest für nicht explizit zeitabhängige Lagrange-Funktionen) mit der Hamilton-Funktion der physikalischen Bahn zu identifizieren ist. Schließlich sollen sich alle neuen (relativistischen) Ergebnisse im nicht-relativistischen Limes auf die altbekannten Formeln reduzieren.

Ein geeignetes Wirkungsfunktional, das alle diese Bedingungen erfüllt und außerdem Lorentz-invariant ist¹, wurde bereits 1906 von Max Planck angegeben:

$$S_M = S_1^2[x] = -m_0 c \int_1^2 ds = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} dt' \frac{1}{\gamma_u(t')}. \quad (3.4)$$

Hierbei sind „1“ und „2“ zwei Ereignisse, die wir einfachheitshalber als „Beginn“ und „Ende“ bezeichnen werden und die in jedem Inertialsystem durch wohldefinierte Orts- und Zeitkoordinaten $x_1^\mu = (ct_1, \mathbf{x}_1)$ und $x_2^\mu = (ct_2, \mathbf{x}_2)$ festgelegt sind. Bei der Variation von S sind x_1^μ und x_2^μ - wie üblich - festzuhalten. Die physikalische Bahn ist - wie üblich - durch Minimierung von S_M zu bestimmen,

$$\mathbf{0} = \frac{\delta S_M}{\delta \mathbf{x}(t)},$$

und man kann S_M in (3.4) - wiederum wie üblich - mit Hilfe einer Lagrange-Funktion formulieren:

$$S_M = \int_{t_1}^{t_2} dt' L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}; t')$$

mit

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}; t) = -\frac{m_0 c^2}{\gamma_u(t)} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{u}(t)}{c}\right)^2} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{c}\right)^2}. \quad (3.5)$$

Im nicht-relativistischen Limes erhält man:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}; t) &\sim -m_0 c^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}\right)^2 + \dots \right] \\ &\sim \frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{x}}^2 + \text{vollständige Zeitableitung}, \end{aligned}$$

¹In diesem Kapitel wird die Wirkung stets eine *Lorentz-invariante* Größe sein. Dennoch ist es vielleicht gut zu beachten, dass die Lorentz-Invarianz der Wirkung logisch nicht *zwingend* erforderlich ist: Nur die *Bewegungsgleichungen* (und somit alle Messgrößen) müssen unbedingt Lorentz-kovariant sein. Wie in der nicht-relativistischen Mechanik gilt auch in der Relativitätstheorie, dass die Bewegungsgleichungen forminvariant sind unter Transformationen der Lagrange-Funktion der Form $L \rightarrow L' = L + \frac{d}{dt} \lambda(\mathbf{x}, t)$, da in diesem Fall $S \rightarrow S' = S + \lambda(\mathbf{x}_2, t_2) - \lambda(\mathbf{x}_1, t_1)$ gilt. Durch eine „geeignete“ Wahl von $\lambda(\mathbf{x}, t)$ könnte man die Lorentz-Invarianz von S also prinzipiell zerstören. Es sei auch daran erinnert, dass die Wirkung in der nicht-relativistischen Mechanik, trotz der Galilei-Kovarianz aller Bewegungsgleichungen, selbst nicht Galilei-invariant ist (s. Gleichung (??)).

so dass L sich (abgesehen von physikalisch irrelevanten Termen) auf das altbekannte Ergebnis reduziert. Die Bewegungsgleichung des kräftefreien Teilchens folgt aus (3.5) als:

$$\mathbf{0} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) = - \frac{d}{dt} \left[-m_0 c^2 \frac{(-\dot{\mathbf{x}}/c^2)}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{x}}^2/c^2)}} \right] = -m_0 \frac{d}{dt} \left(\gamma_u \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) . \quad (3.6)$$

Die Lösung von (3.6) lautet schlichtweg, dass $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ und daher auch γ_u konstant (d. h. zeitunabhängig) sein müssen, so dass (3.6) auch in der Form

$$0 = \gamma_u \frac{d}{dt} \left[\gamma_u \frac{d}{dt} (ct, \mathbf{x}) \right] = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

geschrieben werden kann. Das Wirkungsfunktional (3.4) reproduziert also tatsächlich die Bewegungsgleichung des relativistischen kräftefreien Teilchens.

Nach dem Hamilton'schen Prinzip soll die Wirkung für die physikalische Bahn im Allgemeinen *extremal* sein. Für das Wirkungsfunktional S_M in (3.4) kann man jedoch unschwer zeigen, dass es für die physikalische Bahn auch wirklich *minimal* ist. Dies folgt aus der Lorentz-Invarianz von S_M : Wir nehmen an, dass der Abstand zwischen den Ereignissen 1 und 2 zeitartig ist (sonst gäbe es gar keine Bahn zwischen beiden). In diesem Fall gibt es ein Inertialsystem K' , in dem beide Ereignisse am selben Ort auftreten ($\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}'_2$). Der Gesamtabstand zwischen 1 und 2,

$$\int_1^2 ds = c \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \frac{1}{\gamma_{u'}(t')} ,$$

wird nun sicherlich durch ein in K' am Ort ($\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}'_2$) ruhendes Teilchen ($\mathbf{u}' = \mathbf{0}$ und daher $\gamma_{u'} = 1$) *maximiert*, denn jede Bewegung ($\mathbf{u}' \neq \mathbf{0}$ und daher $\gamma_{u'} > 1$) führt zu einem kleineren Wert des Gesamtabstands. Folglich *minimiert* das in K' ruhende Teilchen das Wirkungsfunktional, zumindest in diesem speziellen Bezugssystem. Aus der Lorentz-Invarianz der Wirkung (3.4) und dem gerade hergeleiteten Ergebnis in K' folgt nun mittels einer Lorentz-Transformation, dass die optimale Bahn in jedem Inertialsystem geradlinig-gleichförmig sein *muss*. Hiermit ist gezeigt, dass S_M in (3.4) tatsächlich in allen Inertialsystemen durch die physikalische Bahn minimiert wird.

Wir betrachten nun die Hamilton'sche Variante des kanonischen Formalismus. Der Impuls ist gemäß

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{m_0 \dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{x}}^2/c^2)}} = \gamma_u m_0 \mathbf{u}$$

mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} des Teilchens verknüpft. Folglich gibt es auch eine einfache Beziehung zwischen dem 3-Impuls und den räumlichen Komponenten der 4-Geschwindigkeit $u^\mu = \gamma_u(1, \boldsymbol{\beta}_u)$:

$$p_i = m_0 \gamma_u u_i = m_0 c u^i ,$$

wobei u_i und u^i die i -te Komponente von \mathbf{u} bzw. u^μ darstellen. Die *Energie* des Teilchens ist durch

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\dot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = \frac{m_0 \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{x}}^2/c^2)}} - \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} \right) \\ &= \gamma_u m_0 c^2 [\beta^2 + (1 - \beta^2)] = \gamma_u m_0 c^2 = m_0 c^2 u^0\end{aligned}\quad (3.7)$$

gegeben. Kombination mit unserem Ergebnis für den 3-Impuls zeigt, dass

$$p^\mu \equiv \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right) = m_0 c u^\mu \quad \text{bzw.} \quad p_\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\mathbf{p} \right) = m_0 c u_\mu ,$$

ein kontra- bzw. kovarianter 4-Vektor, den 4-Impuls darstellt. Aus der Normierung der 4-Geschwindigkeit, $u_\mu u^\mu = 1$, folgt noch

$$(m_0 c)^2 = (m_0 c)^2 u_\mu u^\mu = p_\mu p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2$$

und daher:

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4} . \quad (3.8)$$

Im nicht-relativistischen Limes reduzieren sich (3.7) und (3.8) auf die Ausdrücke

$$\mathcal{E}(\dot{\mathbf{x}}) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{x}}^2 + \dots \quad , \quad \mathcal{E}(\mathbf{p}) = m_0 c^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + \dots ,$$

die neben der altbekannten kinetischen Energie auch die Ruheenergie $m_0 c^2$ enthalten. Es ist zu beachten, dass der Energienullpunkt eines Teilchens oder eines Körpers in der Relativitätstheorie exakt festgelegt ist: Wird die Ruhemasse eines Teilchens vollständig in Strahlung umgewandelt, so ist die Restenergie per definitionem Null. Dies steht im Gegensatz zur nicht-relativistischen Klassischen Mechanik, in der der Energienullpunkt eines Körpers beliebig gewählt werden kann. Die Energie eines ultrarelativistischen Teilchens oder eines „Teilchens“ der Ruhemasse $m_0 = 0$ (z. B. eines Photons) folgt aus (3.8) als $\mathcal{E} = pc$; der entsprechende Impuls ist daher $p = \mathcal{E}/c$.

Mit der Energie-Impulsrelation (3.8) hat man auch bereits die Form der Hamilton-Funktion eines kräftefreien Teilchens bestimmt:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4} .$$

Die Hamilton-Gleichungen lauten:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad , \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p} c^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}} .$$

Wir schließen hieraus wiederum, dass $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}$ für das kräftefreie Teilchen konstant ist, so dass eine geradlinig-gleichförmige Bewegung vorliegt.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass der kanonische Formalismus nicht nur für einzelne Teilchen („Elementarteilchen“), sondern auch für ausgedehnte Körper anwendbar ist.

Wir zeigen nun, dass der kanonische Formalismus auch in manifest kovarianter Form darstellbar ist. Hierzu gehen wir von der Wirkung

$$S_M = -m_0 c \int_1^2 ds$$

aus und wenden das Prinzip der kleinsten Wirkung an, nach dem die Variation der Wirkung bei festgehaltenen Endpunkten ($\delta x_1^\mu = \delta x_2^\mu = 0$),

$$\begin{aligned}
 \delta S_M &= -m_0 c \int_1^2 \delta(ds) = -m_0 c \int_1^2 \delta(\sqrt{dx_\mu dx^\mu}) \\
 &= -m_0 c \int_1^2 \frac{dx^\mu}{ds} \delta(dx_\mu) = -m_0 c \int_1^2 u^\mu d(\delta x_\mu) \\
 &= -m_0 c u^\mu \delta x_\mu \Big|_1^2 + m_0 c \int_1^2 \delta x_\mu \frac{du^\mu}{ds} ds
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Null sein soll für beliebige Variationen δx_μ :

$$\delta S_M = m_0 c \int_1^2 \delta x_\mu \frac{du^\mu}{ds} ds = 0 .$$

Es folgt $\frac{du^\mu}{ds} = 0$, so dass die physikalische Bahn x_ϕ^μ wiederum einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung entspricht. Definieren wir nun die Funktion

$$\Sigma(x) \equiv S_{x_1}^x[x_\phi] ,$$

die die Wirkung des physikalischen Pfades in Abhängigkeit von den Koordinaten des Endpunkts (bei festgehaltenem $x_1 = (ct_1, \mathbf{x}_1)$) beschreibt. Wegen $m_0 c u^\mu = p^\mu$ folgt aus (3.9): $\delta \Sigma = -p^\mu \delta x_\mu$ und daher:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x_\mu} = \partial^\mu \Sigma = -p^\mu . \tag{3.10}$$

Die Ableitung des Lorentz-Skalars Σ nach dem 4-Ortsvektor ergibt wiederum einen 4-Vektor, nämlich den 4-Impulsvektor. Gleichung (3.10) ist die Lorentz-invariante Verallgemeinerung der nicht-relativistischen Gleichungen (??) und (??). Aus der Normierung des 4-Impulses ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für $\Sigma(x)$:

$$(m_0 c)^2 = p_\mu p^\mu = (\partial_\mu \Sigma)(\partial^\mu \Sigma) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 , \tag{3.11}$$

die die relativistische Verallgemeinerung der Hamilton-Jacobi-Gleichung (??) darstellt. Da im nicht-relativistischen Limes

$$-\frac{\partial \Sigma_{\text{NR}}}{\partial t} = \mathcal{E}_{\text{NR}} = \mathcal{E} - m_0 c^2 = -\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma + m_0 c^2 t)$$

gilt, ist Σ offenbar gemäß

$$\Sigma = -m_0 c^2 t + \Sigma_{\text{NR}} \tag{3.12}$$

mit der nicht-relativistischen Wirkung verknüpft. Einsetzen von (3.12) in (3.11) liefert im Limes $c \rightarrow \infty$ tatsächlich sofort (??) mit $H(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$.

Aus der nicht-relativistischen Mechanik ist bekannt, dass neben dem Impuls und der Energie auch der *Drehimpuls* eines kräftefreien Teilchens (oder eines Teilchens unter der Einwirkung von Zentralkräften) *erhalten* ist: Es gilt $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$ mit

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ x_3 p_1 - x_1 p_3 \\ x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{pmatrix}, \quad L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k.$$

Man erwartet natürlich, dass dieses Erhaltungsgesetz in irgendeiner Form auch in der Relativitätstheorie überlebt. Aufgrund der expliziten Gestalt des Pseudovektors \mathbf{L} erscheint es plausibel, dass seine Komponenten den räumlich-räumlichen Anteil eines antisymmetrischen Tensors bilden könnten, ähnlich der Rolle des \mathbf{B} -Felds im elektromagnetischen Feldtensor $F^{\mu\nu}$. Der Ansatz

$$L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$

führt tatsächlich sofort zum Erfolg:

$$\begin{aligned} \frac{dL^{\mu\nu}}{ds} &= \frac{dx^\mu}{ds} p^\nu + x^\mu \frac{dp^\nu}{ds} - \frac{dx^\nu}{ds} p^\mu - x^\nu \frac{dp^\mu}{ds} \\ &= u^\mu p^\nu - u^\nu p^\mu = m_0 c (u^\mu u^\nu - u^\nu u^\mu) = 0. \end{aligned}$$

Der (echte) antisymmetrische Tensor 2. Stufe $L^{\mu\nu}$ ist daher (im Falle des kräftefreien Teilchens) eine Erhaltungsgröße:

$$L^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & -\mathbf{X}^T & \\ & 0 & L_3 & -L_2 \\ \mathbf{X} & -L_3 & 0 & L_1 \\ & L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{X}, -\mathbf{L}), \quad \mathbf{X} \equiv \frac{\mathcal{E}}{c} \mathbf{x} - \mathbf{p}ct.$$

Neben dem Drehimpuls ist also auch der Vektor \mathbf{X} erhalten, was lediglich bedeutet, dass das Teilchen sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt:

$$\mathbf{x} = \frac{c}{\mathcal{E}} \mathbf{X} + \mathbf{u}t, \quad \mathbf{u} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma_u m_0}.$$

Für den Fall, dass das System N kräftefreie Teilchen enthält, ist der Gesamt-4-Impuls der Materie (Index M) durch

$$p_M^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_M}{c}, \mathbf{p}_M \right), \quad \mathbf{p}_M = \sum_{l=1}^N \mathbf{p}_l, \quad \mathcal{E}_M = \sum_{l=1}^N \mathcal{E}_l, \quad \mathcal{E}_l = \sqrt{\mathbf{p}_l^2 c^2 + m_{0l}^2 c^4}$$

und der Gesamtdrehimpuls-4-Tensor durch

$$L_M^{\mu\nu} = (\mathbf{X}_M, -\mathbf{L}_M), \quad \mathbf{X}_M = \sum_{l=1}^N \left(\frac{\mathcal{E}_l}{c} \mathbf{x}_l - \mathbf{p}_l ct \right), \quad \mathbf{L}_M = \sum_{l=1}^N \mathbf{L}_l$$

gegeben. Die Erhaltungsgesetze lauten nun:

$$\frac{dp_M^\mu}{dt} = 0, \quad \frac{dL_M^{\mu\nu}}{dt} = 0.$$

Das Erhaltungsgesetz für \mathbf{X}_M kann nun aufgrund der Erhaltung der Gesamtenergie auf die Form

$$\frac{1}{\mathcal{E}_M} \sum_{l=1}^N \mathcal{E}_l \mathbf{x}_l = \frac{c}{\mathcal{E}_M} \mathbf{X}_M + \mathbf{u}_M t \quad , \quad \mathbf{u}_M = \frac{c^2}{\mathcal{E}_M} \mathbf{p}_M$$

gebracht werden, die besagt, dass der Schwerpunkt des Gesamtsystems (linkes Glied) sich mit der (konstanten) Geschwindigkeit \mathbf{u}_M bewegt. Im nicht-relativistischen Limes erhält man die üblichen Formeln zurück.

Wie üblich sind die hier hergeleiteten Erhaltungsgesetze mit Invarianzen der Wirkung verknüpft. Die Impulserhaltung folgt aus der Translationsinvarianz im Ortsraum und die Energieerhaltung aus der Translationsinvarianz in der Zeit. Die Erhaltung des Drehimpuls-4-Tensors ist eine Konsequenz der Lorentz-Invarianz. Zusammenfassend läßt sich also sagen, dass die hergeleiteten Erhaltungsgesetze die Invarianz der Wirkung des Systems unter Poincaré-Transformationen widerspiegeln.

3.2 Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld

Wir versuchen nun, ein Wirkungsfunktional für die Ankopplung der Teilchen an das elektromagnetische Feld zu konstruieren. Wir wissen bereits aus Abschnitt [??], s. Gleichung (??), dass der Wechselwirkungsterm in der *nicht-relativistischen* Wirkung die Form

$$S_{\text{WW}} = q \int_{t_1}^{t_2} dt [\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \Phi(\mathbf{x}, t)] \tag{3.13}$$

hat. Andererseits ist es aufgrund unserer Erfahrungen mit kräftefreien Teilchen naheliegend, zu fordern, dass auch der Wechselwirkungsterm im Wirkungsfunktional Lorentz-invariant sein soll. Interessanterweise *ist* die Wechselwirkung S_{WW} in (3.13) bereits Lorentz-invariant. Mit $u_\mu = \gamma_u(1, -\boldsymbol{\beta})$ und $A^\mu = (\Phi, c\mathbf{A})$ folgt nämlich:

$$S_{\text{WW}} = q \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_u} [\gamma_u \boldsymbol{\beta} \cdot (c\mathbf{A}) - \gamma_u \Phi] = -\frac{q}{c} \int_1^2 ds u_\nu A^\nu .$$

Die Gesamtwirkung für das Wechselwirkungsproblem lautet also:

$$\begin{aligned} S_{M+\text{WW}} &= \int_1^2 ds \left(-m_0 c - \frac{q}{c} u_\nu A^\nu \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}} + q \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} - q \Phi \right) , \end{aligned} \tag{3.14}$$

wobei (3.13) mit dem Planck'schen Wirkungsfunktional (3.4) für das kräftefreie Teilchen kombiniert wurde. Der Integrand in (3.14) stellt die Lagrange-Funktion

eines geladenen Teilchens in Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern dar.

Wir bestimmen zunächst die relevanten Ausdrücke für den kanonischen Impuls, die Energie und die Hamilton-Funktion. Der *kanonische Impuls* folgt aus der Lagrange-Funktion in (3.14) als

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \gamma_u m_0 \mathbf{u} + q \mathbf{A} = \boldsymbol{\pi} + q \mathbf{A} ,$$

wobei wir den *kinetischen Impuls* $\boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{p} - q \mathbf{A} = \gamma_u m_0 \mathbf{u}$ eingeführt haben. Die entsprechenden 4-Vektoren sind durch

$$p^\mu = m_0 c u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu = \pi^\mu + \frac{q}{c} A^\mu , \quad \pi^\mu \equiv p^\mu - \frac{q}{c} A^\mu = m_0 c u^\mu \quad (3.15)$$

gegeben. Die *Hamilton-Funktion* folgt in gewohnter Weise aus der Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{u} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} - L \\ &= \mathbf{u} \cdot (\gamma_u m_0 \mathbf{u} + q \mathbf{A}) - \left(\frac{-m_0 c^2}{\gamma_u} + q \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} - q \Phi \right) \\ &= \gamma_u m_0 c^2 \left(\frac{\mathbf{u}^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma_u^2} \right) + q \Phi = \gamma_u m_0 c^2 + q \Phi(\mathbf{x}, t) , \end{aligned} \quad (3.16)$$

wobei allerdings (analog zum nicht-wechselwirkenden Fall) die Geschwindigkeit \mathbf{u} durch den kanonischen Impuls zu ersetzen ist:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) &= \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q \Phi \\ &= \sqrt{(\mathbf{p} - q \mathbf{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q \Phi . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ein Vergleich von (3.16) und (3.15) zeigt, dass die zeitliche Komponente p^0 des 4-Impulses nun durch H/c gegeben ist, so dass $p^\mu = \left(\frac{H}{c}, \mathbf{p} \right)$ gilt. Die Hamilton-Funktion (3.16) oder (3.17) darf nun jedoch *nicht* als die Energie des Teilchens interpretiert werden: Der erste Term im rechten Glied von (3.16) oder (3.17) stellt zwar - wie im nicht-wechselwirkenden Fall - die kinetische Energie inklusive der Ruheenergie dar, aber der zweite Term kann nicht als potentielle Energie interpretiert werden (er ist nicht einmal eichinvariant). Wir folgern hieraus, dass die Summe von kinetischer Energie und Ruheenergie nach wie vor durch

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \gamma_u m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}}$$

gegeben ist, nun aber im Allgemeinen (wegen der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld) keine Erhaltungsgröße sein kann.

Wir betrachten noch einmal die Wirkung (3.14) in manifest kovarianter Form und leiten die Bewegungsgleichung für ein relativistisches geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld her. Mit Hilfe der Identität $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$ erhalten

wir aufgrund des Hamilton'schen Prinzips:

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S_{M+WW} = \delta \int_1^2 (-m_0 c ds - \frac{q}{c} A^\nu dx_\nu) \\
 &= \int_1^2 \left[-m_0 c \frac{dx^\mu}{ds} d(\delta x_\mu) - \frac{q}{c} A^\nu d(\delta x_\nu) - \frac{q}{c} (\partial^\mu A^\nu) (\delta x_\mu) dx_\nu \right] \\
 &= -\left(m_0 c u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu \right) \delta x_\mu \Big|_1^2 \\
 &\quad + \int_1^2 \delta x_\mu \left[m_0 c \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{q}{c} (\partial^\nu A^\mu) \frac{dx_\nu}{ds} - \frac{q}{c} (\partial^\mu A^\nu) \frac{dx_\nu}{ds} \right] ds . \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Man erhält die *Bewegungsgleichung* des geladenen Teilchens wie gewohnt durch Minimierung von S_{M+WW} bei festgehaltenen Endpunkten:

$$m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m_0 c^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = q u_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = q u_\nu F^{\mu\nu} = K^\mu .$$

Die Wirkung (3.14) beschreibt also tatsächlich die relativistische Dynamik eines geladenen Teilchens unter der Einwirkung der Lorentz-Kraft. Führen wir wieder die Funktion

$$\Sigma(x) = S_{x_1}^x[x_\phi]$$

ein, so erhalten wir aus (3.18) durch Ableiten nach dem 4-Ortsvektor:

$$p^\mu = -\frac{\partial \Sigma}{\partial x_\mu} = m_0 c u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu = \pi^\mu + \frac{q}{c} A^\mu .$$

Die Identität $\pi^\mu \pi_\mu = (m_0 c)^2 u^\mu u_\mu = (m_0 c)^2$ liefert nun die relativistische Variante der Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 (m_0 c)^2 &= (-\pi^\mu)(-\pi_\mu) = (\partial^\mu \Sigma + \frac{q}{c} A^\mu)(\partial_\mu \Sigma + \frac{q}{c} A_\mu) \\
 &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + q\Phi \right)^2 - (\nabla \Sigma - q\mathbf{A})^2 .
 \end{aligned}$$

Man erhält die nicht-relativistische Variante dieser Gleichung wiederum durch die Substitution $\Sigma = -m_0 c^2 t + \Sigma_{NR}$, wie in (3.12).

Die relativistische Bewegungsgleichung hat also die Form

$$\begin{aligned}
 m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= m_0 \gamma_u \frac{d}{dt} (c u^\mu) = \gamma_u \frac{d\pi^\mu}{dt} \\
 &= K^\mu = q \gamma_u (\mathbf{E} \cdot \beta_u, \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) .
 \end{aligned}$$

Mit $\pi^\mu = m_0 c u^\mu = \gamma_u m_0 c (1, \beta_u)$ folgt daher einerseits für den dreidimensionalen kinetischen Impuls:

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad , \quad \boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u} \quad (3.19)$$

und andererseits für die Energieänderung des Teilchens durch die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma_u m_0 c^2) = \frac{d}{dt} (\pi^0 c) = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} , \quad (3.20)$$

wobei das rechte Glied die Leistung darstellt, die das elektromagnetische Feld am Teilchen verrichtet. Interessant ist noch, dass auch die relativistischen Bewegungsgleichungen (3.19) und (3.20) invariant sind unter *Zeitumkehr*, da in diesem Fall $(\boldsymbol{\pi}, t, \mathbf{u}, \mathbf{B})$ das Vorzeichen wechseln und q und \mathbf{E} invariant sind. Analog findet man, dass (3.19) und (3.20) invariant sind unter einer *Raumspiegelung am Ursprung*, wobei die Felder gemäß $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ transformiert werden.

Abgesehen von diesen *diskreten* Symmetrien weist die Theorie zwei *kontinuierliche* Symmetrien auf, denn abgesehen von der offensichtlichen Lorentz-Invarianz der Wirkung liegt wiederum eine Eichinvarianz vor: Ersetzt man das 4-Potential A^μ durch $(A')^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, wobei Λ - wie wir gesehen haben - unbedingt ein Lorentz-Skalar sein muss, damit der 4-Vektorcharakter von A^μ erhalten bleibt, dann wird die Wirkung gemäß

$$\begin{aligned} S \rightarrow S' &= \int_1^2 \left[-m_0 c ds - \frac{q}{c} dx_\nu (A^\nu + \partial^\nu \Lambda) \right] \\ &= S - \frac{q}{c} \int_1^2 (\partial^\nu \Lambda) dx_\nu = S - \frac{q}{c} \int_1^2 d\Lambda = S - \frac{q}{c} [\Lambda(2) - \Lambda(1)] \end{aligned}$$

transformiert. Man sieht also einerseits, dass sich bei einer Variation der Wirkung bei festgehaltenen Endpunkten nichts ändert: Die von S und S' vorhergesagten physikalischen Bahnen sind identisch. Andererseits ist klar, dass die Transformationseigenschaften der Wirkung sich nicht durch die Eichtransformation ändern: Die Wirkung S' ist Lorentz-invariant, wenn S dies ist, da die Funktion Λ in der Eichtransformation ein Lorentz-Skalar sein muss. Wir weisen übrigens auf eine Subtilität im obigen Nachweis der Eichinvarianz hin, auf die im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden soll: Implizit wurde in den verschiedenen Rechenschritten angenommen, dass die Ladung q des Teilchens *zeitunabhängig* und für alle möglichen Bahnen in der Wirkung gleich ist. Obwohl diese Annahme bei der Beschreibung der Dynamik einzelner Teilchen extrem plausibel oder gar trivial erscheint, ahnt man bereits hier einen tieferen Zusammenhang zwischen den Konzepten der *Eichinvarianz* und der *Ladungserhaltung*.

3.3 Das Wirkungsfunktional der Felder

Wir betrachten das elektromagnetische Feld zunächst isoliert, d. h. nicht an die Teilchen gekoppelt. Die klassische Beschreibung der Teilchen und die klassische Beschreibung der Felder sind insofern wesentlich voneinander verschieden, als die Koordinaten der Teilchen - auch wenn diese eine endliche Ausdehnung haben - wohldefiniert sind, während die Felder sich prinzipiell über den ganzen Ortsraum ausbreiten können. Jeder Punkt des Ortsraums trägt so zur Lagrange-Funktion (und somit zur Wirkung) bei, und man erwartet daher ein Wirkungsfunktional der Form:

$$S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt L_F(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_F, \quad (3.21)$$

wobei die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_F nun von den Feldern $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ oder - äquivalent - vom 4-Potential $A^\mu(x)$ abhängt:

$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}[A^\mu, \partial^\nu A^\mu] . \quad (3.22)$$

Wegen der Homogenität der Raum-Zeit erwartet man nicht, dass \mathcal{L}_F explizit von x^μ abhängig ist. Die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen für die klassische Feldtheorie (3.21) und (3.22) ist vollkommen analog zur Herleitung der Lagrange-Gleichungen für ein materielles Teilchen²:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^\mu} \delta A^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \partial^\nu (\delta A^\mu) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \right) \right] \delta A^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial_t A^\mu)} \delta A^\mu \Big|_{t_1}^{t_2} . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Bei der Variation der Wirkung sind die möglichen „Bahnen“ an den Endpunkten, d. h. für $t = t_1$ und $t = t_2$, für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ festzuhalten:

$$\delta A(ct_1, \mathbf{x}) = 0 = \delta A(ct_2, \mathbf{x}) .$$

Der letzte Term in (3.23) ist daher Null, und das Integral im rechten Glied kann nur dann für alle δA^μ Null ergeben, wenn

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \right) = 0 \quad (3.24)$$

gilt. Dies sind - wie angekündigt - die Euler-Lagrange-Gleichungen für das 4-Potential. Die Maxwell-Gleichungen sind alle linear in den *ersten* Ableitungen der \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder und somit linear in den *zweiten* Ableitungen des 4-Potentials. Aus (3.24) folgt nun sofort, dass \mathcal{L}_F eine quadratische Funktion der ersten Ableitungen von A^μ sein muss:

$$\mathcal{L}_F = a_{\mu\nu,\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho A^\sigma) ,$$

wobei wir (o. B. d. A.) annehmen können, dass $a_{\mu\nu,\rho\sigma}$ symmetrisch unter Vertauschung der Indexpaare $(\mu\nu)$ und $(\rho\sigma)$ ist. Fordert man nun³, dass \mathcal{L}_F für alle A^μ invariant ist unter einer Eichtransformation der Form $A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu \Lambda$:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{\mu\nu,\rho\sigma} [(\partial^\mu \tilde{A}^\nu) (\partial^\rho \tilde{A}^\sigma) - (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho A^\sigma)] \\ &= a_{\mu\nu,\rho\sigma} [(\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) (\partial^\rho A^\sigma) + (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda) + (\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda)] \\ &= a_{\mu\nu,\rho\sigma} [2(\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda) + (\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda)] , \end{aligned}$$

so sieht man, dass für alle $(\mu\nu)$:

$$a_{\mu\nu,\rho\sigma} (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda) = 0 \quad (3.25)$$

²Bei der partiellen Integration bezüglich der Ortsvariablen wird verwendet, dass die Randterme nicht beitragen, da die Felder im Unendlichen Null sind.

³Die schwächere Forderung, dass sich die Lagrange-Funktion L_F um eine vollständige Zeitableitung ändern soll, führt nicht zu weiteren Lösungen, da die von der Eichtransformation erzeugten Zusatzterme in \mathcal{L}_F im Allgemeinen nicht zu einer vollständigen Zeitableitung kombiniert werden können.

gilt. Nun ist Λ jedoch ein *beliebiger* Lorentz-Skalar (abgesehen davon, dass er die homogene Wellengleichung $\square\Lambda = 0$ erfüllt), so dass alle Koeffizienten in der partiellen Differentialgleichung (3.25) Null sein müssen, was die Antisymmetrie von $a_{\mu\nu,\rho\sigma}$ unter Vertauschung von ρ und σ erfordert: $a_{\mu\nu,\rho\sigma} = -a_{\mu\nu,\sigma\rho}$ ⁴. Es folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F &= \frac{1}{4}a_{\mu\nu,\rho\sigma}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) \\ &= \frac{1}{4}a_{\mu\nu,\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Wir kommen somit zum wichtigen Schluss, dass \mathcal{L}_F wegen der Form der Maxwell-Gleichungen und wegen der zu fordernden Eichinvarianz der Wirkung unbedingt eine quadratische Funktion des Feldtensors (und somit von \mathbf{E} und \mathbf{B}) sein muss.

Fordert man schließlich noch die Lorentz-Invarianz der Wirkung, dann muss wegen der Invarianz des Volumenelements:

$$dt \, d\mathbf{x} \rightarrow dt' \, d\mathbf{x}' = \left| \det \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right) \right| dt \, d\mathbf{x} = |\det(\Lambda)| dt \, d\mathbf{x} = dt \, d\mathbf{x}$$

die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_F Lorentz-invariant sein. Dies bedeutet, dass $a_{\mu\nu,\rho\sigma}$ in (3.26) ein *echter* Tensor unter Lorentz-Transformationen ist. Hierbei darf $a_{\mu\nu,\rho\sigma}$ jedoch nicht von den Koordinaten und Feldern abhängen und ist somit unabhängig vom Koordinatensystem. Der einzige echte Tensor, der dieselbe Gestalt in allen Inertialsystemen hat, ist jedoch der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ (oder äquivalent: der Einheitsensor $g^\mu{}_\nu$), also muss $a_{\mu\nu,\rho\sigma}$ aus metrischen Tensoren aufgebaut sein. Wegen der Symmetrie muss nun für irgendeine Konstante ε :

$$a_{\mu\nu,\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\varepsilon \begin{vmatrix} g_{\mu\rho} & g_{\mu\sigma} \\ g_{\nu\rho} & g_{\nu\sigma} \end{vmatrix}$$

und somit

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{8}\varepsilon(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = -\frac{1}{4}\varepsilon F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (3.27)$$

gelten. Wir zeigen im Folgenden, dass $\varepsilon = \varepsilon_0$ erforderlich ist, um aus (3.27) die inhomogenen Maxwell-Gleichungen herzuleiten.

Zur Herleitung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen benötigt man natürlich auch die in S_{WW} enthaltenen Teilchenfreiheitsgrade, die gerade die Ladungs- und Stromdichten

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^N q_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l(t)) \quad , \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^N q_l \dot{\mathbf{x}}_l(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l(t))$$

liefern. Es folgt für ein N -Teilchen-System:

$$\begin{aligned}L_{\text{WW}} &= \sum_{l=1}^N q_l [\dot{\mathbf{x}}_l \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_l(t), t) - \Phi(\mathbf{x}_l(t), t)] \\ &= \int d\mathbf{x} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} - \rho\Phi) = -\frac{1}{c} \int d\mathbf{x} j_\mu A^\mu,\end{aligned}$$

⁴Weil $a_{\mu\nu,\rho\sigma}$ symmetrisch unter Vertauschung von $(\mu\nu) \leftrightarrow (\rho\sigma)$ ist, muss $a_{\mu\nu,\rho\sigma}$ auch antisymmetrisch unter Vertauschung von $\mu \leftrightarrow \nu$ sein. Außerdem ist zu beachten, dass die *symmetrische* Lösung $a_{\mu\nu,\rho\sigma} = a g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}$, die aufgrund von $\square\Lambda = 0$ prinzipiell möglich ist, aufgrund der Lorenz-Eichung physikalisch trivial und daher nicht akzeptabel ist:

$$\mathcal{L}_F = a g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu)(\partial^\rho A^\sigma) = a (\partial_\nu A^\nu)(\partial_\sigma A^\sigma) = 0.$$

so dass S_{WW} die Form

$$S_{\text{WW}} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_{\text{WW}} \quad , \quad \mathcal{L}_{\text{WW}} = -\frac{1}{c} j_\mu A^\mu \quad (3.28)$$

hat. Insgesamt gilt also für den hier relevanten Fall, dass $j_\mu(x)$ fest vorgegeben ist:

$$S_{\text{F+WW}} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_{\text{F+WW}} \quad , \quad \mathcal{L}_{\text{F+WW}} = -\frac{1}{4} \varepsilon F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu .$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen für A^μ lauten:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\rho} - \partial^\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\sigma A^\rho)} \right) &= -\frac{1}{c} j_\rho - \left(-\frac{1}{4} \varepsilon \right) \partial^\sigma (2F_{\sigma\rho} - 2F_{\rho\sigma}) \\ &= -\frac{1}{c} j_\rho + \varepsilon \partial^\sigma F_{\sigma\rho} \end{aligned}$$

oder äquivalent:

$$\partial_\sigma F^{\sigma\rho} = \frac{1}{\varepsilon c} j^\rho .$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis nun mit den inhomogenen Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form: $\partial_\sigma F^{\sigma\rho} = \mu_0 c j^\rho = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\rho$, dann folgt sofort $\varepsilon = \varepsilon_0$.

3.3.1 Eichinvarianz der Wirkung des Gesamtsystems

Wir untersuchen nun für das Gesamtsystem von Teilchen und Feldern, die miteinander wechselwirken, die Frage nach der *Eichinvarianz* der Theorie, womit hier konkret gemeint sein soll: die Frage nach dem Transformationsverhalten der *Wirkung* unter Eichtransformationen der Form $A^\mu \rightarrow (A')^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, wobei Λ ein Lorentz-Skalar ist. Da die Lagrange-Funktion L_{M} der Materie das 4-Potential nicht enthält und $L_{\text{F}} = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_{\text{F}}$ nur von $F^{\mu\nu}$ und somit von den (invarianten) physikalischen Feldern (\mathbf{E}, \mathbf{B}) abhängig ist, sind sowohl L_{M} als auch L_{F} manifest eichinvariant. Zur Beantwortung der Frage nach der Eichinvarianz der Theorie braucht man daher nur den Wechselwirkungsterm (3.27) zu untersuchen. Die Lagrange-Funktion $L_{\text{WW}} = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_{\text{WW}}$ ändert sich bei der Eichtransformation um einen Term

$$\begin{aligned} L'_{\text{WW}} - L_{\text{WW}} &= -\frac{1}{c} \int d\mathbf{x} j_\mu \partial^\mu \Lambda = -\frac{1}{c} \int d\mathbf{x} [\partial^0(j_0 \Lambda) - \Lambda(\partial^\mu j_\mu)] \\ &= \frac{1}{c} \int d\mathbf{x} \Lambda(\partial^\mu j_\mu) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int d\mathbf{x} j_0 \Lambda \quad , \end{aligned} \quad (3.29)$$

und folglich ändert sich die Wirkung gemäß

$$\begin{aligned} S' - S &= \int_{t_1}^{t_2} dt (L'_{\text{WW}} - L_{\text{WW}}) \\ &= \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x} \Lambda(\partial^\mu j_\mu) + \text{Konstante} \quad , \end{aligned} \quad (3.30)$$

wobei die (wirkungslose) Konstante von der vollständigen Zeitableitung im rechten Glied von (3.29) herrührt. Wir stellen somit fest:

1. Falls man in der Wirkung nur Bahnen (j^μ, A^μ) zulässt, die Ladungserhaltung ($\partial^\mu j_\mu = 0$) erfüllen, dann ändert sich die Wirkung unter Eichtransformationen nur um eine Konstante und ist die Theorie in diesem Sinne eichinvariant. Hierbei soll die Ladungserhaltung also mittels einer zusätzlichen *Zwangsbedingung* in der Theorie mitberücksichtigt werden.⁵

Besonders interessant ist nun, dass man diese Feststellung auch umkehren kann: Falls man von der Wirkung nicht nur Stationarität ($\delta S' = 0$) bezüglich Variationen ($\delta j^\mu, \delta A^\mu$) der Bahn sondern auch Eichinvarianz fordert:

$$\delta S' = 0 \quad , \quad \frac{\delta S'}{\delta \Lambda(x)} = 0 \quad (ct_1 < x^0 < ct_2) \quad ,$$

so folgt die Ladungserhaltung ($\partial^\mu j_\mu = 0$) automatisch als zusätzliche Bewegungsgleichung. Wir stellen somit zweitens fest:

2. Die Forderung nach der Eichinvarianz der Wirkung impliziert das Gesetz der Ladungserhaltung für alle möglichen im Wirkungsfunktional erlaubten Variationen der physikalischen Bahn.

In diesem Sinne sind die Konzepte der Eichinvarianz und Ladungserhaltung der Theorie *äquivalent*.

3.3.2 Zusammenfassung

Insgesamt hat die Wirkung eines Systems N geladener Teilchen in Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld also die Form

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L \quad , \quad L = L_M + \int d\mathbf{x} (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{\text{WW}}) \quad (3.31)$$

mit

$$L_M = - \sum_{l=1}^N m_{0l} c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}_l}{c}\right)^2} \quad , \quad \mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad , \quad \mathcal{L}_{\text{WW}} = -\frac{1}{c} j_\mu A^\mu .$$

Die Bewegungsgleichungen, d. h. die Lorentz'sche Bewegungsgleichung für die Teilchen⁶ und die inhomogenen Maxwell-Gleichungen für die Felder⁷, folgen alle aus dem Hamilton'schen Prinzip $\delta S = 0$. Die klassische Feldtheorie (3.31) ist Lorentz-invariant und im Sinne von Abschnitt [3.3.1] eichinvariant und erfüllt somit alle Bedingungen, die man an eine Theorie des Elektromagnetismus stellen sollte. Aus theoretischer Sicht ist die einheitliche Beschreibung (3.31) von Teilchen und Feldern einer der Höhepunkte dieser Vorlesung.

⁵Wir erinnern an dieser Stelle daran, dass Ladungserhaltung bisher nur als Eigenschaft der *physikalischen Bahn* des Systems (d. h. der Lösung der Maxwell-Gleichungen) nachgewiesen wurde und a priori nicht notwendigerweise für allgemeine Bahnen (j^μ, A^μ) im Wirkungsfunktional gelten muss.

⁶Bei der Herleitung der Lorentz'schen Bewegungsgleichung ist es zweckmäßig, die diskrete Form L_{WW} der Lagrange-Funktion für die Wechselwirkung zu verwenden; die Kontinuumsbeschreibung mit Hilfe der Lagrange-Dichte \mathcal{L}_{WW} ist vorteilhaft bei der Herleitung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Natürlich ist auch das Caveat in Abschnitt 4.3 über die in der Theorie auftretenden Divergenzen zu beachten.

⁷Die *homogenen* Maxwell-Gleichungen sind trivialerweise erfüllt, da das elektromagnetische Feld mit Hilfe des 4-Potentials beschrieben wird.

3.4 Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Aufgrund des vorigen Abschnitts ist klar, dass das elektromagnetische Feld gewisse *Invarianten* aufweist, d. h. durch physikalische Größen gekennzeichnet ist, die sich unter Lorentz-Transformationen nicht ändern. Solche Invarianten sind natürlich von größter Bedeutung, da es sich hierbei um Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes handelt, die für alle möglichen Beobachter in allen möglichen Inertialsystemen quantitativ gleich sind.

Eine mögliche Invariante, die wir bereits kennen gelernt haben (s. Gleichung (3.27)) ist die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij} \\ &= (-E_i) E_i + E_i (-E_i) + (-\varepsilon_{ijk} c B_k) (-\varepsilon_{ijl} c B_l) \\ &= 2c^2 \delta_{kl} B_k B_l - 2\mathbf{E}^2 = -2[\mathbf{E}^2 - (c\mathbf{B})^2]. \end{aligned}$$

Eine andere Invariante wäre:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= F^{0i} \tilde{F}_{0i} + F^{i0} \tilde{F}_{i0} + F^{ij} \tilde{F}_{ij} \\ &= (-E_i) c B_i + E_i (-c B_i) + (-\varepsilon_{ijk} c B_k) (\varepsilon_{ijl} E_l) \\ &= -2\mathbf{E} \cdot (c\mathbf{B}) - 2\delta_{kl} (c B_k) E_l = -4\mathbf{E} \cdot (c\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Eine dritte naheliegende Möglichkeit:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right) \\ &= F_{\rho\sigma} \tilde{\tilde{F}}^{\rho\sigma} = -F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = 2[\mathbf{E}^2 - (c\mathbf{B})^2] \end{aligned}$$

liefert keine neue Information. Wir schließen hieraus, dass

$$I_1 \equiv \mathbf{E}^2 - (c\mathbf{B})^2 \quad \text{und} \quad I_2 \equiv \mathbf{E} \cdot (c\mathbf{B}) \quad (3.32)$$

invariant sind unter eigentlichen, orthochronen Lorentz-Transformationen $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$. Hierbei ist zu beachten, dass I_1 ein *echter* Skalar ist, d. h. auch invariant ist unter der vollen Lorentz-Gruppe \mathcal{L} , während I_2 das Vorzeichen wechselt unter Raumspiegelungen und somit einen *Pseudoskalar* darstellt. Außerdem ist zu beachten, dass die beiden Invarianten *lokal* definiert sind:

$$I_1'(\mathbf{x}', t') = I_1(\mathbf{x}, t) \quad , \quad I_2'(\mathbf{x}', t') = I_2(\mathbf{x}, t) \quad ,$$

so dass tatsächlich ein 4-fach unendlicher Satz von Lorentz-invarianten Messgrößen vorliegt. Insbesondere folgt aus der Invarianz von (3.32), dass in allen Inertialsystemen an einem bestimmten Raum-Zeit-Punkt $E > cB$ (oder $E < cB$ oder $E = cB$) gilt, falls dies in irgendeinem Inertialsystem gilt, und analog, dass die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder in allen Inertialsystemen an einem bestimmten Raum-Zeit-Punkt orthogonal sind, falls dies in irgendeinem Inertialsystem gilt.

Man kann sich nun fragen, ob es neben I_1 und I_2 noch andere Invarianten der Felder unter \mathcal{L}_+^\uparrow -Transformationen gibt. Die Antwort auf diese Frage ist negativ: I_1 und I_2 sind die *einzigsten* Invarianten. Dies sieht man z. B. daran, dass sich das Transformationsverhalten des Feldtensors $F^{\mu\nu}$ unter \mathcal{L}_+^\uparrow -Transformationen (s. Gleichung (2.12)):

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \quad , \quad \Lambda^\mu_\nu = e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L} - \phi \cdot \mathbf{M}} \quad (3.33)$$

auch als komplexe Drehung des dreidimensionalen komplexen Vektors $\mathbf{F} \equiv \mathbf{E} + ic\mathbf{B}$ darstellen lässt:

$$\mathbf{F}' = R(\alpha - i\phi)\mathbf{F} . \tag{3.34}$$

Die Äquivalenz von (3.33) und (3.34) lässt sich für infinitesimale Drehungen sehr einfach nachweisen. Wegen der Lie-Gruppenstruktur von \mathcal{L}_+^\uparrow gilt (3.34) dann auch für endliche komplexe Drehungen. Für reelle Drehungen $R(\alpha) = e^{-i\alpha\cdot\ell}$ reeller Vektoren ist bekannt, dass die *einzigste* Invariante das Längenquadrat eines Vektors ist. Im Falle komplexer Drehungen komplexer Vektoren ändert sich dies nicht:

$$\mathbf{F}' \cdot \mathbf{F}' = (R\mathbf{F}) \cdot (R\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot (R^T R\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} .$$

Da das Längenquadrat von $\mathbf{F} = \mathbf{E} + ic\mathbf{B}$ gerade durch

$$\mathbf{F}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = [\mathbf{E}^2 - (c\mathbf{B})^2] + 2i\mathbf{E} \cdot (c\mathbf{B}) = I_1 + 2iI_2$$

gegeben ist, sind $I_1 = \text{Re}(\mathbf{F}^2)$ und $I_2 = \frac{1}{2} \text{Im}(\mathbf{F}^2)$ offenbar die einzigen Invarianten des Feldes.

Falls $\mathbf{F}^2 = 0$ gilt, sind die \mathbf{E} - und $c\mathbf{B}$ -Felder betragsmäßig gleich, $E = cB$, und stehen orthogonal aufeinander, $\mathbf{E} \cdot (c\mathbf{B}) = 0$. Alternativ folgt für $\mathbf{F}^2 \neq 0$, dass die Felder in der Form

$$\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{f}} \quad (\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{f}} = 1 \quad , \quad F \in \mathbb{C})$$

darstellbar sind. Der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{f}}$ kann nun mittels einer komplexen Drehung R auf einen beliebigen *reellen* Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}$ abgebildet werden. Es folgt:

$$\mathbf{E}' + ic\mathbf{B}' = \mathbf{F}' = R\mathbf{F} = FR\hat{\mathbf{f}} = F\hat{\mathbf{e}} ,$$

so dass die Felder $\mathbf{E}' = \text{Re}(F)\hat{\mathbf{e}}$ und $c\mathbf{B}' = \text{Im}(F)\hat{\mathbf{e}}$ im neuen Inertialsystem *parallel* sind. Die parallele Ausrichtung der Felder kann also (außer für $\mathbf{F}^2 = 0$) immer mit Hilfe einer geeigneten Lorentz-Transformation realisiert werden. Die komplexe Rotation mit $R\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{e}}$ kann auch leicht geometrisch interpretiert werden (siehe Abbildung 3.1 auf der nächsten Seite). Schreiben wir $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_R + i\mathbf{f}_I$

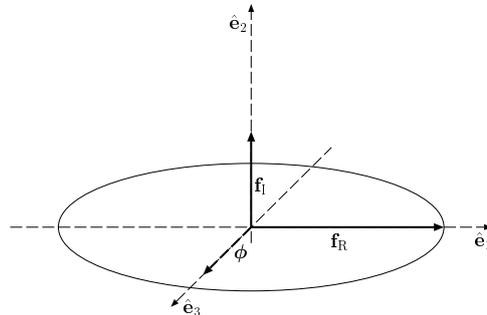


Abbildung 3.1: Geometrische Darstellung des komplexen Einheitsvektors $\hat{\mathbf{f}}$

mit $\mathbf{f}_I \in \mathbb{R}^3$, dann folgt aus der Bedingung

$$\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_R^2 - \mathbf{f}_I^2) + 2i\mathbf{f}_R \cdot \mathbf{f}_I = 1 ,$$

dass die beiden reellen Vektoren \mathbf{f}_R und \mathbf{f}_I senkrecht aufeinander stehen und dass der Realteil \mathbf{f}_R bei fest vorgegebenem Imaginärteil $\mathbf{f}_I \neq \mathbf{0}$ auf einem Kreis mit Radius $|\mathbf{f}_R| = \sqrt{1 + \mathbf{f}_I^2}$ liegt. Falls $\hat{\mathbf{f}}$ bereits reell ist, so dass $\mathbf{f}_I = \mathbf{0}$ gilt, dann liegt \mathbf{f}_R auf der Einheitskugel. Insgesamt durchläuft $\hat{\mathbf{f}}$ also eine vierdimensionale Menge. Es sei nun ein komplexer Vektor $\hat{\mathbf{f}}$ mit $\mathbf{f}_I \neq \mathbf{0}$ gegeben. Wir wählen die Koordinatenachsen so, dass $\mathbf{f}_R = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1$ und $\mathbf{f}_I = x_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ gilt. Man überprüft leicht, dass die komplexe Rotation $R(-i\phi)$ mit $\phi = \operatorname{artanh}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \hat{\mathbf{e}}_3$ den Vektor $\hat{\mathbf{f}}$ auf den reellen Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}_1$ abbildet. Nach der komplexen Rotation (oder äquivalent: nach der Lorentz-Transformation) zeigen die Felder \mathbf{E}' und \mathbf{B}' in diesem Beispiel also in die $\hat{\mathbf{e}}_1$ -Richtung.

3.5 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

Man erwartet physikalisch, dass der Gesamtimpuls und die Gesamtenergie des Systems wechselwirkender Teilchen und Felder erhalten sind. Unser Verständnis der Energie und des Impulses der Teilchen ist mittlerweile recht gut: Aus Abschnitt [3.2] (s. Gleichungen (3.19) und (3.20)) wissen wir, dass sich die *Energie* (d. h. die Summe der kinetischen Energie und der Ruheenergie) eines Teilchens gemäß

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u} \quad , \quad \mathcal{E} = \gamma_u m_0 c^2$$

ändert, wobei das rechte Glied offensichtlich die vom Feld am Teilchen verrichtete Leistung darstellt. Außerdem wissen wir, dass der *kinetische Impuls* die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \quad , \quad \boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u}$$

erfüllt, die einfach besagt, dass die auf das Teilchen wirkende Kraft die Lorentz-Kraft ist. Da man normalerweise ein elektromagnetisches Feld in Wechselwirkung mit *vielen* geladenen Teilchen betrachtet, benötigen wir eine Verallgemeinerung der obigen Gleichungen, die auch für Vielteilchensysteme gültig ist. Hierzu betrachten wir N materielle Teilchen (mit Ladungen q_l und Ruhemassen m_{0l}) in einem elektromagnetischen Feld im dreidimensionalen Raum. Energie und Impuls dieser Materie erfüllen die Gleichungen:

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{dt} = \sum_{l=1}^N q_l \mathbf{E}(\mathbf{x}_l, t) \cdot \mathbf{u}_l \quad , \quad \mathcal{E}_M = \sum_{l=1}^N \mathcal{E}_l \quad , \quad \mathcal{E}_l = \gamma_{u_l} m_{0l} c^2$$

und

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}_M}{dt} = \sum_{l=1}^N q_l [\mathbf{E}(\mathbf{x}_l, t) + \mathbf{u}_l \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_l, t)] \quad , \quad \boldsymbol{\pi}_M = \sum_{l=1}^N \boldsymbol{\pi}_l \quad , \quad \boldsymbol{\pi}_l = \gamma_{u_l} m_{0l} \mathbf{u}_l ,$$

die sich mit Hilfe der üblichen Definitionen der Strom- und Ladungsdichten,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^N q_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \quad , \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^N q_l \mathbf{u}_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \quad ,$$

auch als

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

und

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}_M}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \mathbf{f}_{\text{Lor}} \quad , \quad \mathbf{f}_{\text{Lor}} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

schreiben lassen. Hierbei ist $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ die *Dichte* der vom Feld am Teilchen verrichteten Leistung und \mathbf{f}_{Lor} analog die Lorentz-Kraft*dichte*. In einem endlichen Raumbereich $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, der $N_{\mathcal{D}} \leq N$ Teilchen enthält, folgt analog für die Energie $\mathcal{E}_{M,\mathcal{D}}$ und den Impuls $\boldsymbol{\pi}_{M,\mathcal{D}}$ der $N_{\mathcal{D}}$ Teilchen:

$$\frac{d\mathcal{E}_{M,\mathcal{D}}}{dt} = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad , \quad \frac{d\boldsymbol{\pi}_{M,\mathcal{D}}}{dt} = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \mathbf{f}_{\text{Lor}} \quad .$$

Hierbei sollte der Raumbereich \mathcal{D} so gewählt werden, dass sich keine Teilchen genau auf dem Rand $\partial\mathcal{D}$ befinden, da in diesem Fall die Integration über die in ρ und \mathbf{j} enthaltenen Deltafunktionen nicht definiert ist. Dies bedeutet physikalisch, dass man bei Betrachtungen der Energie- und Impulsbilanzen genaue Information über die Zahl

$$N_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \sum_{l=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)$$

der am Energie- bzw. Impulsaustausch beteiligten Teilchen benötigt.

Aufgrund des Energieerhaltungsgesetzes erwartet man, dass die Leistung $\int d\mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ dem Felde verloren geht, so dass die zeitliche Ableitung der Energiedichte des Feldes einen Term $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ enthalten sollte. Wir schreiben diesen Term daher um mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen und der Identität $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{b})$:⁸

$$\begin{aligned} -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} &= -\mathbf{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) + \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial \rho_{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad , \end{aligned} \tag{3.35}$$

⁸Diese Identität kann wie folgt bewiesen werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \varepsilon_{ijk} \partial_i (a_j b_k) = \varepsilon_{ijk} (a_j \partial_i b_k + b_k \partial_i a_j) \\ &= -\varepsilon_{jik} a_j \partial_i b_k + \varepsilon_{kij} b_k \partial_i a_j = \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{b}) \quad . \end{aligned}$$

wobei wir die Energiedichte

$$\rho_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2)$$

und den Vektor

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

der als *Poynting-Vektor* bezeichnet wird, eingeführt haben. Die Interpretation von (3.35) ist offensichtlich: Die Energiedichte $\rho_{\mathcal{E}}$ des Feldes kann sich an einem fest vorgegebenen Punkt im Ortsraum entweder durch Wechselwirkung mit der Materie oder durch das Auftreten von Energieströmen zeitlich ändern. Dementsprechend ist der Poynting-Vektor auch eindeutig als die *Energiestromdichte* zu identifizieren. Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes erhält man eine Integraldarstellung von (3.35):

$$\frac{d\mathcal{E}_{\mathcal{M},\mathcal{D}}}{dt} = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = - \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \left(\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial \rho_{\mathcal{E}}}{\partial t} \right),$$

oder äquivalent⁹:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{E}_{\mathcal{M},\mathcal{D}} + \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \rho_{\mathcal{E}} \right) = - \int_{\partial\mathcal{D}} d\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}.$$

Die Summe der Energien von Teilchen und Feldern im Raumbereich \mathcal{D} kann sich also nur dadurch ändern, dass Energieströme durch die Oberfläche dieses Raumbereichs auftreten.¹⁰ Umfasst der Raumbereich \mathcal{D} den ganzen Ortsraum, dann ist das Oberflächenintegral im rechten Glied Null und die obige Gleichung drückt die Erhaltung der Gesamtenergie des Systems aus:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{E}_{\mathcal{M},\mathbb{R}^3} + \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \rho_{\mathcal{E}} \right) = 0.$$

Dieses Energieerhaltungsgesetz wird auch als *Poynting-Theorem* bezeichnet.

Analog erwarten wir aufgrund der Impulserhaltung, dass das Feld im Raumbereich \mathcal{D} pro Zeiteinheit den Impuls $\int d\mathbf{x} \mathbf{f}_{\text{Lor}}(\mathbf{x}, t)$ an die Materie abgibt, so dass die zeitliche Ableitung der Impulsdichte des Feldes einen Term $-\mathbf{f}_{\text{Lor}}$ enthalten sollte. Wir schreiben diesen Term mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen um:

$$\begin{aligned} -\mathbf{f}_{\text{Lor}} &= -(\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) = -\varepsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \\ &= \varepsilon_0[-(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - c^2(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] + \varepsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \right] \\ &= \varepsilon_0[-(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &\quad - c^2(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + c^2\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t}, \end{aligned}$$

⁹Hierbei bezeichnet $d\mathbf{F}$ im Oberflächenintegral das Flächenelement.

¹⁰In diesem Argument wird explizit angenommen, dass während der „Messperiode“ keine Teilchen die Oberfläche $\partial\mathcal{D}$ durchqueren.

verwenden die Identität $\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{a}^2) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} -(\mathbf{f}_{\text{Lor}})_j &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_j}{\partial t} + \varepsilon_0 [-E_j \partial_i E_i - c^2 B_j \partial_i B_i - E_i \partial_i E_j - c^2 B_i \partial_i B_j \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_j (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2)] \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_j}{\partial t} + \varepsilon_0 \partial_i [-E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2)] . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Führen wir also die dreidimensionale Matrix

$$T_{ij}^{\text{Mw}} \equiv \varepsilon_0 [E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2)]$$

und die Notation $(\nabla \cdot T^{\text{Mw}})_j \equiv \partial_i T_{ij}^{\text{Mw}}$ ein, dann lässt sich (3.36) auch als

$$-\mathbf{f}_{\text{Lor}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \nabla \cdot (-T^{\text{Mw}}) \quad (3.37)$$

schreiben. Wir erhalten insgesamt:

$$\frac{d\pi_{\text{M},\mathcal{D}}}{dt} = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \mathbf{f}_{\text{Lor}} = - \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \nabla \cdot (-T^{\text{Mw}}) \right]$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \left[\pi_{\text{M},\mathcal{D}} + \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{S} \right) \right] = - \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \nabla \cdot (-T^{\text{Mw}}) = - \int_{\partial \mathcal{D}} d\mathbf{F} \cdot (-T^{\text{Mw}}) . \quad (3.38)$$

Die Interpretation dieser Gleichungen ist wiederum klar: In Gleichung (3.37) stellt $\frac{1}{c^2} \mathbf{S}$ die Impulsdichte und $-T^{\text{Mw}}$ die Impulsstromdichte dar. Gleichung (3.38) besagt, dass sich der Gesamtimpuls der Teilchen und Felder im Raumbereich \mathcal{D} lediglich durch Feldimpulsströme durch die Oberfläche dieses Raumbereichs ändern kann.¹¹ Die Matrix T^{Mw} wird als der Maxwell'sche Spannungstensor bezeichnet. Umfasst der Raumbereich \mathcal{D} den ganzen Ortsraum, so ist das rechte Glied von (3.38) Null und diese Gleichung reduziert sich auf die einfache Form

$$\frac{d}{dt} \left[\pi_{\text{M},\mathbb{R}^3} + \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{S} \right) \right] = \mathbf{0} ,$$

die die Erhaltung des Gesamtimpulses des Systems ausdrückt.

Wir versuchen nun, eine 4-Darstellung der Bilanzgleichungen (3.35) und (3.37) für die Energie bzw. den Impuls zu konstruieren. Die *linken* Glieder bilden zusammen die Komponenten eines 4-Vektors, die 4-Lorentz-Kraftdichte:

$$\begin{aligned} f^\mu &\equiv \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = \frac{1}{c} (F^{\mu 0} j_0 + F^{\mu k} j_k) \\ &= \frac{1}{c} ((-E_k)(-j_k) , E_i c \rho + (-c \varepsilon_{ikl} B_l)(-j_k)) \\ &= \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} , \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) = \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} , \mathbf{f}_{\text{Lor}} \right) . \end{aligned}$$

¹¹Auch in diesem Argument wird explizit vorausgesetzt, dass während der „Messperiode“ keine Teilchen von außen oder innen die Oberfläche $\partial \mathcal{D}$ durchqueren.

Da $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ im linken Glied von (3.35) also kein Skalar, sondern die nullte Komponente eines 4-Vektors ist, kann das rechte Glied von (3.35) nicht als 4-Divergenz eines 4-Vektors $(\rho_{\mathcal{E}}, \frac{1}{c}\mathbf{S})$ interpretiert werden. Wir lernen hieraus, dass $\rho_{\mathcal{E}}$ und $\frac{1}{c}\mathbf{S}$ zusammen mit dem Maxwell'schen Spannungstensor die Komponenten eines symmetrischen 4-Tensors zweiter Stufe bilden! Durch Kombination von (3.35) und (3.37) erhalten wir:

$$-f^{\mu} = \partial_{\nu} T^{\mu\nu} = \partial_{\nu} T^{\nu\mu} \quad , \quad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_{\mathcal{E}} & \frac{1}{c}\mathbf{S}^{\text{T}} \\ \frac{1}{c}\mathbf{S} & -T^{\text{Mw}} \end{pmatrix} . \quad (3.39)$$

Interessanterweise bestimmt der Poynting-Vektor \mathbf{S} sowohl die Energiestromdichte als auch die Impulsdichte des Feldes. Es ist recht einfach, eine manifest kovariante Form für $T^{\mu\nu}$ zu finden:

$$T^{\mu\nu} = -\varepsilon_0 F^{\mu\rho} F^{\nu}_{\rho} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{F}} = \varepsilon_0 (-F^{\mu\rho} F^{\nu}_{\rho} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) , \quad (3.40)$$

denn dieser Tensor ist auf jeden Fall symmetrisch und hat als zeitlich-zeitliche Komponente:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \varepsilon_0 [-F^{0i} F^0_i + \frac{1}{4} (-2)(\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2)] \\ &= \varepsilon_0 [-(-E_i) E_i - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} c^2 \mathbf{B}^2] = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) = \rho_{\mathcal{E}} , \end{aligned}$$

als räumlich-zeitliche Komponenten:

$$T^{i0} = -\varepsilon_0 F^{i\rho} F^0_{\rho} = -\varepsilon_0 F^{ij} F^0_j = -\varepsilon_0 (-c \varepsilon_{ijk} B_k) E_j = \frac{1}{\mu_0 c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i = \frac{1}{c} S_i$$

und als räumlich-räumliche Komponenten:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \varepsilon_0 [-F^{i\rho} F^j_{\rho} - (-\frac{1}{2}) \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2)] \\ &= \varepsilon_0 [-F^{i0} F^j_0 - F^{ik} F^j_k + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2)] \\ &= \varepsilon_0 [-E_i E_j - (-c \varepsilon_{ikl} B_l) (c \varepsilon_{jkm} B_m) + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2)] \\ &= \varepsilon_0 [-E_i E_j + c^2 (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{jl}) B_l B_m + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2)] \\ &= \varepsilon_0 [-E_i E_j - c^2 B_i B_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2)] \\ &= (-T^{\text{Mw}})_{ij} . \end{aligned}$$

Der Tensor $T^{\mu\nu}$ in (3.39) und (3.40) wird als (symmetrischer) Spannungstensor oder auch als Energie-Impuls-Tensor bezeichnet; er enthält alle Informationen über die Energiedichte, die Energiestromdichte, die Impulsdichte und die Impulsstromdichte des elektromagnetischen Feldes. Aus

$$T^{\mu}_{\mu} = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \varepsilon_0 (-F^{\mu\rho} F_{\mu\rho} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) = 0$$

folgt noch, dass der Tensor T^{μ}_{ν} spurlos ist.

Koppelt man nun das elektromagnetische Feld von den Teilchen ab, so dass in (3.39) $f^{\mu} = 0$ ist, dann gilt das Erhaltungsgesetz

$$0 = \partial_{\nu} T^{\mu\nu} = \partial_{\nu} T^{\nu\mu} , \quad (3.41)$$

das alternativ durch die Kontinuitätsgleichungen

$$0 = \frac{\partial \rho_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \quad , \quad \mathbf{0} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \nabla \cdot (-T^{\text{Mw}})$$

oder (nach einer Integration über den Ortsraum) durch

$$0 = \frac{d}{dt} \int d\mathbf{x} T^{\mu 0} = \frac{d}{dt} \int d\mathbf{x} T^{0\mu}, \text{ d. h. } 0 = \frac{d}{dt} \int d\mathbf{x} \rho_{\mathcal{E}} \quad , \quad \mathbf{0} = \frac{d}{dt} \int d\mathbf{x} \mathbf{S}$$

ausgedrückt werden kann. Ähnlich wie für materielle Teilchen ist das Energie-Impuls-Erhaltungsgesetz auch für das elektromagnetische Feld nicht das einzige Erhaltungsgesetz. Analog zur Form $L_M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$ des Drehimpulstensors für materielle Teilchen konstruieren wir nun den Tensor

$$L_F^{\mu\nu\rho} \equiv \frac{1}{c}(x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho})$$

der Drehimpuls*dichte* des elektromagnetischen Feldes und finden wegen der Symmetrie von $T^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \partial_\rho(L_F^{\mu\nu\rho}) &= \frac{1}{c}[(\partial_\rho x^\mu)T^{\nu\rho} + x^\mu(\partial_\rho T^{\nu\rho}) - (\partial_\rho x^\nu)T^{\mu\rho} - x^\nu(\partial_\rho T^{\mu\rho})] \\ &= \frac{1}{c}(\delta^\mu_\rho T^{\nu\rho} - \delta^\nu_\rho T^{\mu\rho}) = \frac{1}{c}(T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}) = 0. \end{aligned}$$

Nach einer Integration über den Ortsraum erhält man das Erhaltungsgesetz:

$$\frac{dL_F^{\mu\nu}}{dt} = 0 \quad , \quad L_F^{\mu\nu} \equiv \int d\mathbf{x} L_F^{\mu\nu 0}$$

für den 4-Drehimpulstensor des elektromagnetischen Feldes. Wir erläutern die einzelnen Komponenten von $L_F^{\mu\nu}$: Erstens, da $L_F^{\mu\nu}$ offensichtlich antisymmetrisch ist, gilt $L_F^{\mu\mu} = 0$, also insbesondere $L_F^{00} = 0$. Des Weiteren finden wir für die räumlich-räumlichen Komponenten von $L_F^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} L_F^{ij} &= \frac{1}{c} \int d\mathbf{x} (x^i T^{j0} - x^j T^{i0}) = \int d\mathbf{x} \left[x_i \left(\frac{1}{c^2} S_j \right) - x_j \left(\frac{1}{c^2} S_i \right) \right] \\ &= \varepsilon_{ijk} \int d\mathbf{x} \left[\mathbf{x} \times \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{S} \right) \right]_k = \varepsilon_{ijk} (\mathbf{L}_F)_k, \end{aligned}$$

wobei wir den dreidimensionalen Drehimpulsvektor des elektromagnetischen Feldes,

$$\mathbf{L}_F \equiv \int d\mathbf{x} \mathbf{x} \times \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{S} \right),$$

eingeführt haben. Die räumlich-zeitlichen Komponenten von $L_F^{\mu\nu}$ sind schließlich durch

$$L_F^{i0} = \frac{1}{c} \int d\mathbf{x} (x^i T^{00} - x^0 T^{i0}) = \frac{1}{c} \int d\mathbf{x} (x_i \rho_{\mathcal{E}} - t S_i)$$

gegeben. Führen wir noch ein: $\mathcal{E}_F \equiv \int d\mathbf{x} \rho_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{P}_F \equiv \int d\mathbf{x} \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{S} \right)$ und $\langle \mathbf{x} \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{E}_F} \int d\mathbf{x} \mathbf{x} \rho_{\mathcal{E}}$, dann folgt:

$$L_F^{i0} = \int d\mathbf{x} L_F^{i00} = \left[\frac{\mathcal{E}_F}{c} \langle \mathbf{x} \rangle - ct \mathcal{P}_F \right]_i \equiv X_{Fi},$$

so dass der antisymmetrische Tensor $L_F^{\mu\nu}$ durch den echten Vektor \mathbf{X}_F und den Pseudovektor \mathbf{L}_F charakterisiert werden kann: $L_F^{\mu\nu} = (\mathbf{X}_F, -\mathbf{L}_F)$. Das Erhaltungsgesetz für L_F^{i0} bzw. für den Vektor \mathbf{X}_F besagt physikalisch, dass der

Schwerpunkt $\langle \mathbf{x} \rangle$ des freien elektromagnetischen Feldes sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{u}_F \equiv c^2 \mathcal{P}_F / \mathcal{E}_F$ bewegt.

Auch für die materiellen Teilchen kann man einen Energie-Impuls-Tensor einführen:

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \sum_{l=1}^N m_{0l} c^2 (u_l)^\mu (u_l)^\nu \frac{1}{\gamma_{u_l}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \quad , \quad u^\mu = \gamma_u(1, \boldsymbol{\beta}) .$$

Die explizite Form der Matrixelemente von $\Theta^{\mu\nu}$ zeigt klar, dass der Energie-Impuls-Tensor der Materie die gleiche Struktur wie derjenige des elektromagnetischen Feldes hat. Man erhält z. B. für die zeitlich-zeitliche Komponente:

$$\Theta^{00} = \sum_{l=1}^N \gamma_{u_l} m_{0l} c^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) = \sum_{l=1}^N \mathcal{E}_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \quad (\text{Energiedichte}) \quad ,$$

für die zeitlich-räumlichen und räumlich-zeitlichen Komponenten (die aufgrund der Symmetrie von $\Theta^{\mu\nu}$ gleich sind):

$$\begin{pmatrix} \Theta^{01} \\ \Theta^{02} \\ \Theta^{03} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \sum_{l=1}^N \mathcal{E}_l \mathbf{u}_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \equiv \frac{1}{c} \mathbf{S}_M = \sum_{l=1}^N c \boldsymbol{\pi}_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) = \begin{pmatrix} \Theta^{10} \\ \Theta^{20} \\ \Theta^{30} \end{pmatrix}$$

und für die räumlich-räumlichen Komponenten:

$$\Theta^{ij} = \sum_{l=1}^N \gamma_{u_l} m_{0l} c^2 \beta_{li} \beta_{lj} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N (\mathbf{u}_l \boldsymbol{\pi}_l^T + \boldsymbol{\pi}_l \mathbf{u}_l^T)_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \quad .$$

Hierbei ist \mathbf{S}_M mit dem Poynting-Vektor des elektromagnetischen Feldes und $-\Theta^{ij}$ mit dem Maxwell'schen Spannungstensor zu vergleichen. Nun gilt:

$$\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} (\partial_\nu \Theta^{0\nu}) = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \Theta^{00} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \sum_{\{\mathbf{x}_l \in \mathcal{D}\}} \gamma_{u_l} m_{0l} c^2 = \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}_{M,\mathcal{D}}}{dt}$$

und

$$\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} (\partial_\nu \Theta^{i\nu}) = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \Theta^{i0} = \frac{d}{dt} \sum_{\{\mathbf{x}_l \in \mathcal{D}\}} \gamma_{u_l} m_{0l} (u_l)_i = \left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_{M,\mathcal{D}}}{dt} \right)_i ,$$

so dass die Bilanzgleichungen

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}_{M,\mathcal{D}}}{dt} = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = - \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} (\partial_\nu T^{0\nu})$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_{M,\mathcal{D}}}{dt} \right)_i = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} (\mathbf{f}_{\text{Lor}})_i = - \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} (\partial_\nu T^{i\nu})$$

für alle möglichen Integrationsbereiche \mathcal{D} auch als

$$\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} (\partial_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu}) = 0 \quad , \quad \mathcal{T}^{\mu\nu} \equiv \Theta^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}$$

geschrieben werden können. Wir folgern, dass $\partial_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$ gilt, und interpretieren $\Theta^{\mu\nu}$ daher als Energie-Impuls-Tensor der Materie und $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ als den Gesamt-Energie-Impuls-Tensor des Systems. Da $T^{\mu\nu}$ spurlos ist ($T^\mu{}_\mu = 0$), gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^\mu{}_\mu = \Theta^\mu{}_\mu &= \sum_{l=1}^N m_{0l} c^2 (u_l)^\mu (u_l)_\mu \frac{1}{\gamma_{u_l}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \\ &= \sum_{l=1}^N m_{0l} c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{u}_l}{c}\right)^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \end{aligned} \quad (3.42)$$

für die Spur des Tensors \mathcal{T} .

3.5.1 Drehimpulserhaltung

Wir zeigen nun, dass die Divergenzfreiheit ($\partial_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$) des Energie-Impuls-Tensors $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ die Erhaltung des Drehimpulses des Gesamtsystems von Teilchen und Feldern impliziert. Die Drehimpulsdichte $\mathcal{L}^{\mu\nu\rho}$ des Gesamtsystems wird hierbei (analog zur Konstruktion von $L_F^{\mu\nu\rho}$ aus $T^{\mu\nu}$) als

$$\mathcal{L}^{\mu\nu\rho} \equiv \frac{1}{c} (x^\mu \mathcal{T}^{\nu\rho} - x^\nu \mathcal{T}^{\mu\rho})$$

definiert. Analog zum Beweis der Identität $\partial_\rho L_F^{\mu\nu\rho} = 0$ (s. oben) folgt nun aus der Divergenzfreiheit von $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ die Identität:

$$\partial_\rho \mathcal{L}^{\mu\nu\rho} = 0 \quad ,$$

und hieraus folgt sofort das Erhaltungsgesetz

$$\frac{d\mathcal{L}^{\mu\nu}}{dt} = 0 \quad , \quad \mathcal{L}^{\mu\nu} \equiv \int d\mathbf{x} \mathcal{L}^{\mu\nu 0} \quad ,$$

das als das Drehimpulserhaltungsgesetz des Gesamtsystems von Teilchen und Feldern interpretiert werden kann. Diese Interpretation folgt nämlich sofort aus

$$\mathcal{L}^{\mu\nu} = L_F^{\mu\nu} + L_M^{\mu\nu} \quad ,$$

denn die Beiträge des Materientensors $\Theta^{\mu\nu}$ zu $\mathcal{L}^{\mu\nu}$ haben genau die Form $L_M^{\mu\nu} = (\mathbf{X}_M, -\mathbf{L}_M)$ des in Abschnitt [3.1] eingeführten Drehimpuls-4-Tensors der Materie. Dies sieht man durch explizite Berechnung der Elemente des Tensors $L_M^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} L_M^{\mu\mu} &= 0 \quad , \quad \text{insbesondere: } L_M^{00} = 0 \\ L_M^{i0} &= \int d\mathbf{x} \frac{1}{c} (x^i \Theta^{00} - ct \Theta^{i0}) = \frac{1}{c} \sum_{l=1}^N \gamma_{u_l} m_{0l} c^2 (x_{li} - ct \beta_{li}) \\ &= \sum_{l=1}^N \left(\frac{\mathcal{E}_l}{c} \mathbf{x}_l - \boldsymbol{\pi}_l ct \right)_i = (\mathbf{X}_M)_i \\ L_M^{ij} &= \int d\mathbf{x} \frac{1}{c} (x^i \Theta^{j0} - x^j \Theta^{i0}) = \frac{1}{c} \sum_{l=1}^N \gamma_{u_l} m_{0l} c^2 (x_{li} \beta_{lj} - x_{lj} \beta_{li}) \\ &= \sum_{l=1}^N (x_{li} \pi_{lj} - x_{lj} \pi_{li}) \quad \Rightarrow \quad L_M = \sum_{l=1}^N (\mathbf{x}_l \boldsymbol{\pi}_l^T - \boldsymbol{\pi}_l \mathbf{x}_l^T) \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit den früheren Ergebnissen für den Drehimpuls-4-Tensor der Materie zeigt nun, dass in der Tat

$$\int d\mathbf{x} \frac{1}{c} (x^\mu \Theta^{\nu 0} - x^\nu \Theta^{\mu 0}) = L_M^{\mu\nu} = (\mathbf{X}_M, -\mathbf{L}_M)$$

gilt.

3.5.2 Der Virialsatz

Das Ergebnis (3.42) kann dazu verwendet werden, den *Virialsatz* für relativistische Materie in Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld zu beweisen. Der Virialsatz gilt für *abgeschlossene* Systeme, in unserem Fall also für ein Feld und für Teilchen, die in einem begrenzten Raumbereich eingesperrt sind. Man denke hierbei z. B. an einen Hohlraum mit spiegelnden Wänden. Für ein solches abgeschlossenes System liefert die Zeitmittelung,

$$\overline{A(t)} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt A(t),$$

angewandt auf die Gleichung $\partial_\nu \mathcal{T}^{i\nu} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\partial_0 \mathcal{T}^{i0}} + \partial_j \overline{\mathcal{T}^{ij}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt (\partial_0 \mathcal{T}^{i0}) + \partial^j \overline{\mathcal{T}^i_j} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{T}^{i0}(T) - \mathcal{T}^{i0}(0)}{cT} + \partial^j \overline{\mathcal{T}^i_j} = \partial^j \overline{\mathcal{T}^i_j}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit x_i , Summation über den räumlichen Index i und Integration über den ganzen Ortsraum liefern:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d\mathbf{x} x_i \partial^j \overline{\mathcal{T}^i_j} = - \int d\mathbf{x} \delta^j_i \overline{\mathcal{T}^i_j} = - \int d\mathbf{x} \overline{\mathcal{T}^i_i} \\ &= \int d\mathbf{x} \overline{\mathcal{T}^0_0} - \int d\mathbf{x} \overline{\mathcal{T}^\mu_\mu} = \mathcal{E} - \sum_{l=1}^N m_{0l} c^2 \overline{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{u}_l}{c}\right)^2}}, \end{aligned}$$

wobei \mathcal{E} die Gesamtenergie des Systems darstellt. Zieht man die Ruheenergie der Teilchen von \mathcal{E} ab, so erhält man die Summe der kinetischen Energie der Materie und der Feldenergie:

$$\mathcal{E} - \sum_{l=1}^N m_{0l} c^2 = \sum_{l=1}^N m_{0l} c^2 \left[\overline{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{u}_l}{c}\right)^2}} - 1 \right].$$

Im nicht-relativistischen Limes reduziert sich dieses Ergebnis auf die Form

$$\mathcal{E}_{\text{NR}} = - \sum_{l=1}^N \frac{1}{2} m_{0l} \overline{(\mathbf{u}_l)^2} = -\mathcal{E}_{\text{kin}}.$$

Führt man die potentielle Energie der Teilchen als $\mathcal{E}_{\text{pot}} \equiv \mathcal{E}_{\text{NR}} - \mathcal{E}_{\text{kin}}$ ein, so findet man $\mathcal{E}_{\text{pot}} = -2\mathcal{E}_{\text{kin}} = 2\mathcal{E}_{\text{NR}}$. Dies ist genau dasselbe Ergebnis, das man im nicht-relativistischen Limes für Teilchen erhält, die gemäß einem $-|\mathbf{x}_{12}|^{-1}$ -Potential miteinander wechselwirken, also insbesondere für das Coulomb-Potential.

Kapitel 4

Die Dynamik der Teilchen

Nachdem wir im letzten und vorletzten Kapitel die Theorie wechselwirkender geladener Teilchen und elektromagnetischer Felder entwickelt haben, wenden wir die Theorie nun auf typische Wechselwirkungsprobleme an. Das volle Problem, in dem die Dynamik der Teilchen und Felder gleichzeitig bestimmt wird, ist nach wie vor kompliziert. Bevor wir auf die volle Dynamik (inklusive der Rückkopplungseffekte der von den Feldern erzeugten Ströme auf die Felder selbst) zu sprechen kommen, untersuchen wir zunächst die Dynamik relativistischer Teilchen in einfachen (fest vorgegebenen) Feldkonfigurationen und dann (in späteren Kapiteln) die Dynamik der Felder. Wir fangen an mit der Bewegung geladener Teilchen in räumlich homogenen, zeitunabhängigen elektrischen und magnetischen Feldern.

4.1 Räumlich homogene, zeitunabhängige E- und B-Felder

Für den Spezialfall räumlich und zeitlich konstanter elektromagnetischer Felder folgt aus unserer Untersuchung möglicher Invarianten des elektromagnetischen Feldes (s. Abschnitt [3.4]), dass nur vier Möglichkeiten existieren:

- (i) Falls $\mathbf{E} \cdot c\mathbf{B} = 0$ und $E > cB$ gilt, gibt es eine Lorentz-Transformation mit der Eigenschaft, dass das Magnetfeld im neuen Inertialsystem Null ist: $E' = \sqrt{E^2 - c^2 B^2}$, $B' = 0$.
- (ii) Falls $\mathbf{E} \cdot c\mathbf{B} = 0$ und $E < cB$ gilt, gibt es eine Lorentz-Transformation mit der Eigenschaft, dass das elektrische Feld im neuen Inertialsystem Null ist: $cB' = \sqrt{c^2 B^2 - E^2}$, $E' = 0$.
- (iii) Falls in irgendeinem Inertialsystem $\mathbf{E} \cdot c\mathbf{B} = 0$ und $E = cB$ gilt, werden diese Beziehungen zwischen den \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feldern in jedem Inertialsystem erfüllt sein.
- (iv) Falls $\mathbf{E} \cdot c\mathbf{B} \neq 0$ gilt, kann man die Felder bekanntlich mit Hilfe einer geeigneten Lorentz-Transformation parallel ausrichten, so dass im neuen Inertialsystem $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}'$ mit $E' \neq 0$ und $B' \neq 0$ gilt.

Die ersten beiden Fälle (also $B' = 0$ bzw. $E' = 0$) wurden bereits in der Übung angesprochen. Hier konzentrieren wir uns auf die Möglichkeiten (iii) und (iv), für die keines der beiden Felder wegtransformiert werden kann.

Für den Fall (iii), also wenn $\mathbf{E} \cdot c\mathbf{B} = 0$ und $E = cB$ gilt, gehen wir von den allgemeinen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad , \quad \boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} \quad , \quad \mathcal{E} = \gamma_u m_0 c^2 = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

aus. Da die Energieänderung sofort aus der Bewegungsgleichung für den kinetischen Impuls folgt,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{c^2 \boldsymbol{\pi} \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt}}{\sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4}} = \frac{q}{\gamma_u m_0} \boldsymbol{\pi} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} \quad ,$$

reicht es, sich auf die erste der beiden Gleichungen (4.1) zu beschränken. Führt man noch die dimensionslose Zeit $T \equiv \frac{qEt}{m_0 c}$ ein, so reduziert sich (4.1) mit $\hat{\mathbf{E}} \equiv \hat{\mathbf{e}}_1$ und $\hat{\mathbf{B}} \equiv \hat{\mathbf{e}}_2 \perp \hat{\mathbf{e}}_1$ auf:

$$\frac{d(\gamma_u \boldsymbol{\beta})}{dT} = \hat{\mathbf{e}}_1 + \boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{e}}_2 \quad , \quad \frac{d\gamma_u}{dT} = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \boldsymbol{\beta} \quad , \quad (4.2)$$

wobei die zweite Gleichung, wie bereits gesagt, redundant ist.

Bevor wir die relativistisch korrekten Gleichungen (4.2) lösen, untersuchen wir zuerst den nicht-relativistischen Limes, der hier durch die Näherung $\boldsymbol{\pi} \rightarrow m_0 \mathbf{u}$ definiert sei:

$$\frac{d}{dT} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dT} = \hat{\mathbf{e}}_1 + \boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1 - \beta_3 \\ 0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Nochmaliges Ableiten nach T liefert $\frac{d^2 \beta_1}{dT^2} = -\beta_1$ und $\frac{d^2}{dT^2} (1 - \beta_3) = -(1 - \beta_3)$, so dass man oszillierende Lösungen erhält: Neben $\beta_2 = \text{konstant} = \beta_2(0)$ folgt

$$\begin{aligned} \beta_1(T) &= \beta_1(0) \cos(T) + \frac{d\beta_1}{dT}(0) \sin(T) \\ 1 - \beta_3(T) &= [1 - \beta_3(0)] \cos(T) - \frac{d\beta_3}{dT}(0) \sin(T) \end{aligned}$$

mit den zeitlichen Mittelwerten $\overline{\beta_1(T)} = 0$ und $\overline{\beta_3(T)} = 1$. Die nicht-relativistische Näherung sagt also eine Driftbewegung in $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Richtung mit der Lichtgeschwindigkeit als *mittlerer* Geschwindigkeit voraus, wobei also auch durchaus Überlichtgeschwindigkeiten auftreten werden! Für Zeiten $T \gtrsim 1$ bzw. $t \gtrsim \frac{m_0 c}{qE}$ kann diese Vorhersage nicht korrekt sein. Auch für nicht-relativistische Anfangsgeschwindigkeiten benötigt man zur Bestimmung des Langzeitverhaltens von $\boldsymbol{\pi}(t)$ und $\mathcal{E}(t)$ also unbedingt die Lösung der relativistisch korrekten Gleichungen (4.2).

Auch die volle Lösung von Gleichung (4.2),

$$\frac{d(\gamma\beta_1)}{dT} = 1 - \beta_3 \quad , \quad \frac{d(\gamma\beta_2)}{dT} = 0 \quad , \quad \frac{d(\gamma\beta_3)}{dT} = \beta_1 \quad , \quad \frac{d\gamma}{dT} = \beta_1 \quad ,$$

ist recht einfach. Man erhält sofort die Konstanten:

$$\begin{aligned}\gamma(1 - \beta_3) &= \gamma(0)(1 - \beta_3(0)) \equiv \alpha > 0 \\ \gamma\beta_2 &= \gamma(0)\beta_2(0) \equiv \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad (\varepsilon > 1)\end{aligned}$$

und wegen $\gamma^2 = (\gamma\beta)^2 + 1$ auch

$$\begin{aligned}\gamma(1 + \beta_3) &= \frac{\gamma^2(1 - \beta_3^2)}{\gamma(1 - \beta_3)} = \frac{1}{\alpha}[(\gamma\beta)^2 + 1 - \gamma^2\beta_3^2] \\ &= \frac{1}{\alpha}[(\gamma\beta_1)^2 + (\gamma\beta_2)^2 + 1] = \frac{1}{\alpha}[(\gamma\beta_1)^2 + \varepsilon^2],\end{aligned}$$

so dass sowohl γ als auch β_3 explizit als Funktionen von β_1 bekannt sind:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2}[\gamma(1 - \beta_3) + \gamma(1 + \beta_3)] = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2\alpha}[(\gamma\beta_1)^2 + \varepsilon^2] \\ \beta_3 &= \frac{1}{2\gamma}[-\gamma(1 - \beta_3) + \gamma(1 + \beta_3)] = -\frac{\alpha}{2\gamma} + \frac{1}{2\alpha\gamma}[(\gamma\beta_1)^2 + \varepsilon^2].\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\alpha = \gamma(1 - \beta_3) = \gamma \frac{d(\gamma\beta_1)}{dT} &= \left[\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2\alpha} \right) + \frac{(\gamma\beta_1)^2}{2\alpha} \right] \frac{d(\gamma\beta_1)}{dT} \\ &= \frac{d}{dT} \left[\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2\alpha} \right) \gamma\beta_1 + \frac{(\gamma\beta_1)^3}{6\alpha} \right],\end{aligned}$$

d. h.

$$T - T_0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2\alpha^2} \right) \gamma\beta_1 + \frac{(\gamma\beta_1)^3}{6\alpha^2}, \quad (4.3)$$

wobei $-T_0$ durch das rechte Glied von (4.3) zur Zeit $T = 0$ gegeben ist. Im Langzeitlimit, d. h. für $T \rightarrow \infty$, gilt $\gamma\beta_1 \sim (6\alpha^2 T)^{1/3} \rightarrow \infty$ aufgrund von (4.3). Daher gilt auch

$$\gamma \sim \frac{1}{2\alpha}(\gamma\beta_1)^2 \sim \frac{1}{2\alpha}(6\alpha^2 T)^{2/3} \rightarrow \infty$$

und somit

$$\beta_3 = \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) \uparrow 1, \quad \beta_2 = \gamma(0)\beta_2(0)/\gamma \rightarrow 0$$

und

$$\beta_1 = (\gamma\beta_1)/\gamma \sim 2\alpha(6\alpha^2 T)^{-1/3} \rightarrow 0.$$

Abweichend von den Vorhersagen der nicht-relativistischen Näherung weist die exakte Lösung also *kein* oszillierendes Verhalten der β_1 - und β_3 -Komponenten der Geschwindigkeit auf. Auch die Eigenschaften $\beta_1 \rightarrow 0$ und $\beta_2 \rightarrow 0$ der exakten Lösung weichen qualitativ von den entsprechenden nicht-relativistischen Ergebnissen ab. Nur die Tatsache, dass im Mittel eine Driftbewegung in \hat{e}_3 -Richtung mit (fast-) Lichtgeschwindigkeit auftritt, wird von der nicht-relativistischen Näherung reproduziert.

Wir betrachten nun Fall (iv), der in einem geeigneten Bezugssystem durch parallele Felder charakterisiert wird, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$, und wählen $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{e}}_1$ und $cB/E \equiv b$:

$$\frac{d(\gamma\boldsymbol{\beta})}{dT} = \hat{\mathbf{e}}_1 + b\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{e}}_1 \quad , \quad \frac{d\gamma}{dT} = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \boldsymbol{\beta} . \quad (4.4)$$

In der nicht-relativistischen Näherung $\gamma \rightarrow 1$ mit

$$\frac{d\beta_1}{dT} = 1 \quad , \quad \frac{d}{dT} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \beta_3 \\ -\beta_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d\gamma}{dT} = \beta_1$$

steigt β_1 linear und γ quadratisch als Funktion von T an:

$$\beta_1 = \beta_1(0) + T \quad , \quad \gamma = \gamma(0) + \beta_1(0)T + \frac{1}{2}T^2 , \quad (4.5)$$

während β_2 und β_3 mit der Frequenz $|b|$ um $\beta_2 = 0$ bzw. $\beta_3 = 0$ oszillieren. Aus (4.5) folgt, dass die nicht-relativistische Näherung für $T \gtrsim 1$ bzw. $t \gtrsim \frac{m_0 c}{qE}$ ungültig ist: Die vorhergesagten Überlichtgeschwindigkeiten sind offensichtlich unphysikalisch.

Aus den relativistisch korrekten Gleichungen (4.4),

$$\frac{d(\gamma\beta_1)}{dT} = 1 \quad , \quad \frac{d}{dT} \begin{pmatrix} \gamma\beta_2 \\ \gamma\beta_3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \beta_3 \\ -\beta_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d\gamma}{dT} = \beta_1 ,$$

folgt einerseits $\gamma\beta_1 = \gamma(0)\beta_1(0) + T$ und andererseits

$$1 = \frac{2\gamma\beta_1}{2\gamma} \frac{d(\gamma\beta_1)/dT}{d\gamma/dT} = \frac{d[(\gamma\beta_1)^2]}{d[\gamma^2]} \quad \text{bzw.} \quad \gamma^2 = (\gamma\beta_1)^2 + \text{Konstante} .$$

Kombination dieser beiden Ergebnisse liefert

$$\gamma = \sqrt{\gamma(0)^2[1 - \beta_1(0)^2] + [\gamma(0)\beta_1(0) + T]^2} .$$

Um die Gleichungen für $\gamma\beta_2$ und $\gamma\beta_3$ zu lösen:

$$\frac{d}{dT} \begin{pmatrix} \gamma\beta_2 \\ \gamma\beta_3 \end{pmatrix} = \frac{b}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_2 \end{pmatrix} ,$$

führen wir

$$\Theta \equiv \frac{\gamma(0)\beta_1(0) + T}{\gamma(0)\sqrt{1 - \beta_1(0)^2}}$$

und die neue Zeitvariable $\vartheta \equiv \text{arsinh}(\Theta)$ ein:

$$\frac{dT}{\gamma(T)} = \frac{\gamma(0)\sqrt{1 - \beta_1(0)^2}d\Theta}{\gamma(0)\sqrt{1 - \beta_1(0)^2}\sqrt{1 + \Theta^2}} = d[\text{arsinh}(\Theta)] = d\vartheta .$$

Wir erhalten oszillierende Lösungen mit monoton abklingender Amplitude für β_2 und β_3 als Funktion der neuen Zeitvariablen $\vartheta(T)$:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\gamma(0)\beta_2(0)}{\gamma} \cos[b(\vartheta - \vartheta_0)] + \frac{\gamma(0)\beta_3(0)}{\gamma} \sin[b(\vartheta - \vartheta_0)] \\ \beta_3 &= \frac{\gamma(0)\beta_3(0)}{\gamma} \cos[b(\vartheta - \vartheta_0)] - \frac{\gamma(0)\beta_2(0)}{\gamma} \sin[b(\vartheta - \vartheta_0)] , \end{aligned}$$

wobei

$$\vartheta_0 \equiv \operatorname{arsinh}[\Theta(0)] = \operatorname{arsinh}\left(\frac{\beta_1(0)}{\sqrt{1-\beta_1(0)^2}}\right) = \operatorname{artanh}[\beta_1(0)]$$

gilt. Aus den Gleichungen

$$\gamma = \gamma(0)\sqrt{1-\beta_1(0)^2}\sqrt{1+\Theta^2} = \gamma(0)\sqrt{1-\beta_1(0)^2}\cosh(\vartheta)$$

und

$$\beta_1 = \frac{\gamma\beta_1}{\gamma} = \frac{\gamma(0)\beta_1(0) + T}{\gamma} = \frac{\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}} = \tanh(\vartheta)$$

folgt noch: $\gamma \rightarrow \infty$ und $\beta_1 \uparrow 1$ für $T \rightarrow \infty$. Im Gegensatz zu den Ergebnissen der nicht-relativistischen Näherung weist die exakte Lösung selbstverständlich keine Überlichtgeschwindigkeiten auf.

4.2 Das Coulomb-Problem für ein einzelnes Teilchen

Wir betrachten nun die Dynamik eines geladenen relativistischen Teilchens (mit der Ladung q und der Ruhemasse m_0) in einem Zentralpotential der Form $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 x}$ mit $x \equiv |\mathbf{x}|$; das Vektorpotential sei $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Dieses Modell beschreibt die Bewegung eines geladenen Teilchens im Coulomb-Feld eines anderen, immobilen Teilchens der Ladung q_0 , das sich im Ursprung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ befindet. Das 4-Potential $A^\mu = (\Phi, c\mathbf{A})$ erfüllt im Ruhesystem der immobilen Masse sowohl die Coulomb- als auch die Lorenz-Eichung. Die Wirkung dieses Problems ist

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c}\right)^2} - q\Phi(\mathbf{x}) \right],$$

die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q\mathbf{E} \quad , \quad \boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{q_0 \hat{\mathbf{x}}}{4\pi\epsilon_0 x^2},$$

und es gibt zwei offensichtliche Erhaltungsgrößen, nämlich erstens den Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\pi}$:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\pi}) = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\pi} + \mathbf{x} \times \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = \mathbf{x} \times (q\mathbf{E}) = \mathbf{0}$$

und zweitens die Gesamtenergie $\mathcal{E}_g = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4} - \frac{a}{x}$ (mit $a \equiv \frac{-qq_0}{4\pi\epsilon_0}$), die wegen der Zeitunabhängigkeit der Lagrange-Funktion gleich der Hamilton-Funktion ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_g}{dt} &= \frac{c^2 \boldsymbol{\pi} \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt}}{\sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4}} + \frac{a}{x^2} \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 \boldsymbol{\pi} \cdot (q\mathbf{E})}{\gamma m_0 c^2} + \frac{a}{x^2} \frac{dx}{dt} \\ &= \mathbf{u} \cdot \left(-\frac{a}{x^2} \hat{\mathbf{x}} \right) + \frac{a}{x^2} \frac{dx}{dt} = \frac{a}{x^2} \left(\frac{dx}{dt} - \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{x}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Im nicht-relativistischen Grenzfall,

$$S_{\text{NR}} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{x}}^2 - q\Phi(\mathbf{x}) \right],$$

in dem $\boldsymbol{\pi} = m_0 \mathbf{u}$ gilt, existiert noch eine dritte Erhaltungsgröße, der „Lenz’sche Vektor“

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{u} \times \mathbf{L} - a \hat{\mathbf{x}} \quad , \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{L} = 0 \quad ,$$

der vom Brennpunkt der elliptischen Bahn zum „Perihel“ (also zum dem Zentrum am nächsten gelegenen Punkt der Umlaufbahn) zeigt. Für $\mathcal{E}_g < 0$ sind alle Bahnen im nicht-relativistischen Grenzfall bekanntlich geschlossen.

Wir bestimmen nun die Lösung der relativistischen Bewegungsgleichungen. Genau wie im nicht-relativistischen Fall ist es hierbei vorteilhaft, den Drehimpuls in $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Richtung zu wählen und die Umlaufbahn, die nun in der (x_1, x_2) -Ebene verläuft, mit Hilfe von Polarkoordinaten zu beschreiben:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2)} + \frac{a}{x}.$$

Die zu x und φ konjugierten Impulse sind

$$\pi_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \gamma m_0 \dot{x} \quad , \quad \pi_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \gamma m_0 x^2 \dot{\varphi} \quad ,$$

und die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{d\pi_x}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} = \gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 - \frac{a}{x^2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{d\pi_\varphi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

Da die Lagrange-Funktion φ -unabhängig (und φ daher eine *zyklische* Variable) ist, stellt π_φ eine Erhaltungsgröße dar; im Wesentlichen ist π_φ durch den Drehimpuls gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{x} \times \boldsymbol{\pi} = \gamma m_0 \mathbf{x} \times \mathbf{u} = \gamma m_0 \mathbf{x} \times (\dot{x} \hat{\mathbf{e}}_x + x \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi) \\ &= \gamma m_0 x^2 \dot{\varphi} (\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_\varphi) = \pi_\varphi \hat{\mathbf{e}}_3 \quad , \end{aligned}$$

so dass (wie im nicht-relativistischen Fall) $\pi_\varphi = |\mathbf{L}|$ gilt.

Man zeigt nun leicht, dass *Kreisbahnen* nur dann möglich sind, wenn der dimensionslose Parameter $\bar{a} \equiv \frac{a}{\pi_\varphi c}$ Werte im Intervall $0 < \bar{a} < 1$ annimmt: Für eine Kreisbahn (mit $\pi_x = \gamma m_0 \dot{x} = 0$ und daher $\frac{d\pi_x}{dt} = 0$) gilt nämlich einerseits $a = \gamma m_0 x^3 \dot{\varphi}^2 > 0$ und andererseits

$$a = \gamma m_0 x^3 \dot{\varphi}^2 = \pi_\varphi x \dot{\varphi} = \pi_\varphi |\mathbf{u}| = \beta_u \pi_\varphi c \quad ,$$

so dass insgesamt $0 < \bar{a} = \beta_u < 1$ gilt. Man sollte hierbei bedenken, dass der Parameter \bar{a} bei geeigneter Wahl der Ladungen q und q_0 grundsätzlich jeden

reellen Wert annehmen kann ($\bar{a} \in \mathbb{R}$). Der Radius der Kreisbahn folgt für $0 < \bar{a} < 1$ als:

$$x = \frac{a}{\gamma m_0 |\mathbf{u}|^2} = \frac{\bar{a} |\mathbf{L}| c}{\gamma m_0 c^2 \beta_u^2} = \frac{|\mathbf{L}|}{m_0 c \bar{a}} \sqrt{1 - \bar{a}^2} \quad ,$$

so dass für $\bar{a} \uparrow 1$ bei festem $|\mathbf{L}|$ offenbar $x \downarrow 0$ gilt.

Um die Form *allgemeiner* Bahnen zu bestimmen, verwenden wir die Erhaltungsgesetze für die Gesamtenergie \mathcal{E}_g und den Drehimpuls \mathbf{L} . Wegen

$$\boldsymbol{\pi} = \gamma m_0 (\dot{x} \hat{\mathbf{e}}_x + x \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi) = \pi_x \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\pi_\varphi}{x} \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

gilt für die (erhaltene) Gesamtenergie:

$$\mathcal{E}_g = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4} - \frac{a}{x} = c \sqrt{(\pi_x)^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{x^2} + (m_0 c)^2} - \frac{a}{x}$$

und daher für den Impuls in radialer Richtung:

$$(\pi_x)^2 = (\gamma m_0 \dot{x})^2 = \frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E}_g + \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{\mathbf{L}^2}{x^2} - (m_0 c)^2 .$$

Dividiert man das linke und das rechte Glied nun durch $(\pi_\varphi)^2 = \mathbf{L}^2$, so erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\frac{1}{x(\varphi)}$:

$$\left(\frac{d(x^{-1})}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{\gamma m_0 \dot{x}}{\gamma m_0 x^2 \dot{\varphi}} \right)^2 = \left(\frac{\pi_x}{\pi_\varphi} \right)^2 = \frac{1}{\pi_\varphi^2 c^2} \left(\mathcal{E}_g + \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{m_0 c}{\pi_\varphi} \right)^2 .$$

Wir führen einen dimensionslosen Parameter $\bar{a} \equiv \frac{a}{\pi_\varphi c}$ ein und erhalten:

$$\left(\frac{d(x^{-1})}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}_g^2 - (m_0 c^2)^2}{(\pi_\varphi c)^2} - (1 - \bar{a}^2) \frac{1}{x^2} + 2 \frac{\mathcal{E}_g \bar{a}}{\pi_\varphi c} \frac{1}{x} \quad (4.6)$$

$$= \frac{\mathcal{E}_g^2 - (m_0 c^2)^2}{(\pi_\varphi c)^2} - (1 - \bar{a}^2) \left[\frac{1}{x} - \frac{\mathcal{E}_g \bar{a}}{\pi_\varphi c (1 - \bar{a}^2)} \right]^2 + \frac{\mathcal{E}_g^2 \bar{a}^2}{(\pi_\varphi c)^2 (1 - \bar{a}^2)}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_g^2 - (m_0 c^2)^2 (1 - \bar{a}^2)}{(\pi_\varphi c)^2 (1 - \bar{a}^2)} - (1 - \bar{a}^2) \left[\frac{1}{x} - \frac{\mathcal{E}_g \bar{a}}{\pi_\varphi c (1 - \bar{a}^2)} \right]^2 . \quad (4.7)$$

Führen wir noch die dimensionslose Länge

$$\xi \equiv \frac{|a| m_0 x}{\pi_\varphi^2} = \frac{|\bar{a}| m_0 c x}{\pi_\varphi}$$

und die dimensionslosen Parameter

$$\eta \equiv \frac{\mathcal{E}_g}{m_0 c^2} \quad , \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{1 - \eta^2}{\bar{a}^2}}$$

ein, dann erhält man für $\bar{a}^2 = 1$ aus (4.6):

$$\left(\frac{d\xi^{-1}}{d\varphi} \right)^2 = \text{sgn}(\bar{a}) \frac{2\eta}{\xi} + \eta^2 - 1$$

und für $\bar{a}^2 \neq 1$ aus (4.7):

$$\left(\frac{d\xi^{-1}}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{1-\bar{a}^2} - (1-\bar{a}^2) \left[\frac{1}{\xi} - \frac{\operatorname{sgn}(\bar{a})\eta}{1-\bar{a}^2}\right]^2.$$

Im Folgenden konzentrieren wir uns auf *attraktive* Coulomb-Wechselwirkung zwischen den beiden Ladungen, d. h. wir betrachten $\bar{a} > 0$. In diesem Fall erhalten wir die Gleichungen:

$$\left(\frac{d\xi^{-1}}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2\eta}{\xi} - (1-\eta^2) \quad (\bar{a} = 1) \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{d\xi^{-1}}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{1-\bar{a}^2} - (1-\bar{a}^2) \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\eta}{1-\bar{a}^2}\right)^2 \quad (0 < \bar{a} \neq 1), \quad (4.9)$$

die leicht mit Standardmethoden lösbar sind.

Die Lösung von (4.8) folgt aus

$$\frac{d(\xi^{-1})}{\sqrt{\frac{2\eta}{\xi} - (1-\eta^2)}} = d \left[\frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{2\eta}{\xi} - (1-\eta^2)} \right] = \pm d\varphi = d[\pm(\varphi - \varphi_0)]$$

als

$$\frac{2\eta}{\xi} = \eta^2(\varphi - \varphi_0)^2 + (1-\eta^2) \quad \text{bzw.} \quad \xi = \frac{2\eta}{\eta^2(\varphi - \varphi_0)^2 + (1-\eta^2)}. \quad (4.10)$$

Für $\eta < 1$ folgt $\xi \downarrow 0$ für $\varphi \rightarrow \infty$, so dass sich das Teilchen mit der Ladung q im Falle $\bar{a} = 1$ spiralförmig in das Anziehungszentrum im Ursprung hineinbewegt! Das gleiche Ergebnis erhält man für $\eta > 1$, falls $\dot{x}(0) < 0$ (oder äquivalent: $\varphi(0) > \varphi_0$) gilt. Falls $\eta > 1$ und $\dot{x}(0) > 0$ (oder äquivalent: $\varphi(0) < \varphi_0$) gilt, verschwindet das Teilchen ins Unendliche ($\xi \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$).

Um Gleichung (4.9) für $\xi(\varphi)$ mit $\bar{a} \neq 1$ zu lösen, führen wir die Hilfsvariablen

$$X^{-1} \equiv \frac{|1-\bar{a}^2|}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\eta}{1-\bar{a}^2} \right), \quad \Phi \equiv \sqrt{|1-\bar{a}^2|} \varphi$$

ein und erhalten die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dX^{-1}}{d\Phi}\right)^2 = \operatorname{sgn}(1-\bar{a}^2)(1-X^{-2}),$$

deren Lösung für schwache Coulomb-Anziehung ($0 < \bar{a} < 1$) die Form

$$X^{-1} = \cos(\Phi - \Phi_0)$$

bzw.

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{1-\bar{a}^2} \left\{ \eta + \varepsilon \cos \left[\sqrt{|1-\bar{a}^2|} (\varphi - \varphi_0) \right] \right\} \quad (4.11)$$

und für starke Coulomb-Anziehung ($\bar{a} > 1$) die Form

$$X^{-1} = \cosh(\Phi - \Phi_0)$$

bzw.

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\bar{a}^2 - 1} \left\{ -\eta + \varepsilon \cosh \left[\sqrt{\bar{a}^2 - 1} (\varphi - \varphi_0) \right] \right\} \quad (4.12)$$

hat. Die Lösung (4.12) im Falle starker Anziehung zeigt also dasselbe Phänomen $\xi \downarrow 0$ für $\varphi \rightarrow \infty$, das auch bereits aus der Lösung (4.10) für $\bar{a} = 1$ hervorging, allerdings sagt (4.12) keine algebraische Spirale (mit $\xi \propto \varphi^{-2}$), sondern exponentielles Verhalten voraus: $\xi \propto e^{-\sqrt{\bar{a}^2 - 1}\varphi}$. Interessant an den Lösungen (4.10) und (4.12) für $\bar{a} \geq 1$ ist noch, dass die Zeit, die das Teilchen der Ladung q benötigt, um in den Ursprung hineinzufallen, *endlich* ist. Außerdem ist interessant, dass für $\bar{a} \geq 1$ und $\eta \geq 1$ zwar $\xi \rightarrow \infty$ gilt (wie man für einen Streuzustand erwartet), falls anfangs $\varphi < \varphi_0$ ist; für einen Anfangswert $\varphi > \varphi_0$ folgt jedoch $\xi \downarrow 0$ für $\varphi \rightarrow \infty$. Wir schließen hieraus, dass Zustände, die man nicht-relativistisch als Streuzustände klassifizieren würde, in der Relativitätstheorie durchaus gebunden sein können.

Die Lösung für schwache Coulomb-Anziehung ($\bar{a} < 1$) zeigt einige Gemeinsamkeiten mit der nicht-relativistischen Lösung, aber auch drastische Unterschiede. Im nicht-relativistischen Limes ($\bar{a} \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 1$) reduziert sich die Lösung (4.11) auf die bekannte Form der nicht-relativistischen Umlaufbahn,

$$\xi = \frac{x}{p} = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \left(p = \frac{\mathbf{L}^2}{m_0 a} \quad , \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{\text{NR}} \mathbf{L}^2}{m_0 a^2}} \right) ,$$

die für $\varepsilon < 1$ eine Ellipse, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel und für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel beschreibt. Allgemein gilt für $\bar{a} < 1$ die von der nicht-relativistischen Lösung bekannte Klassifizierung nach *Bindungszuständen* ($\eta < 1$), für die ξ immer endlich bleibt, und *Streuzuständen* ($\eta \geq 1$), für die im Langzeitlimes $\xi \rightarrow \infty$ gilt. Im Gegensatz zur nicht-relativistischen Lösung sind die relativistischen Umlaufbahnen jedoch im Allgemeinen *nicht* geschlossen und somit nicht-periodisch als Funktion der Zeit¹:

$$\xi(\varphi + 2\pi) \neq \xi(\varphi) .$$

Es ist klar, dass mit der Nicht-Geschlossenheit der Umlaufbahn auch der Verlust der dritten Erhaltungsgröße (also des Lenz'schen Vektors) einhergeht, denn der Lenz'sche Vektor markiert ja gerade die räumliche Ausrichtung der periodisch durchlaufenen Umlaufbahn.

4.3 Coulomb-Wechselwirkung als Vielteilchenproblem

Im vorigen Abschnitt wurde die Dynamik eines Teilchens im fest vorgegebenen Coulomb-Feld eines (unendlich schweren) anderen Teilchens untersucht. Wenn man nun versucht, die Dynamik mehrerer Teilchen im gemeinsam erzeugten Coulomb-Feld zu studieren, stößt man sofort auf Probleme. Diese Probleme haben ihren Ursprung darin, dass wir geladene Teilchen bisher als punktförmig

¹Nur in Ausnahmefällen, z. B. wenn $\sqrt{1 - \bar{a}^2} = \frac{m}{n} < 1$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd) gilt, erhält man geschlossene Bahnen; im angegebenen Beispiel enthält eine Periode genau n Umläufe um den Ursprung.

angesehen haben. Andererseits hat man hierbei keine Wahl: In der Relativitätstheorie müssen Elementarteilchen unbedingt als punktförmig angesehen werden, da ausgedehnte Objekte wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wechselwirkung nicht elementar (im Sinne von nicht-zusammengesetzt) sein können.

Konkretisieren wir zunächst das „Problem“: Wir wissen bereits, dass die Wirkung des Vielteilchensystems durch

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt (L_M + L_{\text{WW}} + \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_F) \quad (4.13)$$

mit

$$L_M = - \sum_{l=1}^N m_{0l} c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}_l^2}{c^2}} \quad , \quad L_{\text{WW}} = \sum_{l=1}^N q_l [\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_l, t) - \Phi(\mathbf{x}_l, t)]$$

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2)$$

und seine Gesamtenergie, die wegen des Fehlens einer expliziten Abhängigkeit der Lagrange-Funktion von der Zeit auch gleich der Hamilton-Funktion ist, durch

$$H = \sum_{l=1}^N \sqrt{\pi_l^2 c^2 + m_{0l}^2 c^4} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int d\mathbf{x} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \quad (4.14)$$

mit

$$\pi_l = \mathbf{p}_l - q_l \mathbf{A}(\mathbf{x}_l, t) = \gamma_{u_l} m_{0l} \mathbf{u}_l$$

gegeben ist. Das „Problem“ ist nun, dass sowohl S in (4.13) als auch H in (4.14) divergieren. Dies sieht man am einfachsten in der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$; da S und H eichinvariant sind, steht uns die Wahl der Eichung frei. Wir schreiben $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ als Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Anteils:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &\equiv -\nabla\Phi & \mathbf{E}_{\perp} &\equiv -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbf{0} & \nabla \cdot \mathbf{E}_{\perp} &= 0, \end{aligned}$$

so dass das Integral $\int d\mathbf{x} \mathbf{E}^2$ in (4.13) und (4.14) auf die Form:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \mathbf{E}^2 &= \int d\mathbf{x} [\mathbf{E}_{\perp}^2 - 2(\nabla\Phi) \cdot \mathbf{E}_{\perp} + \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi] \\ &= \int d\mathbf{x} [\mathbf{E}_{\perp}^2 + 2\Phi(\nabla \cdot \mathbf{E}_{\perp}) + \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) - \Phi\Delta\Phi] \\ &= \int d\mathbf{x} \left[\mathbf{E}_{\perp}^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \rho\Phi \right] \\ &= \int d\mathbf{x} \mathbf{E}_{\perp}^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{l=1}^N q_l \Phi(\mathbf{x}_l, t) \end{aligned}$$

gebracht werden kann. Für die Hamilton-Funktion in (4.14) erhält man daher:

$$H = \sum_{l=1}^N \sqrt{\pi_l^2 c^2 + m_{0l}^2 c^4} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N q_l \Phi(\mathbf{x}_l, t) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int d\mathbf{x} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + c^2 (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right]. \quad (4.15)$$

Hierbei ist auch $\Phi(\mathbf{x}, t)$ explizit bekannt (s. Gleichung (??)):

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{m=1}^N \frac{q_m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|},$$

so dass der zweite Term in (4.15) durch

$$\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N q_l \Phi(\mathbf{x}_l, t) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{l \neq m} \frac{q_l q_m}{|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_m|} + \sum_{l=1}^N S_l.$$

gegeben ist. Die „Selbstenergie“-Beiträge $S_l = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_l^2}{|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_l|}$ der Teilchen sind formal divergent, was lediglich zeigt, dass die relativistische klassische Mechanik (oder auch die relativistische Quantenmechanik) nicht imstande ist, die Selbstwechselwirkung eines geladenen Teilchens zu beschreiben. Diese Selbstwechselwirkung kann erst im Rahmen der Quantenelektrodynamik zufriedenstellend behandelt werden. Da man aus Erfahrung weiß, dass geladene Teilchen eine sehr endliche „Selbstenergie“ besitzen, ist es sinnvoll, S_l durch eine endliche Konstante zu ersetzen:

$$\sum_{l=1}^N S_l \rightarrow \text{endliche Konstante}.$$

Abgesehen von dieser (physikalisch wirkungslosen) Konstanten, die wir im Folgenden durch eine geeignete Wahl des Energienullpunkts gleich Null setzen, erhält man also die Hamilton-Funktion:

$$H = \sum_{l=1}^N \sqrt{\pi_l^2 c^2 + m_{0l}^2 c^4} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{l \neq m} \frac{q_l q_m}{|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_m|} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int d\mathbf{x} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + c^2 (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right]. \quad (4.16)$$

In der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ enthält die Hamilton-Funktion als unabhängige Variablen also lediglich die Koordinaten und Impulse der Teilchen $\{\mathbf{x}_l, \mathbf{p}_l\}$ und die räumlichen Komponenten des 4-Potentials (also den 3-Vektor \mathbf{A}). Das skalare Potential Φ tritt nicht als zusätzliche (unabhängige) dynamische Variable auf; außerdem ist die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit t abhängig. Die Wirkung S in (4.13) kann völlig analog modifiziert werden; hierbei sind L_{WW} und L_{F} durch

$$L_{\text{WW}} = \sum_{l=1}^N q_l \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_l, t) - \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{l \neq m} \frac{q_l q_m}{|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_m|} \quad (4.17)$$

und

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d\mathbf{x} (\mathbf{E}_\perp^2 - c^2\mathbf{B}^2)$$

zu ersetzen.

Im Spezialfall der Elektrostatik ($\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\pi}_l = \mathbf{0}$) ist die Gesamtenergie des Systems durch

$$\mathcal{E}_g = \sum_{l=1}^N m_{0l}c^2 + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{l \neq m} \frac{q_l q_m}{|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_m|} \quad (4.18)$$

gegeben, wobei der erste Term im rechten Glied offensichtlich die Ruheenergie der Teilchen und der zweite Term die elektrostatische Wechselwirkungsenergie darstellt.

Wir fügen noch ein paar abschließende Bemerkungen über die Grenzen der Gültigkeit der klassischen speziellen Relativitätstheorie hinzu. In diesem Abschnitt haben wir gelernt, dass die Relativitätstheorie einerseits punktförmige Elementarteilchen verlangt, die Selbstenergie solcher Teilchen andererseits divergiert, falls sie eine elektrische Ladung tragen. Nun ist die durch Selbstwechselwirkung verursachte Selbstenergie eines Teilchens natürlich in der Ruheenergie enthalten und darf diese Ruheenergie daher auf keinen Fall übersteigen. Nehmen wir an, das Elementarteilchen sei nicht punktförmig, sondern habe den Radius r , dann finden wir also die Ungleichung

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \lesssim m_0 c^2 \quad \text{bzw.} \quad r \gtrsim \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2} \equiv r_q,$$

die besagt, dass die klassische Relativitätstheorie für $r \lesssim r_q$ inkonsistent wird. Für Elektronen ($q = e$) wird r_e als „klassischer Radius des Elektrons“ bezeichnet:²

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \right)^2 \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2} \equiv \alpha^2 a_B \simeq 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Bevor die klassische Relativitätstheorie intern inkonsistent wird, bricht sie durch quantenfeldtheoretische Effekte zusammen: Wenn die kinetische Energie eines Elektrons die Ruheenergie übersteigt ($\mathcal{E}_{\text{kin}} \gtrsim m_0 c^2$), also wenn für typische Eigenwerte des Impulsoperators $p \gtrsim m_0 c$ gilt, kann Paarerzeugung auftreten. Dies wird insbesondere dann geschehen, wenn man versucht, das elektronische Wellenpaket in einem Raumbereich mit dem Radius $r \lesssim \frac{\hbar}{m_0 c} = \lambda_{\text{Compton}} = \alpha a_B$ zusammenzuquetschen („Zitterbewegung“).

Deutlich bevor Paarerzeugung einsetzt, wird die klassische Theorie bereits ungültig durch normale Quanteneffekte; man denke an die elektronische Wellenfunktion im Wasserstoffatom, die auf der Längenskala a_B variiert. Insbesondere kann man die Ergebnisse des „Coulomb-Problems eines einzelnen Teilchens“ also ausdrücklich *nicht* in der Quantenwelt, d. h. zur Beschreibung wasserstoffähnlicher Atome, anwenden.

²Der Sprachgebrauch stammt aus einer Theorie von M. Abraham, in der angenommen wurde, dass die Ruhemasse des Elektrons *vollständig* elektromagnetischen Ursprungs ist. Im Folgenden bezeichnet α die Feinstrukturkonstante und a_B den Bohr'schen Radius.

Betrachtet man schließlich *Vielteilchensysteme*, z. B. Elektronengase in Metallen oder im Inneren von Sternen, so verliert die klassische Näherung ihre Gültigkeit, wenn die Temperatur des Gases zu niedrig ist (niedriger als die Fermi-Temperatur $T_F \equiv \frac{\hbar^2}{2mk_B\ell^2}$, wobei ℓ der mittlere Abstand zwischen Elektronen ist). Anders ausgedrückt wird die klassische Näherung ungültig, wenn ℓ die thermische Wellenlänge $\lambda_T \equiv \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}$ unterschreitet.

Diese Einschränkungen der Gültigkeit der klassischen Relativitätstheorie sind natürlich bei Anwendungen (insbesondere im Bereich der Elementarteilchenphysik) zu berücksichtigen.

Kapitel 5

Statische elektromagnetische Felder

Nachdem wir im vorigen Kapitel die Dynamik der Teilchen für fest vorgegebene Feldkonfigurationen und die allgemeine Dynamik des Coulomb-Gases untersucht haben, widmen wir uns nun der Dynamik der Felder. Zuerst (in diesem Kapitel) betrachten wir die einfachste mögliche Situation, nämlich diejenige effektiv zeitunabhängiger Felder. Explizit zeitabhängige Felder (insbesondere elektromagnetische Wellen) werden in den nachfolgenden Kapiteln diskutiert.

Streng zeitunabhängige Felder $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ liegen immer dann vor, wenn die Ladungs- und Stromverteilungen zeitlich konstant sind. In diesem Fall reduzieren sich die Maxwell-Gleichungen auf

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \mathbf{E})(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}) \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad , \quad (\nabla \times \mathbf{B})(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad ,\end{aligned}\tag{5.1}$$

und man sieht, dass die Gleichungen der Elektrostatik und Magnetostatik in diesem Spezialfall entkoppelt sind. Viel interessanter (denn weniger speziell) ist jedoch, dass dieselben Gleichungen (5.1) auch für das *zeitgemittelte* Verhalten der Felder relevant sind, falls die Ladungs- und Stromverteilung *räumlich begrenzt* ist. In diesem Fall sind nämlich $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ (mindestens außerhalb dieses Raumbereichs) in ihrer zeitlichen Variation beschränkt und es gilt bei einer Zeitmittelung:

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}, T) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, 0)}{T} = \mathbf{0}$$

und analog:

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} = \mathbf{0} \quad ,$$

so dass sich die Maxwell-Gleichungen auf die Form

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \overline{\mathbf{E}})(\mathbf{x}) &= \overline{(\nabla \cdot \mathbf{E})(\mathbf{x})} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overline{\rho(\mathbf{x}, t)} \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \\ \nabla \times \overline{\mathbf{E}} &= \overline{\nabla \times \mathbf{E}} + \frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

bzw.

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = \overline{\nabla \cdot \mathbf{B}} = 0$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \overline{\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} = \mu_0 \overline{\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)} \equiv \mu_0 \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$$

reduzieren. Die zeitlich gemittelten Größen $(\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\rho}, \bar{\mathbf{j}})$ erfüllen also die Gleichungen (5.1) der Elektro- bzw. Magnetostatik. Führt man nun wie üblich ein skalares Potential Φ und ein Vektorpotential \mathbf{A} ein:

$$\bar{\mathbf{E}} = -\nabla\Phi \quad , \quad \bar{\mathbf{B}} = \nabla \times \mathbf{A}$$

und fordert zusätzlich die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, so erhält man bekanntlich die Poisson-Gleichungen

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \bar{\rho} \quad , \quad \Delta\mathbf{A} = -\mu_0 \bar{\mathbf{j}}$$

mit den Lösungen

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\bar{\rho}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad , \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad , \quad (5.2)$$

die für $x \rightarrow \infty$ gegen Null streben. Die entsprechenden Felder sind

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Gleichung für $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x})$ in (5.3) stellt das Coulomb-Gesetz dar, diejenige für $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ das Biot-Savart'sche Gesetz.

5.1 Das elektrostatische Potential und die Multipolentwicklung

5.1.1 Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten

Wir befassen uns nun etwas näher mit dem Spezialfall der Elektrostatik, der durch den Ausdruck für $\Phi(\mathbf{x})$ in (5.2) charakterisiert ist, und untersuchen die Form des skalaren Potentials in großem Abstand von den Quellen ($|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$). Diese Fragestellung ist in der Elektrostatik offensichtlich immer dann wichtig, wenn eine Ladungsverteilung aus der Ferne betrachtet wird oder wenn zwei Ladungsverteilungen, die weit voneinander entfernt sind, miteinander wechselwirken. Hierüber hinaus ist diese Fragestellung relevant für die Untersuchung der Wechselwirkung atomarer Ladungsverteilungen in der Quantenmechanik (Van-der-Waals-Kräfte) oder nicht-sphärisch-symmetrischer Massenverteilungen in der Mechanik (Erde-Mond-System).

Zur Berechnung des skalaren Potentials in großem Abstand von den Quellen ($x \rightarrow \infty$) setzen wir in (5.2) die Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + (x')^2}} = \frac{1}{x} \left[1 - \frac{2\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'}{x} + \left(\frac{x'}{x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{x} \left\{ 1 + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'}{x} + \frac{1}{2x^2} \hat{\mathbf{x}}^T \left[3\mathbf{x}'(\mathbf{x}')^T - (x')^2 \mathbf{1} \right] \hat{\mathbf{x}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2x^3} \hat{x}_{i_1} \hat{x}_{i_2} \hat{x}_{i_3} [5x'_{i_1} x'_{i_2} x'_{i_3} - x'_{i_1} \delta_{i_2 i_3} - x'_{i_2} \delta_{i_1 i_3} - x'_{i_3} \delta_{i_1 i_2}] + \dots \right\} \\
 &\equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu_{i_1 i_2 \dots i_\ell}(\mathbf{x}') \frac{\hat{x}_{i_1} \hat{x}_{i_2} \dots \hat{x}_{i_\ell}}{x^{\ell+1}} \quad (x \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

ein, so erhält man sofort die *Multipolentwicklung* des skalaren Potentials:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} M_{i_1 i_2 \dots i_\ell} \frac{\hat{x}_{i_1} \hat{x}_{i_2} \dots \hat{x}_{i_\ell}}{4\pi\epsilon_0 x^{\ell+1}} \quad , \quad M_{i_1 i_2 \dots i_\ell} \equiv \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') \mu_{i_1 i_2 \dots i_\ell}(\mathbf{x}') \quad (5.4)$$

mit

$$\begin{aligned}
 M &= \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') \equiv q \quad , \quad M_{i_1} = \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') x'_{i_1} \equiv d_{i_1} \\
 M_{i_1 i_2} &= \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') \left[\frac{3}{2} x'_{i_1} x'_{i_2} - \frac{1}{2} (x')^2 \delta_{i_1 i_2} \right] \equiv Q_{i_1 i_2} \\
 M_{i_1 i_2 i_3} &= \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') \left[\frac{5}{2} x'_{i_1} x'_{i_2} x'_{i_3} - \frac{1}{2} x'_{i_1} \delta_{i_2 i_3} - \frac{1}{2} x'_{i_2} \delta_{i_1 i_3} - \frac{1}{2} x'_{i_3} \delta_{i_1 i_2} \right] \equiv O_{i_1 i_2 i_3}
 \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Ladung q der Ladungsverteilung, ihr Dipolmoment \mathbf{d} , der Quadrupoltensor Q und der Oktupoltensor O eingeführt. Die explizite Form der höheren Multipolmomente ist recht kompliziert. Dies sieht man bereits am nächsten Multipolmoment, dem Hexadekapol:

$$\begin{aligned}
 M_{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') \left[\frac{35}{8} x'_{i_1} x'_{i_2} x'_{i_3} x'_{i_4} - \frac{5}{8} (x')^2 (\delta_{i_1 i_2} x'_{i_3} x'_{i_4} + \delta_{i_1 i_3} x'_{i_2} x'_{i_4} \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{i_1 i_4} x'_{i_2} x'_{i_3} + \delta_{i_2 i_3} x'_{i_1} x'_{i_4} + \delta_{i_2 i_4} x'_{i_1} x'_{i_3} + \delta_{i_3 i_4} x'_{i_1} x'_{i_2}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{8} (x')^4 (\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}) \right] \equiv H_{i_1 i_2 i_3 i_4} \quad .
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Entwicklungskoeffizienten ($q, \mathbf{d}, Q, O, H, \dots$) erhält man also die folgende explizite Entwicklung für das skalare Potential:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x} \left(q + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}}{x} + \frac{\hat{\mathbf{x}}^T Q \hat{\mathbf{x}}}{x^2} + \frac{1}{x^3} \hat{x}_{i_1} \hat{x}_{i_2} \hat{x}_{i_3} O_{i_1 i_2 i_3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{x^4} \hat{x}_{i_1} \hat{x}_{i_2} \hat{x}_{i_3} \hat{x}_{i_4} H_{i_1 i_2 i_3 i_4} + \dots \right) \quad (x \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

Die Multipolentwicklung (5.4) setzt natürlich voraus, dass die Ladungsverteilung räumlich begrenzt ist. Der Entwicklungsparameter in der Multipolentwicklung ist a/x , wobei a die typische Ausdehnung der Ladungsverteilung ist.

Man kann den Monopol exakt realisieren, indem man eine Punktladung q im Ursprung plaziert. Es folgt:

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \quad , \quad \mathbf{E}_0 = -\nabla\Phi_0 = \frac{q\hat{\mathbf{x}}}{4\pi\epsilon_0 x^2} \quad .$$

Man kann den Dipol \mathbf{d} exakt realisieren, indem man zwei entgegengesetzt geladene Monopole (mit den Ladungen λq und $-\lambda q$) an den Orten $\frac{1}{2\lambda}\mathbf{a}$ und $-\frac{1}{2\lambda}\mathbf{a}$ aufstellt und den Limes $\lambda \rightarrow \infty$ durchführt. Es folgt:

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 x^2} \quad , \quad \mathbf{d} = q\mathbf{a} \quad , \quad \mathbf{E}_1 = -\nabla\Phi_1 = \frac{[3\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^T - \mathbb{1}]\mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 x^3} \quad .$$

Man kann den Quadrupol Q exakt realisieren, indem man zwei entgegengesetzt ausgerichtete Dipole $\lambda\mathbf{d}$ und $-\lambda\mathbf{d}$ an den Orten $\frac{1}{2\lambda}\mathbf{a}$ und $-\frac{1}{2\lambda}\mathbf{a}$ aufstellt und den Limes $\lambda \rightarrow \infty$ durchführt. Es folgt:

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{x}) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\Phi_1\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{a}}{2\lambda}\right) - \Phi_1\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{a}}{2\lambda}\right) \right] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\lambda}\mathbf{a} \cdot (\nabla\Phi_1)(\mathbf{x}) \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\lambda}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) \right] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{a}^T [3\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^T - \mathbb{1}](\lambda\mathbf{d})}{4\pi\epsilon_0 x^3} \right] \\ &= \frac{\hat{\mathbf{x}}^T [3\mathbf{a}\mathbf{d}^T - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\mathbb{1}]\hat{\mathbf{x}}}{4\pi\epsilon_0 x^3} = \frac{\hat{\mathbf{x}}^T Q \hat{\mathbf{x}}}{4\pi\epsilon_0 x^3} \end{aligned}$$

mit

$$Q = \frac{3}{2}[\mathbf{a}\mathbf{d}^T + \mathbf{d}\mathbf{a}^T] - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\mathbb{1} \quad .$$

Allgemeiner kann man den 2^ℓ -Pol $M^{(\ell)}$ exakt realisieren, indem man zwei entgegengesetzt ausgerichtete $2^{\ell-1}$ -Pole $\lambda M^{(\ell-1)}$ und $-\lambda M^{(\ell-1)}$ an den Orten $\frac{1}{2\lambda}\mathbf{a}$ und $-\frac{1}{2\lambda}\mathbf{a}$ aufstellt und den Limes $\lambda \rightarrow \infty$ durchführt. Allgemein folgt:

$$\begin{aligned} \Phi_\ell(\mathbf{x}) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\Phi_{\ell-1}\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{a}}{2\lambda}\right) - \Phi_{\ell-1}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{a}}{2\lambda}\right) \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\lambda}\mathbf{a} \cdot (\nabla\Phi_{\ell-1})(\mathbf{x}) \right] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\lambda}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}_{\ell-1}(\mathbf{x}) \right] \quad , \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{E}_{\ell-1}(\mathbf{x})$ das elektrische Feld eines $2^{\ell-1}$ -Pols im Ursprung der Größe $\lambda Q_{\ell-1}$ darstellt.

5.1.2 Multipolentwicklung in beliebiger Ordnung

Es ist klar, dass die *konkrete* Berechnung der Multipolmomente in den höheren Ordnungen immer langwieriger wird. Dennoch ist es nicht schwierig, die Multipolentwicklung zu systematisieren. Hierzu beweisen wir zuerst die Identität:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \frac{x}{x'} \left| \mathbf{x}' - \left(\frac{x'}{x}\right)^2 \mathbf{x} \right| \quad ,$$

die aus der Gleichungskette

$$\begin{aligned} &\left[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|(x')^2 \right]^2 - \left[x x' |\mathbf{x}' - \left(\frac{x'}{x}\right)^2 \mathbf{x}| \right]^2 = \\ &\left[x^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + (x')^2 \right] (x')^4 - x^2 (x')^2 \left[(x')^2 - 2\left(\frac{x'}{x}\right)^2 \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x} + \frac{(x')^4}{x^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

folgt. Mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung in mehreren Variablen:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\ell}}{\ell!} [\partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_\ell} f](\mathbf{x}) \quad ,$$

wobei implizit über alle $i_k \in 1, 2, 3$ summiert wird (Einstein-Konvention) und $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ gilt, erhält man nun einen kompakten Ausdruck für das skalare Potential:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\bar{\rho}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\bar{\rho}(\mathbf{x}')x'}{x|\mathbf{x}' - \left(\frac{x'}{x}\right)^2 \mathbf{x}|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') \frac{x'}{x} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \left(\frac{x'}{x}\right)^{2\ell} x_{i_1} \dots x_{i_\ell} \partial'_{i_1} \dots \partial'_{i_\ell} \frac{1}{x'} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} M_{i_1 i_2 \dots i_\ell} \frac{\hat{x}_{i_1} \hat{x}_{i_2} \dots \hat{x}_{i_\ell}}{x^{\ell+1}} \end{aligned}$$

mit¹

$$M_{i_1 i_2 \dots i_\ell} = \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') (x')^{2\ell+1} \partial'_{i_1} \partial'_{i_2} \dots \partial'_{i_\ell} \frac{1}{x'} \quad .$$

Hierbei gilt $\partial'_i \equiv \frac{\partial}{\partial x'_i}$. Es ist zu beachten, dass die Multipolmomente $M_{i_1 i_2 \dots i_\ell}$ für $\ell \geq 2$ symmetrisch in allen Indizes und *spurlos* sind:

$$M_{i_1 \dots i_{\ell-2} ii} = \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \int d\mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') (x')^{2\ell+1} \partial'_{i_1} \dots \partial'_{i_{\ell-2}} \left(\Delta' \frac{1}{x'} \right) = 0 \quad ,$$

wobei die letzte Gleichung aus $\Delta' \frac{1}{x'} = -4\pi\delta(\mathbf{x}')$ folgt: Da im Integranden der Faktor $\partial'_{i_1} \dots \partial'_{i_{\ell-2}} \left(\Delta' \frac{1}{x'} \right)$ höchstens $(\ell - 2)$ -te Ableitungen einer δ -Funktion enthält, ergibt sein Produkt mit $\bar{\rho}(\mathbf{x}') (x')^{2\ell+1}$ bei Integration sicherlich Null. Aufgrund der Symmetrie in allen Indizes erhält man das gleiche Ergebnis für alle anderen Kontraktionen von $M_{i_1 i_2 \dots i_\ell}$.

5.1.3 Multipolentwicklung in sphärischen Koordinaten

Man fragt sich, ob die Bestimmung der Multipolmomente einer Ladungsverteilung nicht systematisiert werden kann. Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten $M_{i_1 i_2 \dots i_\ell}$ in Kartesischen Koordinaten bis zu einer hohen Ordnung der Multipolentwicklung wäre sicherlich recht langwierig. Da die Multipolentwicklung (5.4) letztlich eine Entwicklung nach dem Radius x darstellt, bietet sich jedoch alternativ eine Berechnung in *Kugelkoordinaten* an. Insbesondere benötigen wir eine Darstellung (in Kugelkoordinaten) der Funktion $\phi(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$. Diese Funktion erfüllt die Gleichung:

$$\Delta\phi(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3) \quad (5.5)$$

und stellt also das Potential einer Einheitsladung im Punkte \mathbf{x}' dar. Durch Überlagerung erhält man:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' \phi(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \bar{\rho}(\mathbf{x}') \quad .$$

¹Diese Definition der Multipolmomente folgt der in der Literatur recht allgemein akzeptierten *Buckingham-Konvention* und weicht ab von z.B. Jacksons Definition, in der scheinbar willkürlich und ohne Systematik andere Vorfaktoren gewählt werden.

Das Interessante ist nun, dass (5.5) überall im Raum außer in \mathbf{x}' als Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion ϕ eines freien Teilchens interpretiert werden kann. Aufgrund dieser Analogie ist es möglich und hilfreich, einige Konzepte und Methoden aus der Quantenmechanik zu übernehmen. Beispielsweise ist der Laplace-Operator in (5.5) alternativ auch als

$$\Delta = -(\hat{\mathbf{p}}/\hbar)^2 = - \left[(\hat{p}_x/\hbar)^2 + \frac{(\hat{\mathbf{L}}/\hbar)^2}{x^2} \right] , \quad \hat{p}_x \equiv \frac{\hbar}{ix} \frac{\partial}{\partial x}$$

darstellbar, wobei $\hat{\mathbf{L}}$ der Drehimpulsoperator ist. Die Eigenfunktionen von $(\hat{\mathbf{L}}/\hbar)^2$ sind die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$:

$$(\hat{\mathbf{L}}/\hbar)^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell + 1) Y_{\ell m} \quad , \quad (\hat{L}_3/\hbar) Y_{\ell m} = m Y_{\ell m}$$

mit $\ell = 0, 1, 2, \dots$ und $m = -\ell, -(\ell - 1), \dots, \ell - 1, \ell$. Die Kugelflächenfunktionen sind bekanntlich orthonormal und vollständig:

$$\begin{aligned} \langle Y_{\ell m} , Y_{\ell' m'} \rangle &= \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\Omega) Y_{\ell' m'}(\Omega) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \\ \sum_{\ell, m} Y_{\ell m}(\Omega) Y_{\ell m}^*(\Omega') &= \delta(\Omega - \Omega') . \end{aligned}$$

Die Deltafunktion in (5.5) kann daher sofort nach den Kugelflächenfunktionen entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{1}{x^2 \sin(\vartheta)} \delta(x - x') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\vartheta - \vartheta') \\ &= \frac{1}{x^2} \delta(x - x') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \\ &= \frac{1}{x^2} \delta(x - x') \delta(\Omega - \Omega') \\ &= \frac{1}{x^2} \delta(x - x') \sum_{\ell, m} Y_{\ell m}(\Omega) Y_{\ell m}^*(\Omega') . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Wegen der Vollständigkeit der $Y_{\ell m}$ kann auch die Ω -Abhängigkeit von $\phi(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$ nach diesem Basissatz entwickelt werden:

$$\phi(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \sum_{\ell, m} A_{\ell m}(x|x', \Omega') Y_{\ell m}(\Omega) . \tag{5.7}$$

Einsetzen von (5.7) und (5.6) in (5.5) liefert

$$- \left[(\hat{p}_x/\hbar)^2 + \frac{\ell(\ell + 1)}{x^2} \right] A_{\ell m}(x|x', \Omega') = - \frac{1}{\varepsilon_0 x^2} \delta(x - x') Y_{\ell m}^*(\Omega')$$

d. h.

$$A_{\ell m}(x|x', \Omega') = R_{\ell}(x|x') Y_{\ell m}^*(\Omega') \tag{5.8}$$

mit

$$\left[\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x - \frac{\ell(\ell + 1)}{x^2} \right] R_{\ell}(x|x') = - \frac{1}{\varepsilon_0 x^2} \delta(x - x') .$$

Aus (5.8) ist ersichtlich, dass R lediglich von ℓ (und nicht auch explizit von m) abhängig ist und dass R_ℓ reell gewählt werden kann. Wegen der Randbedingungen folgt:

$$R_\ell(x|x') = \begin{cases} a(x')x^\ell & (x < x') \\ b(x')x^{-(\ell+1)} & (x > x') \end{cases},$$

und wegen der Symmetrie unter Vertauschung von \mathbf{x} und \mathbf{x}' (und daher von x und x') muss $a(x') = C(x')^{-(\ell+1)}$ bzw. $b(x') = C(x')^\ell$ gelten:

$$R_\ell(x|x') = C \min \left\{ \frac{x^\ell}{(x')^{\ell+1}}, \frac{(x')^\ell}{x^{\ell+1}} \right\}.$$

Multiplikation von (5.8) mit x und Integration über das infinitesimale Intervall $(x' - \varepsilon) < x < (x' + \varepsilon)$ liefert:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon_0 x'} &= \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} dx \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right] (xR_\ell) = \frac{\partial(xR_\ell)}{\partial x} \Big|_{x'+\varepsilon} - \frac{\partial(xR_\ell)}{\partial x} \Big|_{x'-\varepsilon} \\ &= C[-\ell - (\ell+1)] \frac{1}{x'} = -(2\ell+1)C \frac{1}{x'} \end{aligned}$$

und somit $C = \frac{1}{(2\ell+1)\varepsilon_0}$. Insgesamt gilt daher:

$$\phi(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \sum_{\ell,m} \frac{1}{(2\ell+1)\varepsilon_0} \min \left\{ \frac{x^\ell}{(x')^{\ell+1}}, \frac{(x')^\ell}{x^{\ell+1}} \right\} Y_{\ell m}(\Omega) Y_{\ell m}^*(\Omega').$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in $\Phi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' \phi(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \bar{\rho}(\mathbf{x}')$ mit $x > x'$ (die Ladungsverteilung $\bar{\rho}(\mathbf{x}')$ soll ja räumlich begrenzt sein) liefert schließlich:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\ell,m} \frac{q_{\ell m}}{(2\ell+1)\varepsilon_0} Y_{\ell m}(\Omega) \frac{1}{x^{\ell+1}}, \quad q_{\ell m} \equiv \int d\mathbf{x}' Y_{\ell m}^*(\Omega') (x')^\ell \bar{\rho}(\mathbf{x}').$$

Hiermit sind im Prinzip alle Ordnungen der Multipolentwicklung von $\Phi(\mathbf{x})$ bekannt. Die Entwicklungskoeffizienten $q_{\ell m}$ werden als *sphärische Multipolmomente* bezeichnet. Wegen der Beziehung $Y_{\ell m}^*(\Omega) = (-1)^m Y_{\ell, -m}(\Omega)$ gilt

$$q_{\ell 0} \in \mathbb{R}, \quad [q_{\ell m} + (-1)^m q_{\ell, -m}] \in \mathbb{R}, \quad i[q_{\ell m} - (-1)^m q_{\ell, -m}] \in \mathbb{R},$$

so dass die (im Allgemeinen *komplexen*) sphärischen Multipolmomente $q_{\ell m}$ für festes ℓ einen Satz von $2\ell + 1$ unabhängigen *reellen* Parametern definieren.

Kommentar zu den kartesischen Multipolmomenten

Wir haben also gerade gelernt, dass die Terme von $\mathcal{O}[x^{-(\ell+1)}]$ in der Multipolentwicklung des skalaren Potentials durch $(2\ell + 1)$ unabhängige sphärische Multipolmomente $q_{\ell m}$ charakterisiert werden. Dies zeigt aber auch, dass der kartesische Multipoltensor $M_{i_1 i_2 \dots i_\ell}$, der – wie wir wissen – spurlos und symmetrisch in allen Indizes ist und ebenfalls die $\mathcal{O}[x^{-(\ell+1)}]$ in der Multipolentwicklung beschreibt, durch genau $2\ell + 1$ reelle Parameter festgelegt ist.

5.2 Das Vektorpotential und das magnetische Moment

Nun befassen wir uns mit der Magnetostatik, die durch das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

in Gleichung (5.2) charakterisiert wird. Entwickelt man die Funktion $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ für $x \rightarrow \infty$ in eine Taylor-Reihe (analog zu (5.4)), so erhält man:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi x} \left\{ \int d\mathbf{x}' \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}') + \frac{1}{x} + \left[\int d\mathbf{x}' \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}') (\mathbf{x}')^T \right] \hat{\mathbf{x}} + \dots \right\}. \quad (5.9)$$

Nun gilt generell

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x}' \mathbf{j}(\mathbf{x}', t) &= - \int d\mathbf{x}' \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{j})(\mathbf{x}', t) = \int d\mathbf{x}' \mathbf{x}' \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \\ &= \frac{d}{dt} \int d\mathbf{x}' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t), \end{aligned} \quad (5.10)$$

so dass der Zeitmittelwert von $\int d\mathbf{x}' \mathbf{j}(\mathbf{x}', t)$ und somit der erste Term im rechten Glied von (5.9) Null ist. Der zweite Term in (5.9) kann mit Hilfe von

$$\int d\mathbf{x}' \mathbf{j}'(\mathbf{x}')^T = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' [\mathbf{j}'(\mathbf{x}')^T + \mathbf{x}'(\mathbf{j}')^T] + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' [\mathbf{j}'(\mathbf{x}')^T - \mathbf{x}'(\mathbf{j}')^T] \quad (5.11)$$

umgeschrieben werden, wobei $\mathbf{j}' \equiv \mathbf{j}(\mathbf{x}', t)$ definiert wurde. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' [\mathbf{j}' \mathbf{x}'^T + \mathbf{x}' \mathbf{j}'^T] &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' \mathbf{x}' (\mathbf{x}')^T (\nabla' \cdot \mathbf{j})(\mathbf{x}', t) \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' \mathbf{x}' (\mathbf{x}')^T \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' \mathbf{x}' (\mathbf{x}')^T \rho(\mathbf{x}', t) \right] \end{aligned}$$

liefert der erste Term im rechten Glied von (5.11) jedoch keinen Beitrag zum Zeitmittel in (5.9). Führen wir den magnetischen Dipol als

$$D \equiv \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' [\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}') (\mathbf{x}')^T - \mathbf{x}' \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}')^T]$$

ein, so lässt sich das Vektorpotential für $x \rightarrow \infty$ analog zum elektrostatischen Fall, in dem $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 x^2}$ gilt, als

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi x^2} D \hat{\mathbf{x}} + \dots$$

darstellen. Aus

$$D_{ij} = -\epsilon_{ijk} m_k \quad , \quad \mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' \mathbf{x}' \times \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}')$$

ist ersichtlich, dass sich der antisymmetrische (echte) Tensor D mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors ϵ_{ijk} und des Pseudovektors \mathbf{m} darstellen lässt; es folgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi x^2} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{m} + \dots \quad (5.12)$$

Der Pseudovektor \mathbf{m} wird als *magnetische Moment* des Systems bezeichnet. Das Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ des magnetischen Dipols folgt (unter Vernachlässigung der Beiträge von höheren Multipolen) aus (5.12) als

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi x^3} [3\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}})^T - \mathbb{1}] \mathbf{m} .$$

Dieser Ausdruck ist mit dem entsprechenden Ergebnis für den elektrischen Dipol, $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x^3} [3\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}})^T - \mathbb{1}] \mathbf{d}$, zu vergleichen.

Wir haben also gelernt, dass eine *dynamische*, zeitlich veränderliche, jedoch räumlich beschränkte Ladungs- und Stromverteilung effektiv einen magnetischen Dipol darstellt, wenn man über eine genügend lange Zeit T mittelt. Man kann sich nun fragen, wie sich das entsprechende magnetische Moment \mathbf{m} verhält, wenn man es in ein äußeres, räumlich homogenes, zeitunabhängiges Magnetfeld \mathbf{B}_0 bringt. In diesem Fall würden äußere Kräfte bzw. Drehmomente auf den Dipol einwirken und somit seine Ausrichtung allmählich zeitlich ändern. Damit zu jeder Zeit ein wohldefiniertes magnetisches Moment \mathbf{m} vorliegt, müssen wir natürlich fordern, dass das Magnetfeld \mathbf{B}_0 so *schwach* ist, dass die zeitliche Änderung von \mathbf{m} auf einer Zeitskala stattfindet, die *lang* ist im Vergleich zur Zeit T , die für die Zeitmittelung benötigt wird.

Nehmen wir also an, das äußere Magnetfeld \mathbf{B}_0 sei genügend schwach, damit der Dipol zu jeder Zeit wohldefiniert ist. In diesem Fall findet man zunächst, dass das zeitliche Mittel der auf den Dipol wirkenden Kraft aufgrund von (5.10) Null ist:

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum_{l=1}^N q_l \bar{\mathbf{u}}_l \times \mathbf{B}_0 = \overline{\int d\mathbf{x}' \mathbf{j}(\mathbf{x}', t) \times \mathbf{B}_0} = \mathbf{0} .$$

Außerdem folgt mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x}' (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{j}') &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') (\nabla' \cdot \mathbf{j}) (\mathbf{x}', t) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') \frac{\partial \rho}{\partial t} (\mathbf{x}', t) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}', t) \right] , \end{aligned}$$

dass das zeitgemittelte Drehmoment in einfacher Weise mit dem magnetischen Moment \mathbf{m} des Systems zusammenhängt:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{N}} &= \sum_{l=1}^N \overline{\mathbf{x}_l \times (q_l \mathbf{u}_l \times \mathbf{B}_0)} = \int d\mathbf{x}' \mathbf{x}' \times [\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}') \times \mathbf{B}_0] \\ &= \int d\mathbf{x}' [\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}')(\mathbf{x}')^T - (\mathbf{x}' \cdot \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}')) \mathbb{1}] \mathbf{B}_0 \\ &= D\mathbf{B}_0 = -\mathbf{B}_0 \times \mathbf{m} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0 . \end{aligned}$$

Das Drehmoment $\bar{\mathbf{N}}$ wird also eine *Präzession* des magnetischen Moments \mathbf{m} um die \mathbf{B}_0 -Achse zur Folge haben. Aufgrund unserer Annahme, dass das Magnetfeld so schwach ist, dass die Präzession *langsam* verläuft (verglichen mit der Zeitskala T), folgt $\bar{\mathbf{N}} = \frac{\Delta \bar{\mathbf{L}}}{\Delta t}$, wobei $\bar{\mathbf{L}}$ der zeitgemittelte mechanische Drehimpuls des Systems ist und $\Delta t \gtrsim T$ gilt. Nehmen wir schließlich noch an, dass das Verhältnis q_ℓ/m_ℓ von Ladung zu Masse für alle Teilchen, die signifikant zur Stromdichte

$\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ beitragen,² denselben Wert q/m hat, dann gilt

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' \mathbf{x}' \times \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \sum_l q_l \overline{\mathbf{x}_l \times \mathbf{u}_l} = \frac{q}{2m} \sum_l m_l \overline{\mathbf{x}_l \times \mathbf{u}_l} = \frac{q}{2m} \bar{\mathbf{L}}$$

und somit

$$\frac{\Delta \bar{\mathbf{L}}}{\Delta t} = \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0 = \frac{q}{2m} \bar{\mathbf{L}} \times \mathbf{B}_0 = -\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{L}} \quad , \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{q\mathbf{B}_0}{2m} .$$

Diese Präzession mit der (Larmor-)Frequenz $\omega_L \equiv \frac{|q|B_0}{2m}$ wird als Larmor-Präzession bezeichnet.

²Man denke z. B. an ein Plasma, das neben den sehr leichten mobilen Elektronen auch viel schwerere, immobile Atomkerne enthält. Die Stromdichte wird in diesem Fall durch die Elektronen bestimmt werden.

Kapitel 6

Die Dynamik der Felder - elektromagnetische Wellen

In vielen Lebenslagen (z. B. jedes Mal, wenn man *sieht*, ein Handy benutzt oder zu Hause Rundfunk- oder Fernsehsignale empfängt), ist die explizite Zeitabhängigkeit elektromagnetischer Felder von entscheidender Bedeutung. Aus Kapitel 2 [siehe Gleichung (2.23)] wissen wir, dass das 4-Potential A^μ im Allgemeinen (d. h. ohne Annahmen bezüglich der Eichung) die Gleichung

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu \quad (6.1)$$

erfüllt. Wir wissen außerdem, dass A^μ durch (6.1) nicht eindeutig bestimmt ist, denn auch das alternative 4-Potential

$$\tilde{A}^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

erfüllt Gleichung (6.1), so dass \tilde{A}^μ und A^μ physikalisch äquivalent sind. Eliminiert man den Eichfreiheitsgrad in (6.1), z. B. mit Hilfe der Lorenz-Eichung $\partial_\nu A^\nu = 0$, so erhält man eine *inhomogene Wellengleichung* für A^μ ,

$$\square A^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu,$$

die zeigt, dass das zeitabhängige elektromagnetische Feld den Charakter einer *Welle* hat.¹

In diesem Kapitel werden wir die Struktur der Lösung von Gleichung (6.1) untersuchen, zuerst in Abwesenheit von Ladungen und Strömen ($j^\mu = 0$), dann unter Berücksichtigung möglicher Ladungen und Ströme ($j^\mu \neq 0$), und schließlich werden wir (bei unserer Untersuchung von Wellen an Grenzflächen sowie in Kabeln, Hohlraumresonatoren und Wellenleitern) auch die zusätzliche Anwesenheit eines Mediums mitberücksichtigen müssen. Als Anwendungen der Theorie werden u. a. der *Skinneffekt* und Wellen in *Hohlräumen* mit unterschiedlicher Geometrie diskutiert; als Beispiel elektromagnetischer Wellen in einem Hohlraum

¹In Kapitel 2 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Lorenz-Eichung den Eichfreiheitsgrad nicht vollständig eliminiert: Um Eichungen mit Hilfe eines Lorentz-Skalars Λ , der die homogene Wellengleichung erfüllt ($\square \Lambda = 0$), sind immer noch möglich.

mit sphärischer Symmetrie behandeln wir die aus der Physik der Erdatmosphäre bekannten *Schumann-Resonanzen*.

6.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Falls in Gleichung (6.1) $j^\mu = 0$ gilt, d. h. falls die Dynamik des elektromagnetischen Feldes in Abwesenheit elektrischer Ladungen und Ladungsströme untersucht wird, bietet sich die *Coulomb-Eichung* ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) als besonders bequem an, da in dieser Eichung

$$\Delta\Phi = 0 \quad , \quad \square\mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

gilt und die eindeutige Lösung der Gleichung $\Delta\Phi = 0$, die die Randbedingung $\Phi = 0$ im Unendlichen erfüllt, für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ durch $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$ gegeben ist. In der Coulomb-Eichung gilt daher:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad , \quad \square\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad , \quad (6.2)$$

so dass das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ in diesem Fall die *homogene Wellengleichung* erfüllt. Die Lösung $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ von (6.2) liegt eindeutig fest, falls auch die Feldkonfiguration zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ bekannt ist:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) \equiv \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{x}) \quad . \quad (6.3)$$

Wir fassen die wohlbekannten Resultate für die Lösung des Anfangswertproblems (6.2) und (6.3) im Folgenden kurz zusammen.

Am einfachsten sind die quasi-eindimensionalen Lösungen von (6.2), die als *ebene Wellen* bezeichnet werden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_1, t)$$

und die eindimensionale Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{A}(x_1, 0) \equiv \mathbf{A}_0(x_1) \quad , \quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}(x_1, 0) = \dot{\mathbf{A}}_0(x_1)$$

erfüllen. Mit Hilfe der Koordinatentransformation $\xi \equiv x_1 - ct$, $\eta \equiv x_1 + ct$ erhält man die einfache Gleichung $\partial_\xi\partial_\eta\mathbf{A} = \mathbf{0}$, die allgemein durch

$$\mathbf{A}(x_1, t) = \mathbf{a}_1(\xi) + \mathbf{a}_2(\eta) = \mathbf{a}_1(x_1 - ct) + \mathbf{a}_2(x_1 + ct)$$

gelöst wird, wobei die (zunächst beliebigen) Funktionen \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden:

$$\mathbf{A}(x_1, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{A}_0(x_1 - ct) + \mathbf{A}_0(x_1 + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x_1 - ct}^{x_1 + ct} dy \dot{\mathbf{A}}_0(y) \quad .$$

Die allgemeine ebene Welle ist also eine Überlagerung einer nach *rechts* und einer nach *links* laufenden Welle.

Auch sehr einfach ist die *sphärisch symmetrische Welle* der Form $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r, t)$, wobei wir annehmen, dass die Lösung symmetrisch um den fest gewählten Punkt $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ sein soll:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} - r\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad r = |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}| \quad , \quad \hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} .$$

Die Wellengleichung lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \square \mathbf{A} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{A} = \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \mathbf{A} \\ &= \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \right] \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] (r\mathbf{A}) , \end{aligned}$$

so dass die allgemeine Lösung die Form einer Überlagerung einer ausfallenden und einer einfallenden Welle hat:

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{1}{r} [\mathbf{a}_1(r - ct) + \mathbf{a}_2(r + ct)] .$$

Als Spezialfall ist für alle $t > 0$ in dieser Lösung auch die ausfallende *Kugelwelle*

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}}{4\pi cr} \delta(r - ct) \quad , \quad r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$$

enthalten, die mit der Amplitude $\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$ vom infinitesimalen Volumenelement $d\boldsymbol{\xi}$ um $\boldsymbol{\xi}$ ausgeht. Überlagerungen solcher Kugelwellen,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \int d\boldsymbol{\xi} \frac{\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi})}{4\pi cr} \delta(r - ct) \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int d\Omega \int dr r \mathbf{a}(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{r}}) \delta(r - ct) \\ &= \frac{t}{4\pi} \int d\Omega \mathbf{a}(\mathbf{x} + ct\hat{\mathbf{r}}) \equiv tM_{\mathbf{x}, ct}[\mathbf{a}] \end{aligned} \tag{6.4}$$

mit $d\Omega \equiv \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$, sind wiederum Lösungen der homogenen Wellengleichung. Hierbei ist zu beachten, dass $M_{\mathbf{x}, ct}[\mathbf{a}]$ einfach als Mittelwert der Funktion \mathbf{a} , berechnet über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius ct und dem Mittelpunkt \mathbf{x} , interpretiert werden kann.

Die Funktion $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ in (6.4), die also vollständig durch $\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi})$ definiert wird, zeigt das folgende interessante Verhalten zum Anfangszeitpunkt $t = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial A_i}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) &= \lim_{t \downarrow 0} \left\{ M_{\mathbf{x}, ct}[a_i] + ct M_{\mathbf{x}, ct} \left[\frac{\partial a_i}{\partial \mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] \right\} = a_i(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2}(\mathbf{x}, 0) &= \lim_{t \downarrow 0} \left\{ 2c M_{\mathbf{x}, ct} \left[\frac{\partial a_i}{\partial \mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] + c^2 t M_{\mathbf{x}, ct} \left[\hat{\mathbf{r}}^T \frac{\partial^2 a_i}{\partial \mathbf{x}^2} \hat{\mathbf{r}} \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

oder kurz gefasst:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} . \tag{6.5}$$

Aus (6.4) und (6.5) folgt sofort, dass die allgemeine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung

$$\square \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{x})$$

durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \{tM_{\mathbf{x},ct}[\mathbf{A}_0]\} + tM_{\mathbf{x},ct}[\dot{\mathbf{A}}_0] \quad (6.6)$$

gegeben ist, denn laut Gleichung (6.5) liefert der erste Term im rechten Glied einen Beitrag $\mathbf{A}_0(\mathbf{x})$ zu $\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0)$, aber keinen Beitrag zu $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)$, während der zweite Term keinen Beitrag zu $\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0)$, dafür aber einen Beitrag $\dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{x})$ zu $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)$ liefert.

Falls die Anfangsbedingungen translationsinvariant in einer Raumrichtung (z. B. in der $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Richtung) sind: $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0(x_1, x_2)$ und $\dot{\mathbf{A}}_0 = \dot{\mathbf{A}}_0(x_1, x_2)$, dann liegt ein quasi-zweidimensionales Problem vor, dessen Lösungen als *Zylinderwellen* bezeichnet werden. Führen wir Polarkoordinaten (ρ, φ) ein:

$$\rho \equiv ct \sin(\vartheta) \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\rho}} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

und bezeichnen wir die Ortskoordinaten in der (x_1, x_2) -Ebene als $\mathbf{x}_\perp \equiv (x_1, x_2)$, dann erhalten die Beiträge $tM_{\mathbf{x},ct}[\mathbf{a}]$ in (6.6) die Form

$$\begin{aligned} tM_{\mathbf{x},ct}[\mathbf{a}] &= \frac{1}{2\pi c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{ct} d\rho \mathbf{a}(\mathbf{x}_\perp + \rho\hat{\boldsymbol{\rho}}) \frac{\rho}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^{ct} d\rho M_{\mathbf{x}_\perp, \rho}^{(2)}[\mathbf{a}] \frac{\rho}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \end{aligned}$$

wobei $M_{\mathbf{x}_\perp, \rho}^{(2)}[\mathbf{a}]$ nun den Mittelwert der Funktion $\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}_\perp)$ über einen Kreis mit Radius ρ und Mittelpunkt \mathbf{x}_\perp darstellt. Es ist sehr einfach, das qualitative Verhalten von Zylinderwellen als Funktion der Zeit zu bestimmen. Nehmen wir an, dass das Feld anfangs in einem Raumbereich $\mathcal{D}_\perp \subset \mathbb{R}^2$ lokalisiert ist, wobei für alle $\boldsymbol{\xi}_\perp \in \mathcal{D}_\perp$ gilt: $ct_1 \leq |\boldsymbol{\xi}_\perp - \mathbf{x}_\perp| \leq ct_2$. Ein Beobachter in \mathbf{x}_\perp wird für alle $t \leq t_1$ kein Signal erhalten, da in diesem Fall $M_{\mathbf{x}_\perp, \rho}^{(2)}[\mathbf{A}_0]$ und $M_{\mathbf{x}_\perp, \rho}^{(2)}[\dot{\mathbf{A}}_0]$ gleich Null sind. Für $t > t_1$ wird er ein Signal erhalten; insbesondere gilt im Langzeitlimites ($t \gg t_2$):

$$\begin{aligned} tM_{\mathbf{x},ct}[\mathbf{a}] &\sim \frac{1}{2\pi c^2 t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{ct} d\rho \rho \mathbf{a}(\mathbf{x}_\perp + \rho\hat{\boldsymbol{\rho}}) \\ &\sim \frac{1}{2\pi c^2 t} \int d\boldsymbol{\xi}_\perp \mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}_\perp) \quad (\mathbf{a} = \mathbf{A}_0, \dot{\mathbf{A}}_0) \end{aligned}$$

d. h.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_\perp, t) \sim \frac{1}{2\pi c^2 t} \left[\int d\boldsymbol{\xi}_\perp \dot{\mathbf{A}}_0(\boldsymbol{\xi}_\perp) - \frac{1}{t} \int d\boldsymbol{\xi}_\perp \mathbf{A}_0(\boldsymbol{\xi}_\perp) \right] .$$

Man sieht, dass die Amplitude der Welle in \mathbf{x}_\perp zu jeder endlichen Zeit nicht verschwindet (*Nacheffekt*).

6.2 Der Einfluss von Ladungen und Strömen

In Anwesenheit von Ladungen und Strömen bietet sich die *Lorenz-Eichung* an; in dieser Eichung geht Gleichung (6.1) in die inhomogene Wellengleichung

$$\square A^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu \quad (6.7)$$

für das 4-Potential über. Das 4-Potential ist nicht eindeutig bestimmt durch (6.7), da es bekanntlich noch eine Resteichfreiheit der Form $A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ gibt, wobei Λ die homogene Wellengleichung $\square \Lambda = 0$ erfüllt und ein Lorentz-Skalar ist. Die Anfangsbedingung für (6.7) sei durch

$$A^\mu(\mathbf{x}, 0) \equiv A_0^\mu(\mathbf{x}) \quad , \quad \frac{\partial A^\mu}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \equiv \dot{A}_0^\mu(\mathbf{x}) \quad (6.8)$$

gegeben. Die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems (6.7) und (6.8) kann als Summe zweier Beiträge geschrieben werden:

$$A^\mu = A_1^\mu + A_2^\mu \quad ,$$

wobei A_1^μ die Lösung der *homogenen* Wellengleichung

$$\square A_1^\mu = 0 \quad , \quad A_1^\mu(\mathbf{x}, 0) = A_0^\mu(\mathbf{x}) \quad , \quad \frac{\partial A_1^\mu}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \dot{A}_0^\mu(\mathbf{x}) \quad (6.9)$$

ist und A_2^μ die Lösung der *inhomogenen* Wellengleichung

$$\square A_2^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu \quad , \quad A_2^\mu(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial A_2^\mu}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (6.10)$$

darstellt. Die Lösung von (6.9) ist bereits bekannt:

$$A_1^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \{t M_{\mathbf{x}, ct}[A_0^\mu]\} + t M_{\mathbf{x}, ct}[\dot{A}_0^\mu] \quad .$$

Um den Einfluss der Ladungen und Ströme zu bestimmen, müssen wir also nur noch das inhomogene Problem (6.10) lösen.

Aber auch die Lösung von (6.10) ist im Wesentlichen bereits bekannt, da sich A_2^μ als

$$A_2^\mu(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau \, a^\mu(\mathbf{x}, t; \tau)$$

darstellen lässt, wobei a^μ die *homogene* Wellengleichung

$$\begin{aligned} \square a^\mu &= 0 \quad (t \geq \tau) \\ a^\mu(\mathbf{x}, \tau; \tau) &= 0 \quad , \quad \frac{\partial a^\mu}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau; \tau) = \frac{c}{\varepsilon_0} j^\mu(\mathbf{x}, \tau) \end{aligned} \quad (6.11)$$

erfüllt. Dies sieht man sofort daraus, dass in diesem Fall sowohl die inhomogene

Wellengleichung,

$$\begin{aligned}
 \square \int_0^t d\tau a^\mu(\mathbf{x}, t; \tau) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t d\tau \frac{\partial a^\mu}{\partial t}(\mathbf{x}, t; \tau) + a^\mu(\mathbf{x}, t; t) \right] \\
 &\quad - \int_0^t d\tau (\Delta a^\mu)(\mathbf{x}, t; \tau) \\
 &= \int_0^t d\tau \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a^\mu}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t; \tau) - (\Delta a^\mu)(\mathbf{x}, t; \tau) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{c^2} \frac{\partial a^\mu}{\partial t}(\mathbf{x}, t; t) \\
 &= \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu(\mathbf{x}, t),
 \end{aligned}$$

als auch die Anfangsbedingung in (6.10) erfüllt sind. Da die allgemeine Lösung von (6.11) aus Abschnitt [??] bekannt ist, können wir nun auch die allgemeine Form von A_2^μ angeben:

$$A_2^\mu(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau (t - \tau) M_{\mathbf{x}, c(t-\tau)} \left[\frac{c}{\varepsilon_0} j_\tau^\mu \right], \quad j_\tau^\mu(\mathbf{x}) \equiv j^\mu(\mathbf{x}, \tau).$$

Führt man nun eine neue Variable $r \equiv c(t - \tau)$ ein, so lässt sich dieses Ergebnis auch als

$$\begin{aligned}
 A_2^\mu(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c^2} \int_0^{ct} dr r M_{\mathbf{x}, r} \left[\frac{c}{\varepsilon_0} j_\tau^\mu \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \int d\Omega \int_0^{ct} dr r j^\mu(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{r}}, t - \frac{r}{c}) \\
 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \int d\xi \frac{j^\mu\left(\xi, t - \frac{|\xi - \mathbf{x}|}{c}\right)}{|\xi - \mathbf{x}|} H\left(t - \frac{|\xi - \mathbf{x}|}{c}\right) \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

darstellen, wobei $H(y)$ die Heaviside'sche Stufenfunktion bezeichnet. Die Interpretation von (6.12) ist klar: Da sich elektromagnetische Signale mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten, enthält $A_2^\mu(\mathbf{x}, t)$ nur Beiträge solcher Ladungen und Ströme $j^\mu(\xi, \tau)$, die sich zum Zeitpunkt τ in einem Abstand $|\xi - \mathbf{x}| = c(t - \tau)$ von \mathbf{x} befanden. Die Zeit $\tau = t - \frac{|\xi - \mathbf{x}|}{c}$ wird als die *retardierte* Zeit bezeichnet.

Nehmen wir nun an, die Ladungs- und Stromverteilung sei translationsinvariant in $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Richtung. Es breiten sich dann Zylinderwellen aus, und aufgrund

von Abschnitt [6.1] hat das 4-Potential nun die Form:

$$\begin{aligned}
 A_2^\mu(\mathbf{x}_\perp, t) &= \int_0^t d\tau \frac{1}{c} \int_0^{c(t-\tau)} d\rho M_{\mathbf{x}_\perp, \rho}^{(2)} \left[\frac{c}{\varepsilon_0} j_\tau^\mu \right] \frac{\rho}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - \rho^2}} \\
 &= \frac{1}{c^2} \int_0^{ct} dr \int_0^r d\rho \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} M_{\mathbf{x}_\perp, \rho}^{(2)} \left[\frac{c}{\varepsilon_0} j_{t-\frac{r}{c}}^\mu \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c} \int_0^{ct} dr \int d\xi_\perp \frac{j^\mu(\xi_\perp, t - \frac{r}{c})}{\sqrt{r^2 - |\xi_\perp - \mathbf{x}_\perp|^2}} H(r - |\xi_\perp - \mathbf{x}_\perp|) .
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Analog kann man das 4-Potential für eine Ladungs- und Stromverteilung mit Translationsinvarianz in \hat{e}_2 - und \hat{e}_3 -Richtung aus der Lösung der homogenen Wellengleichung für ebene Wellen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 A_2^\mu(x_\perp, t) &= \int_0^t d\tau \frac{1}{2c} \int_{x_\perp - c(t-\tau)}^{x_\perp + c(t-\tau)} d\xi_\perp \frac{c}{\varepsilon_0} j^\mu(\xi_\perp, \tau) \\
 &= \frac{1}{2\varepsilon_0 c} \int_0^{ct} dr \int d\xi_\perp j^\mu(\xi_\perp, t - \frac{r}{c}) H(r - |\xi_\perp - x_\perp|) .
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Das Langzeitverhalten von A^μ für Zylinderwellen und ebene Wellen weicht wiederum stark von dem in (6.12) ab. Nehmen wir an, die Ladungs- und Stromverteilung j^μ ist räumlich und zeitlich lokalisiert, so dass für einen fest vorgegebenen Punkt \mathbf{x} in (6.12) gilt:

$$j^\mu(\xi, \tau) = 0 \quad \text{für } |\xi - \mathbf{x}| > cT \text{ oder } \tau > T ,$$

und analog für $j^\mu(\xi_\perp, \tau)$ in (6.13) bzw. $j^\mu(\xi_\perp, \tau)$ in (6.14). Für alle $t \geq 2T$ folgt $A_2^\mu(\mathbf{x}, t) = 0$ in (6.12). In (6.13) jedoch folgt

$$A_2^\mu(\mathbf{x}_\perp, t) \sim \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 ct} \int d\xi_\perp \int d\tau j^\mu(\xi_\perp, \tau) \quad (t \rightarrow \infty) \tag{6.15}$$

und in (6.14) sogar

$$A_2^\mu(x_\perp, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int d\xi_\perp \int d\tau j^\mu(\xi_\perp, \tau) \quad (t \geq 2T) . \tag{6.16}$$

Die physikalischen Konsequenzen von (6.15) und (6.16) sind jedoch gänzlich unterschiedlich: Während (6.15) zeigt, dass das elektromagnetische Feld in \mathbf{x}_\perp sogar für beliebig lange Zeiten ungleich Null ist, sind die räumlichen und zeitlichen Ableitungen von (6.16) rigoros gleich Null, so dass kein elektromagnetisches Feld erzeugt wird, obwohl $A_2^\mu(x_\perp, t)$ selbst ungleich Null ist.

Besonders interessant ist der Fall einer Punktquelle der Form $j^\mu(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t - 0^+)$ in (6.12). Es folgt:

$$A_2^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 cx} \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) \equiv G_3(\mathbf{x}, t) . \tag{6.17}$$

Analog folgt mit $j^\mu(\mathbf{x}_\perp, t) = \delta(\mathbf{x}_\perp)\delta(t - 0^+)$ in (6.13):

$$\begin{aligned} A_2^\mu(\mathbf{x}_\perp, t) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c} \int_0^{ct} dr \frac{\delta(t - \frac{r}{c} - 0^+)}{\sqrt{r^2 - |\mathbf{x}_\perp|^2}} H(r - |\mathbf{x}_\perp|) \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{H(ct - |\mathbf{x}_\perp|)}{\sqrt{(ct)^2 - |\mathbf{x}_\perp|^2}} \equiv G_2(\mathbf{x}_\perp, t) \end{aligned} \quad (6.18)$$

und mit $j^\mu(x_\perp, t) = \delta(x_\perp)\delta(t - 0^+)$ in (6.14):

$$A_2^\mu(x_\perp, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0} H(ct - |x_\perp|) \equiv G_1(x_\perp, t) . \quad (6.19)$$

Die Funktionen G_3 , G_2 und G_1 erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \square G_3 &= \frac{1}{\varepsilon_0 c} \delta(\mathbf{x})\delta(t - 0^+) \quad , \quad G_3(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial G_3}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_\perp^2} \right) G_2 &= \frac{1}{\varepsilon_0 c} \delta(\mathbf{x}_\perp)\delta(t - 0^+) \quad , \quad G_2(\mathbf{x}_\perp, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial G_2}{\partial t}(\mathbf{x}_\perp, 0) = 0 \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_\perp^2} \right) G_1 &= \frac{1}{\varepsilon_0 c} \delta(x_\perp)\delta(t - 0^+) \quad , \quad G_1(x_\perp, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial G_1}{\partial t}(x_\perp, 0) = 0 \end{aligned}$$

und werden als *Green'sche Funktionen* der drei-, zwei- und eindimensionalen Wellengleichung bezeichnet. Sie sind natürlich von großem praktischen Nutzen, denn wenn sie explizit bekannt sind, folgt die allgemeine Lösung der drei-, zwei- oder eindimensionalen Wellengleichung als:

$$\begin{aligned} A_2^\mu(\mathbf{x}, t) &= \int d\xi \int d\tau G_3(\mathbf{x} - \xi, t - \tau) j^\mu(\xi, \tau) \\ A_2^\mu(\mathbf{x}_\perp, t) &= \int d\xi_\perp \int d\tau G_2(\mathbf{x}_\perp - \xi_\perp, t - \tau) j^\mu(\xi_\perp, \tau) \\ A_2^\mu(x_\perp, t) &= \int d\xi_\perp \int d\tau G_1(x_\perp - \xi_\perp, t - \tau) j^\mu(\xi_\perp, \tau) . \end{aligned}$$

Vergleicht man die Ausdrücke für die Green'schen Funktionen G_3 , G_2 und G_1 in (6.17) - (6.19) miteinander, so beobachtet man große qualitative Unterschiede: Die Green'sche Funktion G_3 erfüllt das *Huygens'sche Prinzip*, das (in der modernen Formulierung) besagt, dass das Signal einer Punktquelle auf dem Rand $\{|\mathbf{x}| = ct\}$ des Vorwärts-Lichtkegels konzentriert ist. Das Huygens'sche Prinzip gilt gewissermaßen auch für G_1 , d. h. für ebene Wellen, vorausgesetzt, dass man unter „Signal“ die physikalischen Felder, d. h. die Ableitungen von G_1 nach den Orts- und Zeitkoordinaten, versteht. Das Huygens'sche Prinzip gilt nicht für Zylinderwellen, d. h. für G_2 , denn in diesem Fall gilt $G_2 \neq 0$ für alle \mathbf{x}_\perp mit $|\mathbf{x}_\perp| < ct$. Allgemeiner kann man zeigen, dass das Huygens'sche Prinzip in allen ungeraden Dimensionen gilt, und amüsanterweise gilt es *nicht* in allen geraden Raumdimensionen. In geraden Dimensionen verstummt das Signal, das man von einer Punktquelle (oder durch Überlagerung: von einer beliebigen Quelle) empfängt, also nie.

Alternativ kann die retardierte Green'sche Funktion $G(\mathbf{x}, t)$ auch mittels einer Fourier-Transformation berechnet werden. Als Beispiel behandeln wir den dreidimensionalen Fall. Die Fourier-Transformierte $g_3(\mathbf{x}, \omega)$ von $G_3(\mathbf{x}, t)$ ist durch

$$g_3(\mathbf{x}, \omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt G_3(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} \quad , \quad G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega g_3(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}$$

definiert und erfüllt die inhomogene Helmholtz-Gleichung

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) g_3 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 c}} \delta(\mathbf{x}) .$$

Aus der Übung ist bereits bekannt, dass g_3 allgemein die Form

$$g_3(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 c}} \left[\frac{\cos\left(\omega \frac{x}{c}\right)}{4\pi x} + B \frac{\sin\left(\omega \frac{x}{c}\right)}{4\pi x} \right]$$

hat, wobei B prinzipiell ω -abhängig sein dürfte. Durch inverse Fourier-Transformation erhält man

$$G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c} \int d\omega \left[\cos\left(\omega \frac{x}{c}\right) + B \sin\left(\omega \frac{x}{c}\right) \right] \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi x} . \quad (6.20)$$

Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\square G = \frac{1}{\epsilon_0 c} \delta(\mathbf{x}) \delta(t - 0^+)$ ist natürlich nicht eindeutig festgelegt: Man kann zu jeder Lösung G immer eine Lösung der homogenen Wellengleichung addieren. Die Lösung wird jedoch eindeutig, wenn man die Anfangsbedingungen $G_3(\mathbf{x}, 0) = 0$ und $\partial_t G_3(\mathbf{x}, 0) = 0$ auferlegt. Diese Anfangsbedingungen entsprechen der Wahl $B = i$ in (6.20):

$$G_3(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c x} \left[\frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})} \right] = \frac{\delta\left(t - \frac{x}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 c x} .$$

Offensichtlich gilt $G_3(\mathbf{x}, t) = 0$ für alle $t < 0$, so dass G_3 tatsächlich die *retardierte* Green'sche Funktion darstellt. Für die alternative Wahl $B = -i$ erhält man analog:

$$G_3^{\text{av}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta\left(t + \frac{x}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 c x} ,$$

eine Lösung, die als die *avancierte* Green'sche Funktion der (dreidimensionalen) Wellengleichung bezeichnet wird.

6.3 Wellengleichungen in materiellen Medien

Wie bereits aus der Einführung bekannt (s. Gleichung (??)), sind bei der Formulierung der Maxwell-Theorie „im Medium“ auch die Effekte der Magnetisierung \mathbf{M} und der Polarisation \mathbf{P} zu berücksichtigen. Mit Hilfe der Definitionen

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

erhält man die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \text{III. } \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\
 \text{II. } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \text{IV. } \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j},
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

wobei ρ und \mathbf{j} wie üblich eine Kontinuitätsgleichung erfüllen: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Die Theorie (6.21) erhält erst dann einen physikalischen Inhalt, wenn die Beziehungen zwischen \mathbf{P} und \mathbf{M} einerseits und \mathbf{E} und \mathbf{B} andererseits festgelegt werden. In einfachen (d. h. konkret: in linearen, isotropen) Medien gelten z. B. die Materialgleichungen

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} ,$$

die in Leitern noch um das Ohm'sche Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

ergänzt werden. Die Maxwell-Gleichungen (6.21) „im Medium“ können mit Hilfe einer räumlichen Mittelung aus denjenigen „im Vakuum“ hergeleitet werden (s. z. B. § 6.7 in *Jackson*). Die Theorie „im Medium“ ist durch die in der Herleitung von (6.21) auftretenden Näherungen und durch die Einführung der Materialparameter ε_r , μ_r und σ eher phänomenologischer Natur. Sie ist einerseits also weniger fundamental als die Maxwell-Theorie „im Vakuum“, andererseits offensichtlich von großem Belang im Hinblick auf praktische Anwendungen.

Die Maxwell-Theorie für materielle Medien kann auch Lorentz-kovariant formuliert werden. Die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder können – wie üblich – mit Hilfe des Feldtensors $F^{\mu\nu} = (\mathbf{E}, c\mathbf{B})$ beschrieben werden. Analog kann man den echten Vektor \mathbf{P} und den Pseudovektor \mathbf{M} zu einem antisymmetrischen echten 4-Tensor $M^{\mu\nu} = (-c^2\mathbf{P}, c\mathbf{M})$ kombinieren:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}^T & & \\ \mathbf{E} & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -cB_2 & cB_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c^2\mathbf{P}^T & cM_2 \\ -c^2\mathbf{P} & cM_3 & 0 & -cM_1 \\ -cM_2 & cM_1 & cM_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die \mathbf{D} - und \mathbf{H} -Felder können dann mit Hilfe einer Linearkombination dieser Tensoren beschrieben werden:

$$H^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} + c^2 \mathbf{P}, \frac{c}{\mu_0} \mathbf{B} - c \mathbf{M} \right) = (c^2 \mathbf{D}, c \mathbf{H}) .$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind unverändert und können somit als

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

zusammengefasst werden. Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen, die im Vakuum durch $\partial_\mu (\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu}) = c j^\nu$ gegeben sind, erhalten im Medium die Form

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = c j^\nu .$$

Auch die Materialgleichungen können Lorentz-kovariant dargestellt werden, wie zuerst von Minkowski (1908) gezeigt wurde. Wenn wir annehmen, dass das betrachtete Medium eine 3-Geschwindigkeit \mathbf{u} und somit eine 4-Geschwindigkeit

$u^\mu = \gamma_u(1, \boldsymbol{\beta})$ relativ zum Beobachter hat, dann kann die Materialgleichung $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ Lorentz-kovariant als

$$\frac{1}{c^2} H^{\nu\rho} u_\rho = \varepsilon F^{\nu\rho} u_\rho,$$

die Gleichung $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ als

$$\tilde{F}^{\nu\rho} u_\rho = \mu \tilde{H}^{\nu\rho} u_\rho$$

und das Ohm'sche Gesetz als

$$j^\nu = (u_\rho j^\rho) u^\nu + \sigma F^{\nu\rho} u_\rho$$

dargestellt werden. Bei der Interpretation der letzten Gleichung ist zu bedenken, dass der 3-Strom einen konvektiven und einen konduktiven Anteil hat, wobei der konvektive Teil auf die Bewegung des Mediums mit der 3-Geschwindigkeit \mathbf{u} zurückzuführen ist und der konduktive Anteil vom elektrischen Feld hervorgerufen wird. Erwähnt sei noch die Energiebilanzgleichung

$$-\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial \rho_\mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (6.22)$$

wobei die Energiedichte $\rho_\mathcal{E}$ und die Energiestromdichte \mathbf{S} für lineare, nicht notwendigerweise isotrope Medien die Form

$$\rho_\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

hat. Die Bilanzgleichung (6.22) kann wiederum als 0-Komponente einer Tensorgleichung der Form (3.39) geschrieben werden.

Wir untersuchen nun die Möglichkeit der Wellenausbreitung in materiellen Medien. Hierzu gehen wir von den makroskopischen Maxwell-Gleichungen (6.21) aus und nehmen an, dass die Materialparameter ε, μ und σ ortsunabhängig und räumlich isotrop sind. Des Weiteren nehmen wir an, dass der betrachtete Raumbereich keine Ladung hat ($\rho = 0$). In diesem Fall kann man die (\mathbf{E}, \mathbf{B}) -Felder, analog zu Gleichung (6.2), mit Hilfe von Potentialen (Φ, \mathbf{A}) beschreiben, die in der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ die Gleichungen

$$\Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho = 0 \quad (6.23)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &= -[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}] = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \mathbf{B} \\ &= -\mu \nabla \times \mathbf{H} = -\mu \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\mu \left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (6.24)$$

erfüllen. Die eindeutige Lösung der Laplace-Gleichung (6.23) zur Randbedingung $\Phi = 0$ für $|\mathbf{x}| = \infty$ lautet $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, so dass sich der Zusammenhang zwischen den Potentialen und den Feldern zu

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.25)$$

vereinfacht. Folglich lässt sich (6.24) auch als

$$\Delta \mathbf{A} = \varepsilon \mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (6.26)$$

schreiben. Hierbei wurden die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\bar{c} \equiv (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ und die charakteristische Dämpfungszeit $\tau \equiv \frac{\varepsilon}{\sigma}$ der Wellen eingeführt. Der letzte Term im rechten Glied von (6.26) wirkt als Reibungs- oder Dämpfungsterm. Aus (6.25) folgt sofort, dass \mathbf{E} und \mathbf{B} Gleichungen der selben Form wie \mathbf{A} erfüllen:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{E} &= \frac{1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ \Delta\mathbf{B} &= \frac{1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \right).\end{aligned}\tag{6.27}$$

Die Wellengleichungen (6.26) und (6.27) mit zusätzlichem Dämpfungsterm sind Spezialfälle der sogenannten *Telegraphengleichung*,

$$\Delta v = \frac{1}{\bar{c}^2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (r_1 + r_2) \frac{\partial v}{\partial t} + r_1 r_2 v \right] \quad (r_1, r_2 \geq 0),$$

die im Allgemeinen neben dem Dämpfungsterm auch einen „Oszillatorterm“ (letzter Term im rechten Glied) enthält.

Bei der Herleitung von (6.26) und (6.27) wurde angenommen, dass das Medium *dispersionslos* ist, d. h. dass die Materialparameter σ , ε und μ nicht von der typischen Frequenz der Wellen $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ bzw. $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ oder $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ abhängen: $\sigma(\omega) \simeq \sigma(0) \equiv \sigma$ (und analog für ε und μ). Wir beschränken uns also auf nicht zu große Frequenzen. Für *Isolatoren* ist die Relaxationszeit τ so lang, dass für alle relevanten Frequenzen ω gilt: $\omega\tau \gg 1$. Folglich kann der Dämpfungsterm in (6.26) und (6.27) vernachlässigt werden, und die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} und das Vektorpotential \mathbf{A} erfüllen die homogenen Wellengleichungen :

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad \Delta\mathbf{E} = \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta\mathbf{B} = \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}.\tag{6.28}$$

Im entgegengesetzten (metallischen) Limes ist σ groß und τ daher klein ($\tau \simeq 10^{-14}$ s), so dass für alle Frequenzen im nicht-dispersiven Bereich $\omega\tau \ll 1$ gilt. Es folgt, dass der Dämpfungsterm dominiert und die zweiten Zeitableitungen vernachlässigt werden können:

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{\bar{c}^2\tau} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \Delta\mathbf{E} = \frac{1}{\bar{c}^2\tau} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad \Delta\mathbf{B} = \frac{1}{\bar{c}^2\tau} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.\tag{6.29}$$

Im metallischen Limes erfüllen die Felder daher Diffusionsgleichungen mit einer effektiven Diffusionskonstanten $\bar{c}^2\tau$. Im Zwischenbereich zwischen Isolatoren und Metallen, also z. B. für schlechte Leiter oder Halbleiter, kann im interessierenden Frequenzbereich durchaus $\omega\tau \simeq 1$ gelten; in diesem Fall sind beide Terme im rechten Glied von (6.26) bzw. (6.27) relevant.

Wir werden im Folgenden einige wichtige physikalische Anwendungen der Telegraphengleichungen (6.26) und (6.27) betrachten.

6.4 Skintiefe und Skineffekt

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Amplitude der elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} nahe der Grenzfläche zwischen einem Leiter (z. B. einem Metall) und einem Isolator (Dielektrikum). Wir werden sehen, dass ein genügend

hochfrequentes elektromagnetisches Feld in einem Leiter auf eine dünne Schicht nahe der Oberfläche (also auf die „Haut“ oder „Skin“ des Leiters) beschränkt ist. Die Tatsache, dass folglich auch Wechselströme auf diesen Randbereich des Leiters beschränkt sind, wird als *Skinneffekt* bezeichnet.

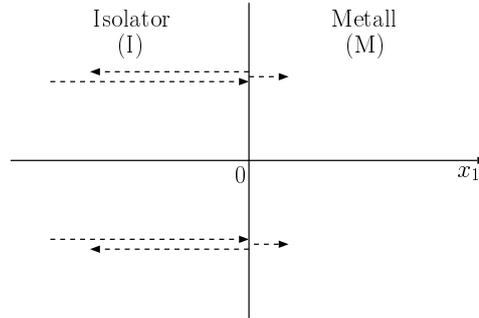


Abbildung 6.1: Eine Welle am Übergang zwischen einem Isolator und einem gut leitenden Metall zur Illustration der „Skintiefe“.

6.4.1 Die Skintiefe in Metallen

Um zu zeigen, dass ein in ein Metall eindringendes, genügend hochfrequentes, elektromagnetisches Feld auf eine dünne Grenzschicht beschränkt ist, betrachten wir eine ebene, monochromatische Welle, die von links entlang der \hat{e}_1 -Achse auf die Grenzfläche $x_1 = 0$ zwischen dem Isolator und dem Metall einfällt. Die Welle wird zum Teil reflektiert und zum Teil transmittiert, so dass im Isolatorbereich auch eine nach links laufende Komponente anwesend ist. Wir nehmen nach wie vor an, dass die Ladungsdichte überall Null ist, insbesondere auch im Metall, so dass sich wiederum die *Coulomb-Eichung* anbietet. In der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = 0$ kann das Vektorpotential \mathbf{A} , das also senkrecht auf der \hat{e}_1 -Richtung steht, in \hat{e}_2 -Richtung gewählt werden. Im Isolator (d. h. für $x_1 < 0$) gilt daher

$$\mathbf{A}_I(x_1, t) = \hat{e}_2 \operatorname{Re} [\mathcal{A}_I(x_1, t)] \tag{6.30}$$

mit

$$\mathcal{A}_I(x_1, t) \equiv a_r e^{i(kx_1 - \omega t)} + a_l e^{-i(kx_1 + \omega t)} \quad (x_1 < 0).$$

Hierbei sind a_r und a_l zwei (zunächst beliebige) komplexe Zahlen. Damit das Vektorpotential \mathbf{A}_I in der Isolatorphase die homogene Wellengleichung (6.28) mit der Lichtgeschwindigkeit \bar{c}_I erfüllt, muss für alle $k > 0$ die Dispersionsrelation $\omega = \bar{c}_I k$ gelten. In der metallischen Phase [mit den Materialparametern $(\epsilon_M, \mu_M, \sigma)$, der Ausbreitungsgeschwindigkeit $\bar{c}_M = (\epsilon_M \mu_M)^{-1/2}$ und der Dämpfungszeit $\tau = \epsilon_M / \sigma$] gilt die Diffusionsgleichung (6.29); dementsprechend hat das Vektorpotential die Form

$$\mathbf{A}_M = \hat{e}_2 \operatorname{Re} [\mathcal{A}_M(x_1, t)] \tag{6.31}$$

mit

$$\mathcal{A}_M(x_1, t) \equiv a_M e^{-\frac{x_1}{\delta} + i(\frac{x_1}{\delta} - \omega t)},$$

wobei im Allgemeinen wiederum $a_M \in \mathbb{C}$ gilt. Einsetzen der komplexen Lösung $\hat{\mathbf{e}}_2 \mathcal{A}_M(x_1, t)$ in (6.29) liefert

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_M \sigma}} = \frac{\sqrt{2\omega\tau}}{k_M}, \quad k_M \equiv \frac{\bar{c}_I}{\bar{c}_M} k \quad (6.32)$$

Die Eindringtiefe δ in der metallischen Phase wird als *Skintiefe* bezeichnet. Da in dieser Phase $\omega\tau \ll 1$ gilt, ist δ deutlich kleiner als die Wellenlänge des einfallenden Lichts. Das elektrische Feld folgt aus (6.30) und (6.31) als

$$\mathbf{E}_I = -\frac{\partial \mathbf{A}_I}{\partial t} = \hat{\mathbf{e}}_2 \operatorname{Re}[i\omega \mathcal{A}_I(x_1, t)] \quad , \quad \mathbf{E}_M = \hat{\mathbf{e}}_2 \operatorname{Re}[i\omega \mathcal{A}_M(x_1, t)],$$

und das Magnetfeld folgt aus:

$$\mathbf{B}_I = \nabla \times \mathbf{A}_I = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \frac{\partial \mathbf{A}_I}{\partial x_1} = \hat{\mathbf{e}}_3 \operatorname{Re} \left\{ ik \left[a_r e^{i(kx_1 - \omega t)} - a_l e^{-i(kx_1 + \omega t)} \right] \right\}$$

bzw.

$$\mathbf{B}_M = \nabla \times \mathbf{A}_M = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \frac{\partial \mathbf{A}_M}{\partial x_1} = \hat{\mathbf{e}}_3 \operatorname{Re} \left[\frac{i-1}{\delta} \mathcal{A}_M(x_1, t) \right].$$

In beiden Phasen stehen \mathbf{E}, \mathbf{B} und $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{e}}_1$ bzw. $\mathbf{k}_M = k_M\hat{\mathbf{e}}_1$ also senkrecht aufeinander. Da die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder auf eine dünne Grenzschicht beschränkt sind, gilt das Gleiche auch für die Stromdichte $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Stets gilt hierbei $\nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0$, so dass aufgrund der Kontinuitätsgleichung auch $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ gilt. Dies zeigt, dass die anfangs gemachte Annahme $\rho = 0$ konsistent ist: Falls die Ladungsdichte z. Z. $t = 0$ überall gleich Null ist, wird sie auch zu jeder späteren Zeit überall gleich Null sein.

Um die Koeffizienten (a_l, a_r, a_M) festzulegen, verwenden wir die Randbedingungen, die sofort aus den Maxwell-Gleichungen (6.21) folgen:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot (\mathbf{D}_I - \mathbf{D}_M) = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot (\varepsilon_I \mathbf{E}_I - \varepsilon_M \mathbf{E}_M) = \Sigma$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times (\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_M) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot (\mathbf{B}_I - \mathbf{B}_M) = 0$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times (\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_M) = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \left(\frac{1}{\mu_I} \mathbf{B}_I - \frac{1}{\mu_M} \mathbf{B}_M \right) = \mathbf{J},$$

wobei Σ und \mathbf{J} im Allgemeinen die Flächenladungsdichte an der Grenzfläche bzw. die Flächenstromdichte darstellen. In unserem Fall gilt $\Sigma = 0$ und $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, so dass die normalen Komponenten von \mathbf{D} und \mathbf{B} und die tangentialen Komponenten von \mathbf{E} und \mathbf{H} stetig sind. Die normalen Komponenten von $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ und \mathbf{B} sind in unserem Fall jedoch überall Null und daher automatisch stetig, so dass nur die zweite Bedingung (bezüglich der tangentialen Komponenten) nicht-triviale Information enthält. Die Forderung $\mathbf{E}_I(0, t) = \mathbf{E}_M(0, t)$ liefert:

$$a_r + a_l = a_M, \quad (6.33)$$

während aus der Bedingung $\frac{1}{\mu_I} \mathbf{B}_I(0, t) = \frac{1}{\mu_M} \mathbf{B}_M(0, t)$ folgt:

$$\frac{1}{\mu_I} ik(a_r - a_l) = \frac{1}{\mu_M} \frac{i-1}{\delta} a_M = \frac{1}{\mu_M} \frac{i-1}{\sqrt{2\omega\tau}} k_M a_M,$$

d. h.

$$a_r - a_l = \frac{\mu_I \bar{c}_I}{\mu_M \bar{c}_M} \frac{1+i}{\sqrt{2\omega\tau}} a_M = \sqrt{\frac{\varepsilon_M \mu_I}{\varepsilon_I \mu_M}} \frac{1+i}{\sqrt{2\omega\tau}} a_M. \quad (6.34)$$

Durch Kombination von (6.33) und (6.34) erhält man schließlich:

$$a_r = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_M \mu_I}{\varepsilon_I \mu_M}} \frac{1+i}{\sqrt{2\omega\tau}} \right) a_M, \quad a_l = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_M \mu_I}{\varepsilon_I \mu_M}} \frac{1+i}{\sqrt{2\omega\tau}} \right) a_M.$$

Der verbleibende Koeffizient a_M bestimmt die Amplitude der Gesamtwelle und ist natürlich beliebig.

Als Bemerkung sei noch hinzugefügt, dass die hier berechnete Eindringtiefe $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_M \sigma}}$ nicht speziell für die gewählte Anordnung, sondern allgemeingültig ist. Im Metall erfüllt $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ eine Diffusionsgleichung, und für die Diffusionsgleichung ist bekannt, dass sich Signale im Zeitintervall t über einen Abstand $\sqrt{2dDt}$ ausbreiten. Im Falle der auf die Grenzfläche einfallenden Strahlung ist die Raumdimension durch $d = 1$, die Diffusionskonstante durch $D = \bar{c}_M^2 \tau = \frac{1}{\varepsilon_M \mu_M} \frac{\varepsilon_M}{\sigma} = \frac{1}{\mu_M \sigma}$ und die charakteristische Diffusionszeit durch $t \simeq \frac{1}{\omega}$ gegeben. Für die Diffusionslänge, also für den typischen Abstand, über den sich das Signal ausbreitet, erhält man also $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_M \sigma}}$.

6.4.2 Der Skineneffekt im leitenden Draht

Wir diskutieren nun den *Skineneffekt*, d. h. die Verdrängung eines genügend hochfrequenten Stroms aus dem Inneren eines leitenden Drahts. Wir nehmen an, dass der leitende Draht (Leitfähigkeit σ) in \hat{e}_3 -Richtung verläuft und eingebettet ist in ein isolierendes Medium. Der leitende Draht habe den Radius R . Wegen der Zylindersymmetrie sind wir besonders an axialsymmetrischen

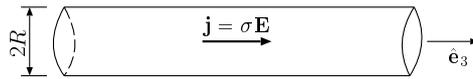


Abbildung 6.2: Skizze des metallischen Kabels, zur Illustration des Skineneffekts.

Lösungen interessiert, wobei der Strom

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

in \hat{e}_3 -Richtung zeigt und periodisch mit der Frequenz ω ist:

$$\mathbf{A}(\rho, t) = \hat{e}_3 \operatorname{Re} [\mathcal{A}(\rho) e^{-i\omega t}] \quad , \quad \rho \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

und somit auch:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, t) &= \hat{e}_3 \operatorname{Re} [\mathcal{E}(\rho) e^{-i\omega t}] \quad , \quad \mathcal{E}(\rho) i\omega \mathcal{A}(\rho) \\ \mathbf{j}(\rho, t) &= \hat{e}_3 \operatorname{Re} [j(\rho) e^{-i\omega t}] \quad , \quad j(\rho) = i\omega \sigma \mathcal{A}(\rho) . \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet ρ den Abstand zur Achse des leitenden Drahtes. Das Magnetfeld folgt schließlich als

$$\mathbf{B}(\rho, t) = (\nabla \times \mathbf{A})(\rho, t) = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \operatorname{Re} [\mathcal{B}(\rho)e^{-i\omega t}] \quad , \quad \mathcal{B}(\rho) = -\frac{d\mathcal{A}}{d\rho} .$$

Innerhalb des Drahts ($\rho < R$) erfüllt das Vektorpotential eine Diffusionsgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= e^{i\omega t} \left(\Delta - \frac{1}{\bar{c}_M^2 \tau} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{A}(\rho)e^{-i\omega t} = \left(\Delta + \frac{i\omega}{\bar{c}_M^2 \tau} \right) \mathcal{A}(\rho) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + i\omega \mu_M \sigma \right) \mathcal{A} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + k_M^2 \right) \mathcal{A} . \end{aligned} \quad (6.35)$$

Hierbei gilt

$$k_M = \frac{\sqrt{2i}}{\delta} = \frac{1+i}{\delta} ,$$

wobei $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_M \sigma}}$ die Skintiefe darstellt. Außerhalb des Drahts, also im isolierenden Medium ($\rho > R$), gilt eine Wellengleichung für \mathbf{A} :

$$0 = e^{i\omega t} \left(\Delta - \frac{1}{\bar{c}_I^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{A}(\rho)e^{-i\omega t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + k_I^2 \right) \mathcal{A} \quad (6.36)$$

mit

$$k_I \equiv \frac{\omega}{\bar{c}_I} .$$

Auf der Grenzfläche zwischen dem Isolator und dem Leiter sind schließlich (wegen $\Sigma = 0$ und $\mathbf{J} = \mathbf{0}$) noch die Randbedingungen

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho \cdot [\varepsilon_I \mathbf{E}(R+0^+, t) - \varepsilon_M \mathbf{E}(R-0^+, t)] = 0 \quad , \quad \hat{\mathbf{e}}_\rho \cdot [\mathbf{B}(R+0^+, t) - \mathbf{B}(R-0^+, t)] = 0$$

und

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\rho \times [\mathbf{E}(R+0^+, t) - \mathbf{E}(R-0^+, t)] &= \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{e}}_\rho \times \left[\frac{1}{\mu_I} \mathbf{B}(R+0^+, t) - \frac{1}{\mu_M} \mathbf{B}(R-0^+, t) \right] &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.37)$$

zu erfüllen. Die ersten zwei Bedingungen stellen wegen $\mathbf{E} \propto \hat{\mathbf{e}}_3$ und $\mathbf{B} \propto \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ keine Einschränkung dar, so dass es ausreicht, die beiden Randbedingungen (6.37) zu betrachten. Fordern wir noch, dass die Amplitude des Gesamtstroms durch den Draht durch $I_0 \in \mathbb{R}$ gegeben ist:

$$\mathbf{I}(t) = 2\pi \int_0^R d\rho \rho \mathbf{j}(\rho, t) = \hat{\mathbf{e}}_3 \operatorname{Re} [I_0 e^{-i\omega t}] = \hat{\mathbf{e}}_3 I_0 \cos(\omega t) \quad (6.38)$$

mit

$$I_0 \equiv 2\pi \int_0^R d\rho \rho j(\rho) ,$$

dann werden das Vektorpotential, die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} und die Stromdichte \mathbf{j} vollständig durch (6.35)-(6.38) festgelegt.

Die Gleichungen (6.35) und (6.36) sind Spezialfälle (zum Index $\nu = 0$) der Bessel'schen Differentialgleichung². Die Lösung, die regulär in $\rho = 0$ ist, lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho) &= aJ_0(k_M\rho) & (\rho < R) \\ &= b_1J_0(k_1\rho) + b_2Y_0(k_1\rho) & (\rho > R), \end{aligned} \quad (6.39)$$

wobei die Proportionalitätskonstanten a , b_1 und b_2 zunächst unbestimmt sind. Es sei daran erinnert, dass das asymptotische Verhalten von J_0 und Y_0 für kleine und große $|z|$ -Werte durch

$$J_0(z) \sim 1 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{64}z^4 \quad , \quad Y_0(z) \sim \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{1}{2}z\right) + \gamma \right] \quad (|z| \rightarrow 0)$$

bzw.

$$J_0(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{4}\pi\right) \quad , \quad Y_0(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (|z| \rightarrow \infty)$$

gegeben ist, wobei $|\arg(z)| < \pi$ gilt, falls die Variable z komplex ist. Die Konstante a in (6.39) wird durch (6.38) festgelegt:

$$\begin{aligned} I_0 &= 2\pi \int_0^R d\rho \rho j(\rho) = 2\pi i\omega\sigma a \int_0^R d\rho \rho J_0(k_M\rho) \\ &= \frac{2\pi i\omega\sigma a}{(k_M)^2} \int_0^{k_MR} dz z J_0(z) = \frac{2\pi i\omega\sigma a}{i\omega\sigma\mu_M} \int_0^{k_MR} dz \frac{d}{dz} [zJ_1(z)] \\ &= \frac{2\pi a}{\mu_M} k_MR J_1(k_MR), \end{aligned}$$

wobei $J'_0(z) = -J_1(z)$ in Kombination mit der Bessel'schen Differentialgleichung verwendet wurde:

$$0 = zJ''_0 + J'_0 + zJ_0 = -(zJ'_1 + J_1) + zJ_0 = -\frac{d}{dz}(zJ_1) + zJ_0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} J_1(z) &\sim \frac{1}{2}z \left(1 - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{192}z^4 + \dots \right) & (|z| \rightarrow 0) \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) & (|z| \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also innerhalb des Drahts:

$$\mathcal{A}(\rho) = \frac{\mu_M I_0}{2\pi} \frac{J_0(k_M\rho)}{k_MR J_1(k_MR)}.$$

²Die Bessel'sche Differentialgleichung lautet im Allgemeinen:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0$$

und hat die Bessel-Funktionen $J_\nu(z)$ und $Y_\nu(z)$ als zwei unabhängige Lösungen.

Für niedrige Frequenzen ($\delta \gg R$) kann man die Entwicklung der Bessel-Funktionen für kleine Argumente verwenden:

$$\mathcal{A}(\rho) \sim \frac{\mu_M I_0 \delta^2}{2\pi i R^2} \left[1 + \frac{i}{4\delta^2} (R^2 - 2\rho^2) + \frac{1}{8\delta^4} \left(R^2 \rho^2 - \frac{1}{2} \rho^4 - \frac{1}{3} R^4 \right) + \dots \right].$$

Mit Hilfe von $j(\rho) = i\omega\sigma\mathcal{A}(\rho)$ folgt nun

$$j(\rho) \sim \frac{I_0}{\pi R^2} \left[1 + \frac{i}{4\delta^2} (R^2 - 2\rho^2) + \frac{1}{8\delta^4} \left(R^2 \rho^2 - \frac{1}{2} \rho^4 - \frac{1}{3} R^4 \right) + \dots \right]$$

und daher

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\rho, t) \sim \frac{I_0}{\pi R^2} \hat{\mathbf{e}}_3 \left\{ \left[1 + \frac{1}{8\delta^4} \left(R^2 \rho^2 - \frac{1}{2} \rho^4 - \frac{1}{3} R^4 \right) + \dots \right] \cos(\omega t) \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{4\delta^2} (R^2 - 2\rho^2) + \dots \right] \sin(\omega t) \right\}. \end{aligned}$$

Für hohe Frequenzen ($\delta \ll R$) erhält man aus der Entwicklung der Bessel-Funktionen für große Argumente:

$$\mathcal{A}(\rho) \sim \frac{\mu_M I_0}{2\pi i k_M R} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i-1}{\delta}(R-\rho)} \sim \frac{\mu_M I_0}{2\pi i \sqrt{2i}} \frac{\delta}{\sqrt{R\rho}} e^{\frac{i-1}{\delta}(R-\rho)},$$

so dass

$$\begin{aligned} j(\rho) &= i\omega\sigma\mathcal{A}(\rho) \sim \frac{I_0}{\pi\delta^2\sqrt{2i}} \frac{\delta}{\sqrt{R\rho}} e^{\frac{i-1}{\delta}(R-\rho)} \\ &\sim \frac{I_0}{\pi\delta\sqrt{2R\rho}} e^{\frac{i-1}{\delta}(R-\rho) - \frac{1}{4}\pi i} \end{aligned}$$

gilt. Insgesamt folgt daher für hohe Frequenzen:

$$\mathbf{j}(\rho, t) \sim \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{I_0}{\pi\delta\sqrt{2R\rho}} e^{-\frac{R-\rho}{\delta}} \cos\left(\frac{R-\rho}{\delta} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right),$$

so dass der Strom auf eine dünne Grenzschicht $(R - \rho) = \mathcal{O}(\delta)$ beschränkt ist.

Schließlich bestimmen wir noch die Parameter $b_{1,2}$ in (6.39) mit Hilfe der Randbedingungen (6.37). Die erste der beiden Randbedingungen liefert $\mathcal{A}(R - 0^+) = \mathcal{A}(R + 0^+)$, d. h.:

$$b_1 J_0(k_I R) + b_2 Y_0(k_I R) = a J_0(k_M R).$$

Die zweite Randbedingung liefert $-\frac{1}{\mu_M} \frac{d\mathcal{A}}{d\rho}(R - 0^+) = -\frac{1}{\mu_I} \frac{d\mathcal{A}}{d\rho}(R + 0^+)$, d. h. (mit $Y'_0 = -Y_1$):

$$\frac{k_I}{\mu_I} [b_1 J_1(k_I R) + b_2 Y_1(k_I R)] = \frac{a k_M}{\mu_M} J_1(k_M R).$$

Zusammenfassend gilt also:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} J_0(k_I R) & Y_0(k_I R) \\ \frac{k_I}{\mu_I} J_1(k_I R) & \frac{k_I}{\mu_I} Y_1(k_I R) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_0(k_M R) \\ \frac{k_M}{\mu_M} J_1(k_M R) \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Hiermit sind das Vektorpotential, die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder und die Stromdichte im ganzen Raum bekannt.

Der Spezialfall eines sehr guten Metalls ($\sigma \rightarrow \infty$ und daher $\frac{\delta}{R} \downarrow 0$) ist besonders interessant: Bei festem I_0 findet man aufgrund von (6.40):

$$a \begin{pmatrix} J_0(k_M R) \\ \frac{k_M}{\mu_M} J_1(k_M R) \end{pmatrix} \sim \frac{I_0}{2\pi R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{\delta}{R} \downarrow 0 \right)$$

und daher für $\rho > R$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho) &= b_1 J_0(k_1 \rho) + b_2 Y_0(k_1 \rho) \\ &\sim \frac{\mu_1 I_0}{2\pi k_1 R} \frac{J_0(k_1 R) Y_0(k_1 \rho) - Y_0(k_1 R) J_0(k_1 \rho)}{J_0(k_1 R) Y_1(k_1 R) - Y_0(k_1 R) J_1(k_1 R)} \quad \left(\frac{\delta}{R} \downarrow 0 \right). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist deshalb so interessant, weil es zeigt, dass die Felder außerhalb des Drahts in diesem Limes *endlich* sind. Es gilt $\mathcal{E}(\rho) = i\omega \mathcal{A}(\rho)$ und

$$\mathcal{B}(\rho) = -\frac{d\mathcal{A}}{d\rho}(\rho) \sim \frac{\mu_1 I_0}{2\pi R} \frac{J_0(k_1 R) Y_1(k_1 \rho) - Y_0(k_1 R) J_1(k_1 \rho)}{J_0(k_1 R) Y_1(k_1 R) - Y_0(k_1 R) J_1(k_1 R)} \quad \left(\frac{\delta}{R} \downarrow 0 \right),$$

so dass die tangentielle Komponente des elektrischen Felds an der Grenzfläche Null ist, $\mathbf{E}(R+0^+, t) = \mathbf{0}$, und die tangentielle Komponente des \mathbf{H} -Felds an der Grenzfläche einen Sprung macht, $\mathbf{H}(R+0^+, t) = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{I_0}{2\pi R} \cos(\omega t)$. Aufgrund des Stokes'schen Satzes, angewandt auf die Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \hat{\mathbf{e}}_3 \operatorname{Re} \left[(1 - i\omega\tau) j(\rho) e^{-i\omega t} \right] \sim \mathbf{j} \quad \left(\frac{\delta}{R} \downarrow 0 \right),$$

muss im Limes sehr guter Leitfähigkeit natürlich auch $\oint d\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = I(t)$ gelten, falls der Integrationsweg einmal um den Draht herumführt. Es ist bemerkenswert, dass die Felder und der Strom *innerhalb* des Drahts im Limes $\frac{\delta}{R} \downarrow 0$ alle Null sind und dass die Felder *außerhalb* des Drahts von einer reinen Oberflächenstromdichte hervorgerufen werden. In diesem Limes gilt also (für die hier verwendete Geometrie) $\Sigma = 0$ aber $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$. Allgemeiner kann im Limes $\sigma \rightarrow \infty$ auch $\Sigma \neq 0$ sein, wie wir im Folgenden sehen werden.

6.5 Hohlraumresonatoren und Wellenleiter

In diesem Abschnitt betrachten wir Schwingungen des elektromagnetischen Feldes in einem isolierenden Medium im Raumbereich $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, das in eine perfekt leitende Matrix eingebettet ist ($\sigma \rightarrow \infty$). Wir können o.B.d.A. annehmen, dass der isolierende Hohlraum einfach zusammenhängend ist. Im Sinne einer Fourier-Analyse der Felder genügt es außerdem, harmonische Lösungen mit der Frequenz ω zu untersuchen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left[\mathcal{E}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right], \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left[\mathcal{B}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right].$$

Aus Abschnitt [6.4] wissen wir bereits, dass die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder und die Stromdichte \mathbf{j} im Inneren eines perfekten Leiters Null sind und dass elektromagnetische Wellen im isolierenden Medium eine Oberflächenstromdichte \mathbf{J} und eventuell auch eine Oberflächenladungsdichte Σ an der Grenzfläche zwischen dem Dielektrikum und dem Metall hervorrufen können. Hierbei sind (Σ, \mathbf{J}) vollständig durch die Felder im Isolator bestimmt.

Da im isolierenden Bereich \mathcal{D} keine Ladungen vorliegen, erfüllt das elektromagnetische Feld dort die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

und somit auch: $\nabla \times \mathcal{E} = i\omega \mathcal{B}$ und $\nabla \cdot \mathcal{E} = 0$. Wir können daher im Isolator nach wie vor ein komplexes Vektorpotential $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{E}(\mathbf{x})/i\omega$ definieren. Das reelle Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \equiv \text{Re} \left[\mathcal{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right]$$

ist dann gemäß

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \text{Re} \left[i\omega \mathcal{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A} = \text{Re} \left[(\nabla \times \mathcal{A})(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right]$$

mit den Feldern verknüpft und erfüllt für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ die Coulomb-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{Re} \left[(\nabla \cdot \mathcal{A}) e^{-i\omega t} \right] = \text{Re} \left[\frac{1}{i\omega \varepsilon} (\nabla \cdot \mathcal{E}) e^{-i\omega t} \right] = 0 .$$

Innerhalb des Hohlraums erfüllt \mathbf{A} eine Wellengleichung mit der Ausbreitungs-

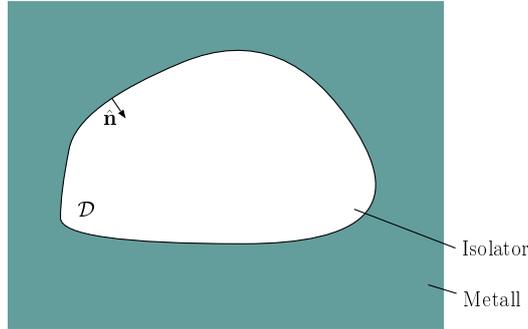


Abbildung 6.3: Skizze des im Leiter eingebetteten Isolators (Hohlraum).

geschwindigkeit $\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$:

$$\left(\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} \in \mathcal{D}) ,$$

und somit erfüllt das komplexe Vektorpotential $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ eine Helmholtz-Gleichung mit $\lambda = k^2 \equiv \frac{\omega^2}{\bar{c}^2}$:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{\bar{c}^2} \right) \mathcal{A} = (\Delta + k^2) \mathcal{A} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} \in \mathcal{D}) . \quad (6.41)$$

Nehmen wir an, der Normalvektor auf dem Rand $\partial\mathcal{D}$ des Hohlraums, der von der metallischen in die isolierende Phase zeigt, sei für alle $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}$ durch $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$

gegeben. Die Randbedingungen $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ und $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0$ (für $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}$) implizieren die einzelne Randbedingung

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathcal{A} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}) \quad (6.42)$$

für das Vektorpotential. Außerdem folgt mit Hilfe des Gauß'schen und des Stokes'schen Satzes aus den beiden Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ und $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, dass auf dem Rand des Resonators die Bedingungen $\Sigma = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}$ und $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$ bzw.

$$\begin{aligned} \Sigma &= \varepsilon \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon \operatorname{Re} [i\omega(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathcal{A})e^{-i\omega t}] \\ \mathbf{J} &= \frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} [\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathcal{A})e^{-i\omega t}] \end{aligned} \quad (6.43)$$

zu erfüllen sind. Die Randbedingungen (6.43) haben jedoch einen völlig anderen Charakter als (6.42): Sie stellen keine Einschränkung der möglichen Lösungen dar, sondern besagen lediglich, dass die Lösung des Randwertproblems (6.41)-(6.42) mit einer Oberflächenladungsdichte Σ und einer Oberflächenstromdichte \mathbf{J} einhergeht. Die Dichten (Σ, \mathbf{J}) treten also lediglich als Nebenprodukte auf. Diese Dichten sind natürlich nicht unabhängig, sondern erfüllen eine Kontinuitätsgleichung der Form

$$0 = \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \Sigma}{\partial t} - [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla)] \cdot \mathbf{J} \quad (\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}), \quad (6.44)$$

wobei $\nabla_{\mathbf{t}} \equiv \nabla - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)$ die tangentielle Ableitung darstellt. Es ist übrigens zu beachten, dass die durch die Gleichungen (6.41)-(6.43) definierten Wellen *dissipationslos* sind. In realen Systemen (mit endlicher Leitfähigkeit außerhalb des Dielektrikums) würden sicherlich Energieverluste auftreten, die zu einer Dämpfung der im Folgenden zu bestimmenden Eigenschwingungen führen. In der Realität müßte man also ständig Energie in das System hineinpumpen, um die Schwingungen aufrechtzuerhalten.

6.5.1 Beispiel: Quaderförmiger Hohlraum

Als einfaches Beispiel eines Hohlraumresonators betrachten wir ein quaderförmiges Dielektrikum, $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \mid 0 < x_i < L_i\}$, eingebettet in eine metallische Matrix. Durch Variablentrennung erhält man sofort die folgende Lösung des Randwertproblems (6.41)-(6.42):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= a_1 \cos(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) \\ \mathcal{A}_2 &= a_2 \sin(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) \\ \mathcal{A}_3 &= a_3 \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \cos(k_3 x_3), \end{aligned}$$

wobei die Komponenten des Wellenvektors $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ durch

$$k_i = \frac{n_i \pi}{L_i} \quad (n_i \in \mathbb{N})$$

gegeben sind. Hierbei darf höchstens eine der Zahlen n_i gleich Null sein, damit die Lösung nicht-trivial ist. Außerdem sind nur zwei der drei Zahlen a_i unabhängig, denn aufgrund der Coulomb-Eichung gilt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$. Das elektrische Feld im Resonator folgt aus $\mathbf{E} = \operatorname{Re}[i\omega \mathcal{A} e^{-i\omega t}]$, das Magnetfeld ist durch

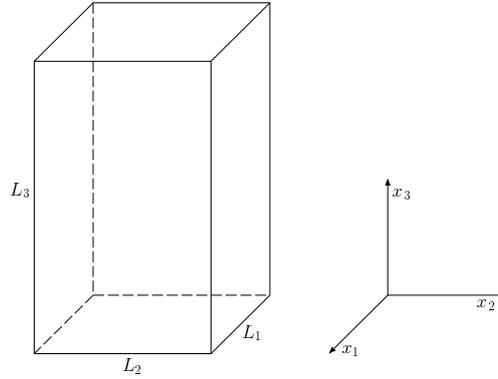


Abbildung 6.4: Skizze des quaderförmigen isolierenden Hohlraums \mathcal{D}

$\mathbf{B} = \text{Re}[(\nabla \times \mathcal{A})e^{-i\omega t}]$ mit

$$\nabla \times \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sin(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \cos(k_3 x_3) (k_2 a_3 - k_3 a_2) \\ \cos(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \cos(k_3 x_3) (k_3 a_1 - k_1 a_3) \\ \cos(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) (k_1 a_2 - k_2 a_1) \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Dichten (Σ, \mathbf{J}) sind z. B. auf der Grenzfläche $x_1 = 0$ durch

$$\Sigma(t) = \omega \varepsilon \sin(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) \text{Re} [i a_1 e^{-i\omega t}]$$

bzw.

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) \text{Re} [(k_1 a_2 - k_2 a_1) e^{-i\omega t}] \\ \sin(k_2 x_2) \cos(k_3 x_3) \text{Re} [(k_3 a_1 - k_1 a_3) e^{-i\omega t}] \end{pmatrix}$$

gegeben. Man überprüft leicht, dass diese Dichten die Kontinuitätsgleichung (6.44) erfüllen.

Betrachten wir den Quader nun als einen in $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Richtung ausgerichteten Zylinder mit rechteckigem Querschnitt. Bei einer solchen zylindrischen Geometrie ist es Tradition, die zwei unabhängigen Lösungen so zu wählen, dass bei der einen die E_3 - und bei der anderen die B_3 -Komponente Null ist. Man spricht von transversal-elektrischen (TE) bzw. transversal-magnetischen (TM) Moden. Die TE-Welle wird durch die zwei Bedingungen $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$ und $a_3 = 0$ (also durch $a_2 = -\frac{k_1}{k_2} a_1$) charakterisiert:

$$\mathbf{A}^{\text{TE}} = \begin{pmatrix} \cos(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) \\ -\frac{k_1}{k_2} \sin(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) \\ 0 \end{pmatrix} \text{Re} [a_1 e^{-i\omega t}] ,$$

während die TM-Welle durch $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$ und $k_1 a_2 - k_2 a_1 = 0$ (also durch $a_2 = \frac{k_2}{k_1} a_1$ und $a_3 = -\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_3} a_1$) definiert ist:

$$\mathbf{A}^{\text{TM}} = \begin{pmatrix} \cos(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) \\ \frac{k_2}{k_1} \sin(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) \\ -\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_3} \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \cos(k_3 x_3) \end{pmatrix} \text{Re} [a_1 e^{-i\omega t}] .$$

Man erhält Ausdrücke mit größerer Symmetrie, indem man für die TE-Welle $a_1 \rightarrow k_2 \bar{a}_1$ und für die TM-Welle $a_1 \rightarrow k_1 k_3 \bar{a}_1$ ersetzt. Diese Ausdrücke zeigen außerdem, dass niederfrequente TE-Moden mit $(n_1, n_2) = (1, 0)$ und $(n_1, n_2) = (0, 1)$, aber keine TM-Moden mit solchen Wellenzahlen existieren.

6.5.2 Zylindergeometrien

Betrachten wir nun Zylindergeometrien mit beliebigem Querschnitt. Für einen Zylinder in $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Richtung mit $0 < x_3 < L_3$ und $\mathbf{x}_\perp \equiv (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_\perp$ kann das Vektorpotential in der Form

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{x}_\perp) \sin(k_3 x_3) \\ a_2(\mathbf{x}_\perp) \sin(k_3 x_3) \\ a_3(\mathbf{x}_\perp) \cos(k_3 x_3) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Die TE-Welle wird durch die Gleichungen

$$(\Delta_2 + \kappa^2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \mathcal{D}_\perp)$$

mit

$$\kappa^2 = k^2 - k_3^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_3^2$$

und durch die Randbedingung $\hat{\mathbf{n}} \times \mathcal{A} = \mathbf{0}$, d. h.

$$a_3 = 0 \quad \text{und} \quad n_2 a_1 - n_1 a_2 = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \partial \mathcal{D}_\perp)$$

definiert. Offensichtlich ist nur eine der beiden Komponenten a_1 und a_2 unabhängig. Da $\mathbf{a}(\mathbf{x}_\perp)$ divergenzfrei ist und $a_3 = 0$ gilt, kann man \mathbf{a} auch als Rotation eines Vektorfeldes $(0, 0, \psi(\mathbf{x}_\perp))$ schreiben:³

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \psi / \partial x_2 \\ -\partial \psi / \partial x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Feld $\psi(\mathbf{x}_\perp)$ ist die Lösung des Randwertproblems

$$(\Delta_2 + \kappa^2)\psi = \lambda \quad (\mathbf{x}_\perp \in \mathcal{D}_\perp)$$

mit

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \cdot \nabla_2 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \partial \mathcal{D}_\perp),$$

wobei λ eine beliebige reelle Konstante darstellt. Da man diese Gleichungen auch als $(\Delta_2 + \kappa^2)\tilde{\psi} = 0$ und $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} = 0$ mit $\tilde{\psi} \equiv \left(\psi - \frac{\lambda}{\kappa^2}\right)$ schreiben kann und sowieso

³Beweis: Der allgemeine Ansatz $\mathbf{a}(\mathbf{x}_\perp) = \nabla \times \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_\perp)$ mit $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi)$ würde $a_3 = \partial_1 \psi_2 - \partial_2 \psi_1 = 0$ implizieren, so dass das Differential $d\psi_0 \equiv \psi_1 dx_1 + \psi_2 dx_2$ exakt ist und $\psi_1 = \partial_1 \psi_0$ sowie $\psi_2 = \partial_2 \psi_0$ gilt. Es folgt also $\boldsymbol{\psi} = \nabla \psi_0 + \psi \hat{\mathbf{e}}_3$ und somit $\mathbf{a} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla \times (\psi \hat{\mathbf{e}}_3)$. Man kann also o. B. d. A. $\mathbf{a} = \nabla \times (\psi \hat{\mathbf{e}}_3)$ annehmen.

nur die Ableitungen von ψ physikalische Relevanz haben, kann man o.B.d.A. $\lambda = 0$ wählen:

$$(\Delta_2 + \kappa^2)\psi = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \mathcal{D}_\perp) \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \partial\mathcal{D}_\perp) .$$

Im Falle der TE-Welle ist also ein *Neumann-Problem* für die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung zu lösen.

Die TM-Welle erfüllt für $\mathbf{x}_\perp \in \mathcal{D}_\perp$ die Gleichungen

$$(\Delta_2 + \kappa^2)\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad , \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = 0$$

und

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} - k_3 a_3 = 0$$

und für $\mathbf{x}_\perp \in \partial\mathcal{D}_\perp$ die Randbedingung $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, d. h. wiederum

$$a_3 = 0 \quad \text{und} \quad n_2 a_1 - n_1 a_2 = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \partial\mathcal{D}_\perp) .$$

Aus der Gleichung $\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = 0$ folgt, dass das Differential $d\psi = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$ exakt ist, so dass der Vektor $\mathbf{a}(\mathbf{x}_\perp)$ aus einer einzelnen Funktion ψ herleitbar ist:

$$a_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \quad , \quad a_2 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \quad , \quad k_3 a_3 = \Delta_2 \psi \quad (\mathbf{x}_\perp \in \mathcal{D}_\perp) .$$

Hierbei erfüllt ψ für irgendeine Konstante $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$(\Delta_2 + \kappa^2)\psi = \lambda_1 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \mathcal{D}_\perp) \tag{6.45}$$

und die Randbedingungen

$$\Delta_2 \psi = 0 \quad , \quad \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix} \cdot \nabla_2 \psi = \nabla_{2t} \psi = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \mathcal{D}_\perp) .$$

Die zweite Randbedingung, $\nabla_{2t} \psi = 0$, besagt, dass die Ableitung von ψ entlang der Kurve $\partial\mathcal{D}_\perp$ Null ist, so dass für irgendeine Konstante $\lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\psi = \lambda_2 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \partial\mathcal{D}_\perp)$$

gilt. In Kombination mit der Randbedingung $\Delta_2 \psi = 0$ und mit (6.45) ergibt diese Gleichung die Relation

$$\lambda_1 = \Delta_2 \psi + \kappa^2 \psi = \kappa^2 \lambda_2 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \partial\mathcal{D}_\perp)$$

zwischen λ_1 und λ_2 . Es folgt mit $\tilde{\psi} \equiv \psi - \lambda_2$:

$$(\Delta_2 + \kappa^2)\tilde{\psi} = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \mathcal{D}_\perp) \quad , \quad \tilde{\psi} = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \partial\mathcal{D}_\perp) .$$

Da wiederum nur die Ableitungen von ψ physikalische Relevanz haben, kann man o.B.d.A. $\lambda_2 = 0$ wählen, so dass auch

$$(\Delta_2 + \kappa^2)\psi = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \mathcal{D}_\perp) \quad , \quad \psi = 0 \quad (\mathbf{x}_\perp \in \partial\mathcal{D}_\perp)$$

gilt. Im Falle der TM-Welle ist also ein *Dirichlet-Problem* für die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung zu lösen.

Wellenleiter

Falls das zylinderförmige Dielektrikum, das in die metallische Matrix eingebettet ist, in \hat{e}_3 -Richtung unendlich ausgedehnt ist, spricht man von einem *Wellenleiter*. Mögliche Lösungen haben die Struktur

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{a}(\mathbf{x}_\perp) e^{i(k_3 x_3 - \omega t)} \right],$$

wobei $\mathbf{a}(\mathbf{x}_\perp)$ die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung $(\Delta_2 + \kappa^2)\mathbf{a} = \mathbf{0}$ erfüllt und $\omega = \bar{c} \sqrt{\kappa^2 + k_3^2}$ gilt. Bemerkenswert an diesen Lösungen ist der drastische Unterschied zwischen der Phasen- und der Gruppengeschwindigkeit. Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist

$$\frac{\omega}{k_3} = \bar{c} \frac{\sqrt{\kappa^2 + k_3^2}}{k_3} > \bar{c},$$

und die Gruppengeschwindigkeit folgt als

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_3} = \bar{c} \frac{k_3}{\sqrt{\kappa^2 + k_3^2}} < \bar{c},$$

so dass der geometrische Mittelwert der beiden Geschwindigkeiten genau gleich

$$\left(\frac{\omega}{k_3} \frac{\partial \omega}{\partial k_3} \right)^{1/2} = \left(\frac{\partial \omega^2}{\partial k_3^2} \right)^{1/2} = \bar{c}$$

ist. Für den physikalischen Transport von „Information“ (z. B. von Energie in Wellenpaketen) ist die Gruppengeschwindigkeit relevant, so dass Überlichtgeschwindigkeiten von physikalischen Größen in Wellenleitern nicht auftreten.

Kapitel 7

Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen

In diesem Kapitel untersuchen wir das elektromagnetische Feld bewegter geladener Elementarteilchen, wobei die Elementarteilchen - wie üblich in der „klassischen“ Feldtheorie - als klassisch und punktförmig beschrieben werden. Ausgangspunkt unserer Untersuchungen sind die Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\square A^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu \quad , \quad A^\mu(\mathbf{x}, t_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial A^\mu}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0) = 0 \quad ,$$

wobei also lediglich die durch die anwesenden Ladungen und Ströme erzeugten Felder, jedoch keine Feldbeiträge aus anderen Quellen berücksichtigt werden. Falls die Zeit, in der die Elementarteilchen beobachtet werden, genügend lang ist und „Einschaltvorgänge“ vernachlässigt werden können, kann man $t_0 = -\infty$ setzen. Das retardierte 4-Potential ist dementsprechend [s. Gleichung (6.12)] durch

$$\begin{aligned} A^\mu(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \int d\xi \frac{j^\mu(\xi, t - \frac{|\xi - \mathbf{x}|}{c})}{|\xi - \mathbf{x}|} H\left(t - t_0 - \frac{|\xi - \mathbf{x}|}{c}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \int d\xi \frac{j^\mu(\xi, t - \frac{|\xi - \mathbf{x}|}{c})}{|\xi - \mathbf{x}|} \end{aligned} \quad (7.1)$$

gegeben.

7.1 Das Feld bewegter Punktladungen

Wir berechnen zuerst das 4-Potential eines bewegten Elementarteilchens der Ladung q , das zur Zeit t die Koordinaten $\mathbf{x}_q(t)$ hat; aus dem 4-Potential können dann die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder bestimmt werden. Wir schreiben (7.1) zuerst in der Form

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \int dt' \int d\xi \frac{j^\mu(\xi, t')}{|\mathbf{x} - \xi|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \xi|}{c}\right) . \quad (7.2)$$

Die Ladungs- und Stromdichten der Punktladung sind mit der Definition $\mathbf{u}(t') \equiv \frac{d\mathbf{x}_q}{dt}(t')$ durch

$$\rho(\boldsymbol{\xi}, t') = q \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_q(t')) \quad , \quad \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}, t') = q\mathbf{u}(t') \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_q(t'))$$

oder in 4-Notation durch

$$j^\mu = \frac{qc}{\gamma_u} u^\mu \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_q(t')) \quad , \quad u^\mu = \gamma_u(1, \boldsymbol{\beta}) \quad (7.3)$$

gegeben. Einsetzen von (7.3) in (7.2) liefert:

$$A^\mu = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{u^\mu(t')}{\gamma_u |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')|}{c}\right) .$$

Aus diesem Ausdruck geht wiederum klar hervor, dass das am Ort \mathbf{x} zur Zeit t empfangene Signal zur retardierten Zeit $\tau(\mathbf{x}, t)$ mit

$$\tau + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(\tau)|}{c} \equiv t \quad (7.4)$$

vom Ort $\mathbf{x}_q(\tau)$ ausgesandt wurde.¹ Führen wir noch den Relativvektor

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(\tau) \quad , \quad R(\mathbf{x}, \tau) \equiv |\mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau)|$$

ein, dann kann man (7.4) auch in der Form

$$F_{\mathbf{x},t}(\tau) \equiv \tau + \frac{R(\mathbf{x}, \tau)}{c} - t = 0 \quad (7.5)$$

schreiben. Da das Elementarteilchen keine Überlichtgeschwindigkeit haben kann ($\beta(\tau) < 1$), ist physikalisch klar, dass Gleichung (7.5) eine eindeutige Lösung $\tau(\mathbf{x}, t)$ hat. Es folgt:

$$\delta\left(t' - t + \frac{R(\mathbf{x}, t')}{c}\right) = \delta(F_{\mathbf{x},t}(t')) = \frac{1}{\left|\frac{dF_{\mathbf{x},t}}{d\tau}(\tau)\right|} \delta(t' - \tau) .$$

Hierbei gilt:

$$\frac{dF_{\mathbf{x},t}}{d\tau}(\tau) = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \tau}(\mathbf{x}, \tau)$$

wobei $\frac{\partial R}{\partial \tau}$ aus der Identität $R^2 = \mathbf{R}^2$ bestimmt werden kann:

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{1}{2R} \frac{\partial (R^2)}{\partial \tau} = \frac{1}{2R} \frac{\partial (\mathbf{R}^2)}{\partial \tau} = \frac{\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau}}{R} = \hat{\mathbf{R}} \cdot (-\mathbf{u}) = -\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u} .$$

Insgesamt gilt also

$$\delta\left(t' - t + \frac{R(\mathbf{x}, t')}{c}\right) = \frac{\delta(t' - \tau)}{1 - \beta(\tau) \cdot \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \tau)}$$

¹In diesem Kapitel bezeichnet τ generell die retardierte Zeit, *nicht* die Eigenzeit.

und daher

$$\begin{aligned} A^\mu(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{u^\mu(t')}{\gamma_u(t')R(\mathbf{x}, t')} \frac{\delta(t' - \tau)}{1 - \boldsymbol{\beta}(\tau) \cdot \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \tau)} \\ &= \frac{qu^\mu(\tau)}{4\pi\epsilon_0\gamma_u(\tau)} \frac{1}{R(\mathbf{x}, \tau) - \boldsymbol{\beta}(\tau) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau)} = \frac{qu^\mu(\tau)}{4\pi\epsilon_0 R_\nu u^\nu}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

wobei R^ν den 4-Vektor $(R, \mathbf{R}) = (c(t - \tau), \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(\tau))$ darstellt. Das rechte Glied von (7.6) ist manifest kovariant. Das 4-Potential kann auch explizit als

$$\Phi(\mathbf{R}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (7.7)$$

geschrieben werden. Die Potentiale Φ und \mathbf{A} in (7.7) werden als *Liénard-Wiechert-Potentiale* bezeichnet.

Insbesondere im Hinblick auf konkrete Anwendungen ist es sehr wichtig, zu verstehen, dass die *retardierten* Potentiale Φ und \mathbf{A} Funktionen der Variablen $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau)$ und $\boldsymbol{\beta}(\tau)$ sind. Sie sind somit unmittelbar von der *retardierten* Zeit $\tau(\mathbf{x}, t)$ und nur implizit (mittels τ) von der Zeitvariablen t abhängig. Diese implizite Abhängigkeit der Potentiale von \mathbf{x} und t wird z. B. bei der Bestimmung der \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder relevant,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla_{\mathbf{x}}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{A},$$

und macht die konkreten Berechnungen einigermaßen langwierig. Die Details der Berechnung der \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder findet man in Appendix A; hier präsentieren wir nur das Ergebnis:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{R}{c} \hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^3}, \quad c\mathbf{B} = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}, \quad (7.8)$$

wobei $\dot{\boldsymbol{\beta}}(\tau) \equiv \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}(\tau)$ definiert wurde. Es gibt also zwei Beiträge zum \mathbf{E} -Feld (und somit auch zum \mathbf{B} -Feld), einen Beitrag, der unabhängig von $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ ist, für große Abstände wie R^{-2} abfällt und als *statischer Term* bekannt ist und einen Beitrag linear in der Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, der viel langsamer (nämlich wie R^{-1}) abfällt für große Abstände und als *Strahlungsterm* bezeichnet wird.

Als erstes, einfaches Beispiel betrachten wir die Felder eines sich gleichförmig und geradlinig bewegendes Teilchens ($\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$), die gemäß (7.8) in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})}{4\pi\epsilon_0 R^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^3} = \frac{q(1 - \beta^2)(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})}{4\pi\epsilon_0 (R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E} = \frac{q(1 - \beta^2)\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 c (R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \end{aligned}$$

darstellbar sind. O.B.d.A. können wir den Ursprung des Koordinatensystems so wählen, dass das Teilchen sich zur Zeit t in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ befindet; außerdem können wir die $\hat{\mathbf{e}}_1$ -Achse in der Geschwindigkeitsrichtung wählen. Die Bahn des Teilchens ist folglich durch $\mathbf{x}_q(t') = \beta c(t' - t)\hat{\mathbf{e}}_1$ gegeben. Wir versuchen nun, die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder, die von einem Beobachter, der sich zur Zeit t am Ort \mathbf{x} befindet, gemessen werden, explizit als Funktionen von \mathbf{x} und t darzustellen. Da die

Messprozedur translationsinvariant in der Zeitrichtung ist, erwartet man, dass die so gemessenen Felder nur vom Ort abhängen: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x})$. Außerdem ist natürlich klar, dass die zur Zeit t am Ort \mathbf{x} empfangenen Signale zur retardierten Zeit τ am Ort $\mathbf{x}_q(\tau) = -\beta c(t - \tau)\hat{\mathbf{e}}_1 = -\beta R\hat{\mathbf{e}}_1 = -R\boldsymbol{\beta}$ ausgesandt wurden.

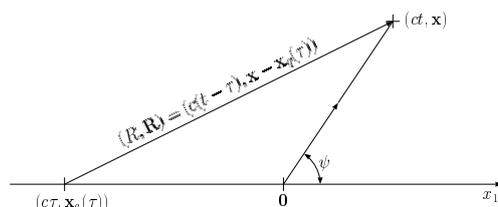


Abbildung 7.1: Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen bei geradlinig-gleichförmiger Bewegung

Betrachten wir zuerst den Ausdruck für das elektrische Feld. Wegen $\mathbf{R} = R\boldsymbol{\beta} + \mathbf{x}$ gilt im Zähler einfach $\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta} = \mathbf{x}$. Außerdem kann man den Faktor $R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}$ im Nenner mit Hilfe von

$$\begin{aligned} (R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2 &= R^2 - 2R\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2 \\ &= (R\boldsymbol{\beta} + \mathbf{x})^2 - 2R\boldsymbol{\beta} \cdot (R\boldsymbol{\beta} + \mathbf{x}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2 \\ &= x^2 - [R^2\beta^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2] = x^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R})^2 \\ &= x^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{x})^2 = x^2[1 - \beta^2 \sin^2(\psi)] \end{aligned}$$

umschreiben. Insgesamt erhält man also das (tatsächlich zeitunabhängige) Ergebnis

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q(1 - \beta^2)\mathbf{x}}{4\pi\epsilon_0 x^3 [1 - \beta^2 \sin^2(\psi)]^{3/2}}.$$

Wegen $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{x}$ folgt außerdem:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{q(1 - \beta^2)\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{x}}{4\pi\epsilon_0 c x^3 [1 - \beta^2 \sin^2(\psi)]^{3/2}}.$$

Im nicht-relativistischen Limes ($\beta \ll 1$) erhält man die Gesetze von Coulomb bzw. Biot-Savart für eine sich zur Zeit t im Ursprung befindende Punktladung der Größe q .

7.2 Geradlinige und kreisförmige Bewegung

Wir betrachten nun die *beschleunigte* Bewegung eines geladenen Teilchens, deren Strahlung an einem weit entfernten Ort ($R|\dot{\boldsymbol{\beta}}|/c \gg 1$) beobachtet wird. Aufgrund von (7.8) wissen wir, dass in diesem Fall nur der Strahlungsterm wesentlich zum elektrischen Feld und zum Magnetfeld beiträgt:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^3}, \quad c\mathbf{B} = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E},$$

wobei $\dot{\boldsymbol{\beta}}(\tau) = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}(\tau)$ wiederum die retardierte Beschleunigung der Ladung darstellt. Mit Hilfe von $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - \mathbf{a}^2\mathbf{b}$ folgt:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}) = -\varepsilon_0 c [(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{R}})\mathbf{E} - \mathbf{E}^2 \hat{\mathbf{R}}] = \varepsilon_0 c \mathbf{E}^2 \hat{\mathbf{R}},$$

d. h. dass die vom Teilchen ausgestrahlten elektromagnetischen Wellen in *radialer* Richtung ausgesandt werden. Die Amplitude der Energiestromdichte in radialer Richtung ist daher durch

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \varepsilon_0 c \mathbf{E}^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c R^2} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^6}$$

gegeben. Hierbei wird die Energiestromdichte mit Hilfe der im Inertialsystem des Beobachters definierten Zeit (also t) gemessen. Häufig ist man eher an der in *retardierter* Zeit gemessenen Energiestromdichte $(\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \frac{dt}{d\tau} = (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}})(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})$ interessiert. Der in retardierter Zeit gemessene Energiestrom pro Raumwinkel ist dann durch

$$\frac{dW}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}})(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}) = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^5} \quad (7.9)$$

gegeben. Im nicht-relativistischen Limes reduziert sich dieses Ergebnis auf

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 |\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} = \frac{q^2 |\hat{\mathbf{R}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} = \frac{q^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \sin^2(\psi)}{16\pi^2 \varepsilon_0 c},$$

wobei ψ den Winkel zwischen $\hat{\mathbf{R}}$ und $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ bezeichnet. Eine Integration über den gesamten Raumwinkel:

$$\int d\Omega \sin^2(\psi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\psi \sin^3(\psi) = 2\pi \int_{-1}^1 dx (1 - x^2) = \frac{8\pi}{3}$$

liefert für die Gesamtleistung:

$$W = \int d\Omega \frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{6\pi \varepsilon_0 c}. \quad (7.10)$$

Das Ergebnis (7.10) wird als die Larmor-Formel für die von beschleunigten Ladungen ausgestrahlte Leistung bezeichnet. Im Folgenden werden wir, ausgehend von Gleichung (7.9), für zwei wichtige Spezialfälle relativistische Verallgemeinerungen der Larmor-Formel herleiten.

Als erstes Beispiel betrachten wir die geradlinige, beschleunigte Bewegung eines geladenen Teilchens ($\dot{\boldsymbol{\beta}} \parallel \boldsymbol{\beta}$), wobei die Beschleunigung betragsmäßig keineswegs konstant sein muß.² In diesem Fall vereinfacht Gleichung (7.9) sich zu

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^5} = \frac{q^2 |\hat{\mathbf{R}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^5} \\ &= \frac{q^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{\sin^2(\psi)}{[1 - \beta \cos(\psi)]^5}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

²Falls $\boldsymbol{\beta}$ und $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ entgegengesetzt gerichtet sind ($\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} < 0$) und $|\boldsymbol{\beta}| \simeq 1$ gilt, wird diese Strahlung als *Bremsstrahlung* bezeichnet.

wobei ψ wiederum den Winkel zwischen $\hat{\mathbf{R}}$ und $\boldsymbol{\beta}$ bzw. $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ bezeichnet. Man zeigt leicht, dass die Strahlungsintensität maximal ist für $\psi = \psi_{\max}$, wobei der Winkel ψ_{\max} durch

$$\cos(\psi_{\max}) = \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta} \quad (7.12)$$

gegeben ist. Die Gesamtleistung folgt aus (7.11) durch Integration über den gesamten Raumwinkel:

$$W = \frac{q^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \int d\Omega \frac{\sin^2(\psi)}{[1 - \beta \cos(\psi)]^5} = \frac{q^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \gamma^6}{6\pi \varepsilon_0 c}. \quad (7.13)$$

Im nicht-relativistischen Limes erhält man wiederum die Larmor-Formel (7.10).

Wir betrachten nun den ultrarelativistischen Limes der Gleichungen (7.11)-(7.13). Mit Hilfe von $\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$ und $\beta \sim 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ findet man leicht:

$$\psi_{\max} \sim \frac{1}{2\gamma} \rightarrow 0 \quad (\gamma \rightarrow \infty).$$

Es folgt, dass die elektromagnetischen Wellen überwiegend unter einem recht kleinen Winkel zur gemeinsamen Richtung von $\boldsymbol{\beta}$ und $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ ausgestrahlt werden. Im ultrarelativistischen Limes kann man daher in (7.11) im Zähler $\sin(\psi) \rightarrow \psi$ und im Nenner $\cos(\psi) \rightarrow 1 - \frac{1}{2}\psi^2$ und $\beta \rightarrow 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ ersetzen. Es folgt:

$$\frac{\sin^2(\psi)}{[1 - \beta \cos(\psi)]^5} \sim \frac{\psi^2}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\psi^2\right)\right]^5} \sim \frac{\psi^2}{\left(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}\psi^2\right)^5} \sim \frac{32\gamma^8 (\gamma\psi)^2}{[1 + (\gamma\psi)^2]^5}$$

und somit

$$\frac{dW}{d\Omega} \sim \frac{2q^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \gamma^8}{\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{(\gamma\psi)^2}{[1 + (\gamma\psi)^2]^5} \quad (\gamma \rightarrow \infty).$$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses zeigt man leicht, dass der quadratische Mittelwert von ψ durch

$$\sqrt{\langle \psi^2 \rangle} \sim \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0 c^2}{\mathcal{E}_g} \quad (\gamma \rightarrow \infty)$$

gegeben ist, wobei \mathcal{E}_g die Gesamtenergie (kinetische Energie plus Ruheenergie) der Punktladung darstellt. Die Verteilung der Strahlung über die verschiedenen Winkel ist in Abbildung 7.2 dargestellt. Die Leistung pro Raumwinkel als Funktion von ψ ist in Abbildung 7.3 angegeben, im linken Bild für Teilchen mit niedrigen Geschwindigkeiten ($\beta \downarrow 0$), im rechten Bild im ultrarelativistischen Limes.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Bewegung eines geladenen Teilchens auf einem Kreis, wobei wir annehmen, dass die Geschwindigkeit $\boldsymbol{\beta}$ und die Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{\beta}} \perp \boldsymbol{\beta}$ betragsmäßig konstant sind. Wie in Abbildung 7.4 skizziert, wählen wir die $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Richtung entlang der instantanen Geschwindigkeit und die $\hat{\mathbf{e}}_1$ -Richtung entlang der instantanen Beschleunigung, so dass $\hat{\mathbf{R}}$ mit Hilfe der sphärischen Koordinaten (ϑ, φ) charakterisiert werden kann. Einsetzen von

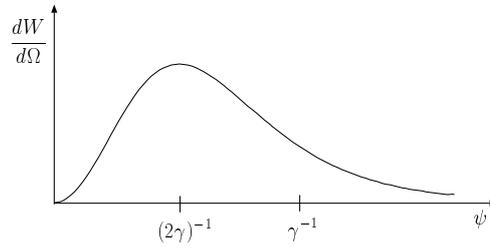


Abbildung 7.2: Winkelabhängigkeit der Strahlung bei beschleunigter, geradliniger Bewegung

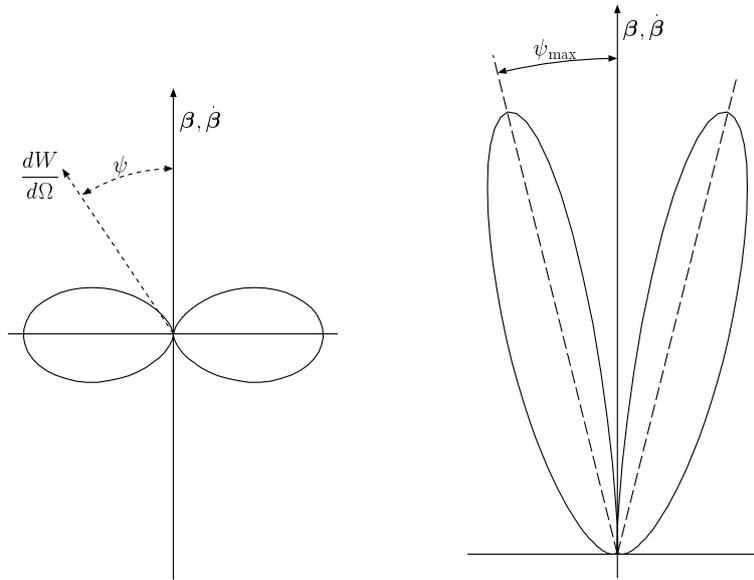


Abbildung 7.3: Polarplot der Ausstrahlung bei nichtrelativistischen (links) und relativistischen (rechts) Geschwindigkeiten.

$\hat{\mathbf{R}}(\vartheta, \varphi)$ in (7.9) liefert:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^5} \\ &= \frac{q^2|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{[1 - \beta \cos(\vartheta)]^2 - (1 - \beta^2) \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi)}{[1 - \beta \cos(\vartheta)]^5}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Man erhält die Gesamtleistung (in retardierter Zeit), indem man dieses Ergebnis über den gesamten Raumwinkel integriert. Eine elementare Rechnung liefert:

$$W = \int d\Omega \frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2\gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c}. \quad (7.15)$$

Der Vergleich dieses Ergebnisses für die Kreisbahn mit dem Analogon (7.13) für das linear beschleunigte Teilchen führt auf interessante (und wichtige) Schlussfolgerungen: Es sei daran erinnert, dass die Kraft, die auf ein Teilchen wirkt, in

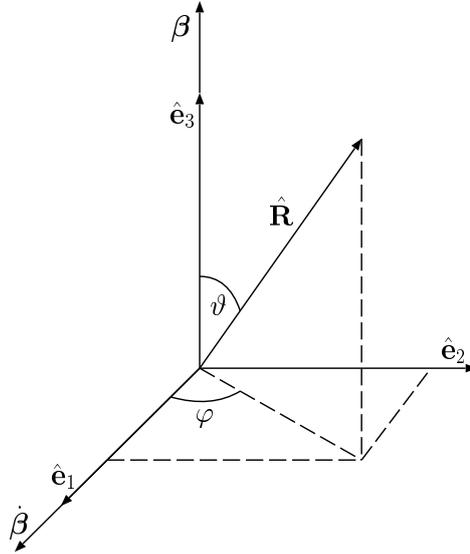


Abbildung 7.4: Skizze des instantanen Bezugssystems

der Relativitätstheorie durch die Zeitableitung (d. h. hier: durch die Ableitung bezüglich der *retardierten* Zeit) des kinetischen Impulses gegeben ist:

$$\mathbf{F} = \frac{d\boldsymbol{\pi}}{d\tau} = \frac{d(\gamma m_0 \mathbf{u})}{d\tau} = \frac{d(\gamma m_0 c \boldsymbol{\beta})}{d\tau}.$$

Nun ist γ konstant für die Kreisbahn, so dass in diesem Fall $\mathbf{F}_{\text{kr}} = \gamma m_0 c \dot{\boldsymbol{\beta}}$ gilt. Für die lineare Beschleunigung gilt dagegen:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{lin}} &= \frac{d(\gamma m_0 c \boldsymbol{\beta})}{d\tau} = m_0 c \left[\gamma \dot{\boldsymbol{\beta}} - \frac{1}{2} \gamma^3 (-2\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} \right] \\ &= m_0 c \gamma \dot{\boldsymbol{\beta}} \left(1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right) = m_0 c \gamma^3 \dot{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned}$$

Die Gesamtleistungen der linearen und kreisförmigen Bewegungen können daher auch in der Form

$$W_{\text{lin}} = \frac{q^2 |\mathbf{F}_{\text{lin}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c (m_0 c)^2}, \quad W_{\text{kr}} = \gamma^2 \frac{q^2 |\mathbf{F}_{\text{kr}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c (m_0 c)^2}$$

dargestellt werden. Offensichtlich ist die Gesamtleistung (und somit der Energieverlust) im Falle der transversalen Beschleunigung bei betragsmäßig gleicher Kraft um einen Faktor γ^2 größer als für linear beschleunigte Teilchen.

Im ultrarelativistischen Limes kann man in (7.14) wiederum ersetzen: $\cos(\vartheta) \rightarrow 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2$, $\sin(\vartheta) \rightarrow \vartheta$ und $\beta \rightarrow 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$. Das Ergebnis lautet:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \gamma^6}{2\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{[1 + (\gamma\vartheta)^2]^2 - 4(\gamma\vartheta)^2 \cos^2(\varphi)}{[1 + (\gamma\vartheta)^2]^5} \quad (\gamma \rightarrow \infty),$$

und mit Hilfe dieses Resultats zeigt man leicht, dass der quadratische Mittelwert des Winkels zwischen $\hat{\mathbf{R}}$ und $\boldsymbol{\beta}$ denselben Wert wie für lineare Beschleunigung

hat:

$$\sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} \sim \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0 c^2}{\mathcal{E}_g} \quad (\gamma \rightarrow \infty).$$

Im ultrarelativistischen Fall ist die Strahlung eines geladenen Teilchens auf einer Kreisbahn daher sehr stark um die Geschwindigkeitsrichtung konzentriert.

7.3 Strahlungsfelder lokalisierter oszillierender Quellen

Wir betrachten ein räumlich lokalisiertes, zeitlich veränderliches System von Ladungen und Strömen, die aufgrund der inhomogenen Maxwell-Gleichungen als Quellen des elektromagnetischen Feldes wirken. Wir nehmen zunächst an, dass das elektromagnetische Feld sich *im Vakuum* ausbreitet. Im Sinne einer Fourier-Analyse der Zeitentwicklung des Systems reicht es wiederum aus, die Strahlung einzelner Fourier-Komponenten zu betrachten. Dementsprechend machen wir den Ansatz

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [\rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}] \quad , \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [\mathbf{j}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$$

für die Zeitabhängigkeit der Ladungen und Ströme. Hierbei dürfen die rein ortsabhängigen Funktionen $\rho(\mathbf{x})$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ durchaus komplexwertig sein. Die Kontinuitätsgleichung für $\rho(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ impliziert die Beziehung

$$(\nabla \cdot \mathbf{j})(\mathbf{x}) = i\omega\rho(\mathbf{x})$$

zwischen $\rho(\mathbf{x})$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x})$. Das retardierte 4-Potential der Ladungs- und Stromverteilung ist durch Gleichung (7.1) gegeben:

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d\xi \frac{j^\mu(\xi, t - \frac{|\mathbf{x}-\xi|}{c})}{|\mathbf{x}-\xi|},$$

so dass die einzelnen Komponenten in der Form

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [\Phi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}] \quad , \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [\mathcal{A}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$$

mit

$$\Phi(\mathbf{x}) \equiv \int d\xi \frac{\rho(\xi)e^{ik|\mathbf{x}-\xi|}}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}-\xi|} \quad , \quad \mathcal{A}(\mathbf{x}) \equiv \int d\xi \frac{\mathbf{j}(\xi)e^{ik|\mathbf{x}-\xi|}}{4\pi\epsilon_0 c^2|\mathbf{x}-\xi|} \quad (7.16)$$

darstellbar sind. Hierbei gilt $k = \frac{\omega}{c}$. Aus der Lorenz-Eichung $\partial_\nu A^\nu = 0$ folgt noch die Beziehung

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{c}{ik}(\nabla \cdot \mathcal{A})(\mathbf{x}),$$

so dass Φ bekannt ist, sobald \mathcal{A} bekannt ist. Außerhalb der Quellen, also in dem Raumbereich, in dem $\rho(\mathbf{x}) = 0$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ gilt, sind die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder durch

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

bestimmt. Es folgt, dass die Felder ebenfalls eine Zeitabhängigkeit der Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathcal{B}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right] \quad , \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathcal{E}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right]$$

aufweisen, wobei \mathcal{B} und \mathcal{E} durch

$$\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A} \quad , \quad \mathcal{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \mathcal{B}$$

gegeben sind.

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Wellenlänge λ der Strahlung *groß* im Vergleich zur typischen Ausdehnung a der Quellen ist:

$$ka = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1 .$$

Betrachtet man als einfaches Beispiel ein geladenes Teilchen, das sich mit der Winkelfrequenz ω auf einem Kreis mit dem Radius a bewegt, so sieht man sofort, dass die Geschwindigkeit des Teilchens nur nicht-relativistisch sein kann:

$$|\beta| = \frac{|\mathbf{u}|}{c} = \frac{\omega a}{c} = ka \ll 1 .$$

Wir beschränken uns im Folgenden daher auf nicht-relativistische Systeme. Als konkrete Anwendungen der nachfolgenden Theorie sind die Konstruktion von Antennen und die Beschreibung von spontanen Übergängen in Atomen zu nennen, wobei man im letzteren Fall allerdings eine quantenmechanische Variante unserer klassischen Überlegungen benötigt.

Betrachten wir nun eine allgemeine (lokalisierte) Strahlungsquelle. Wir definieren die Mittelwerte

$$\langle f(\boldsymbol{\xi}) \rangle_w \equiv \int d\boldsymbol{\xi} f(\boldsymbol{\xi}) w(\boldsymbol{\xi}) \quad , \quad w(\boldsymbol{\xi}) \equiv \frac{|\rho(\boldsymbol{\xi})|}{\int d\boldsymbol{\xi} |\rho(\boldsymbol{\xi})|}$$

und wählen den Ursprung so, dass $\langle \boldsymbol{\xi} \rangle_w = \mathbf{0}$ gilt. Außerdem definieren wir die typische Ausdehnung a der Quellen durch $\langle \boldsymbol{\xi}^2 \rangle_w \equiv a^2$. Wir unterscheiden nun drei mögliche Raumbereiche außerhalb der Quellen (siehe Abbildung 7.5), stets unter der Bedingung $ka \ll 1$:

- die *Nahzone* oder *Statische Zone* (mit $a \ll x \ll \lambda$),
- die *Zwischen-* oder *Induktionszone* (mit $x \simeq \lambda$) und
- die *Fern-* oder *Strahlungszone* (mit $x \gg \lambda$).

In allen drei Zonen kann man aufgrund der Annahme $a \ll x$ in (7.16) entwickeln:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| &\sim x \left[1 - \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}}{x} + \frac{\hat{\mathbf{x}}^T (\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^T - \xi^2 \mathbf{1}) \hat{\mathbf{x}}}{2x^2} + \dots \right] \\ \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} &\sim \frac{1}{x} \left[1 + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}}{x} + \frac{\hat{\mathbf{x}}^T (3\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^T - \xi^2 \mathbf{1}) \hat{\mathbf{x}}}{2x^2} + \dots \right] . \end{aligned}$$

Es folgt unter Vernachlässigung höherer Ordnungen im kleinen Parameter $\frac{a}{x}$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikx}}{x} \int d\boldsymbol{\xi} \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}) e^{-ik(\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \dots)} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}}{x} + \dots \right) .$$

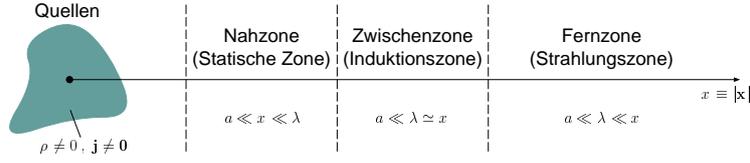


Abbildung 7.5: Die Quellen des elektromagnetischen Feldes und die Raumbereiche außerhalb der Quellen.

Wir betrachten zuerst die Nahzone, in der $ka \ll 1$ und $kx \ll 1$ gilt. In diesem Fall ist das Vektorpotential also durch

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \sim \frac{\mu_0}{4\pi x} \int d\xi \mathbf{j}(\xi) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi x} \mathbf{d} \quad (a \ll x \ll \lambda)$$

gegeben, wobei das bereits aus Abschnitt [5.1] bekannte elektrische Dipolmoment \mathbf{d} eingeführt wurde:

$$\int d\xi \mathbf{j}(\xi) = -\int d\xi \xi (\nabla \cdot \mathbf{j})(\xi) = -i\omega \int d\xi \xi \rho(\xi) = -i\omega \mathbf{d}.$$

Die Felder sind daher in der Nahzone durch

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{x}) &= (\nabla \times \mathcal{A})(\mathbf{x}) = \frac{ik}{4\pi\epsilon_0 c x^2} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d} \\ \mathcal{E}(\mathbf{x}) &= \frac{ic}{k} (\nabla \times \mathcal{B})(\mathbf{x}) = \frac{(3\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^T - \mathbb{1})\mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 x^3} \end{aligned}$$

gegeben. Das \mathcal{B} -Feld ist um einen Faktor kx kleiner als das \mathcal{E} -Feld, so dass das elektromagnetische Feld in der Nahzone überwiegend elektrischen Charakter hat. Das (dominante) \mathcal{E} -Feld hat genau dieselbe Gestalt wie das Dipolfeld in der Elektrostatik. Erst in der Induktionszone erlangt das Magnetfeld (die „magnetische Induktion“) die selbe Größenordnung wie das \mathcal{E} -Feld.

In der Fern- oder Strahlungszone gilt bis auf höhere Ordnungen der kleinen Parameter ka , $\frac{a}{x}$ und $\frac{1}{kx}$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \sim \frac{\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \left\{ \int d\xi \mathbf{j}(\xi) - ik \left[\int d\xi \mathbf{j}(\xi) \xi^T \right] \mathbf{x} + \dots \right\}.$$

Wir wissen bereits, dass das erste Integral im rechten Glied gleich $-i\omega \mathbf{d}$ ist. Das zweite Integral kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\int d\xi \mathbf{j}(\xi) \xi^T = \frac{1}{2} \int d\xi [\xi \mathbf{j}^T + \mathbf{j} \xi^T] + \frac{1}{2} \int d\xi [\mathbf{j} \xi^T - \xi \mathbf{j}^T].$$

Aus Abschnitt [5.2] wissen wir, dass $\frac{1}{2} \int d\xi [\mathbf{j} \xi^T - \xi \mathbf{j}^T]$ den magnetischen Dipoltensor darstellt:

$$\frac{1}{2} \int d\xi [\mathbf{j} \xi^T - \xi \mathbf{j}^T] = D.$$

Außerdem ist aus Abschnitt [5.1] bekannt, dass $\frac{1}{2} \int d\xi [\xi \mathbf{j}^T + \mathbf{j} \xi^T]$ im Wesentlichen durch das elektrische Quadrupolmoment bestimmt ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d\xi [\xi \mathbf{j}^T + \mathbf{j} \xi^T] &= -\frac{1}{2} \int d\xi \xi \xi^T (\nabla \cdot \mathbf{j})(\xi) = -\frac{1}{2} i\omega \int d\xi \xi \xi^T \rho(\xi) \\ &= -\frac{1}{3} i\omega \left[Q + \frac{1}{2} \int d\xi \xi^2 \rho(\xi) \mathbb{1} \right] \equiv -\frac{1}{3} i\omega \tilde{Q}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also für das Vektorpotential:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{x}) &\sim \frac{\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \left[-i\omega \mathbf{d} - ik \hat{\mathbf{x}} \cdot \left(D - \frac{1}{3} i\omega \tilde{Q} \right) + \dots \right] \\ &\equiv \mathcal{A}_{E1} + \mathcal{A}_{M1} + \mathcal{A}_{E2} + \dots \end{aligned} \quad (7.17)$$

Die drei führenden Terme werden als elektrische Dipolstrahlung ($E1$), magnetische Dipolstrahlung ($M1$) und elektrische Quadrupolstrahlung ($E2$) bezeichnet. Natürlich gibt es auch Multipolstrahlung höherer Ordnung, aber diese ist für viele praktische Anwendungen von untergeordneter Bedeutung.

Betrachten wir zuerst die elektrische Dipolstrahlung ($\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$). Das entsprechende Magnetfeld ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{E1} &= \nabla \times \mathcal{A}_{E1} = \frac{k^2 \mu_0 c e^{ikx}}{4\pi x} \left(1 - \frac{1}{ikx} \right) \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d} \\ &\sim \frac{k^2 \mu_0 c e^{ikx}}{4\pi x} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d}, \end{aligned}$$

und das elektrische Feld ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{E1} &= \frac{ic}{k} \nabla \times \mathcal{B}_{E1} \\ &= \frac{ike^{ikx}}{4\pi \varepsilon_0 x^2} \left[\left(ikx - 3 + \frac{3}{ikx} \right) \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^T - \left(ikx - 1 + \frac{1}{ikx} \right) \mathbb{1} \right] \mathbf{d} \\ &\sim -\frac{k^2 e^{ikx}}{4\pi \varepsilon_0 x} [\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^T - \mathbb{1}] \mathbf{d} \end{aligned}$$

oder alternativ durch $\mathcal{E}_{E1} \sim \frac{ic}{k} (ik \hat{\mathbf{x}} \times \mathcal{B}_{E1}) = c \mathcal{B}_{E1} \times \hat{\mathbf{x}}$ gegeben. Der zeitliche Mittelwert der Leistung pro Raumwinkel,

$$\left(\frac{dW}{d\Omega} \right)_{E1} = \frac{1}{\mu_0} \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{x}} x^2$$

ist mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{x}} &= \overline{\operatorname{Re}[\mathcal{E} e^{-i\omega t}] \times \operatorname{Re}[\mathcal{B} e^{-i\omega t}]} \cdot \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathcal{E} \times \mathcal{B}^*) \cdot \hat{\mathbf{x}} = \frac{c}{2} \operatorname{Re}[(\mathcal{B} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \mathcal{B}^*] \cdot \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{c}{2} |\mathcal{B} \times \hat{\mathbf{x}}|^2 \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{d\Omega} \right)_{E1} &= \frac{cx^2}{2\mu_0} |\mathcal{B}_{E1} \times \hat{\mathbf{x}}|^2 = \frac{cx^2}{2\mu_0} \left(\frac{k^2 \mu_0 c}{4\pi x} \right)^2 |(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d}) \times \hat{\mathbf{x}}|^2 \\ &= \frac{ck^4}{32\pi^2 \varepsilon_0} |\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{d}|^2 = \frac{ck^4 |\mathbf{d}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} \sin^2(\vartheta) \end{aligned}$$

gegeben, wobei ϑ den Winkel zwischen den Vektoren $\hat{\mathbf{x}}$ und \mathbf{d} bezeichnet. Die zeitgemittelte Gesamtleistung ist daher:

$$\overline{W}_{E1} = \int d\Omega \overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{E1} = \frac{ck^4 |\mathbf{d}|^2}{12\pi\epsilon_0}.$$

Eine Polardarstellung der zeitgemittelten Leistung pro Raumwinkel ist in Abbildung 7.6 gegeben.

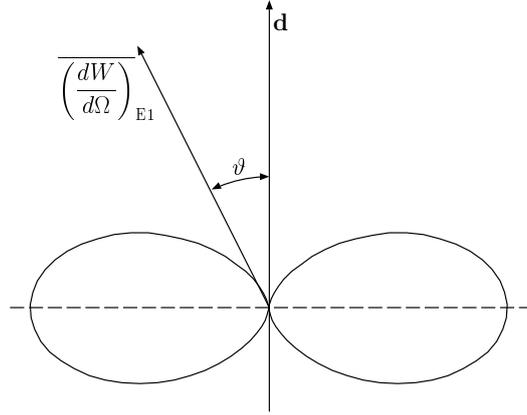


Abbildung 7.6: Zeitgemittelte Leistung pro Raumwinkel bei Dipolstrahlung

Nehmen wir nun an, dass das elektrische Dipolmoment der Ladungsverteilung Null ist ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$), so dass der führende Term \mathcal{A}_{E1} in (7.17) verschwindet. In diesem Fall sind die magnetische Dipol- und die elektrische Quadrupolstrahlung wichtig:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{M1+E2} \sim -\frac{ik\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \left(D - \frac{1}{3}i\omega\tilde{Q}\right) \hat{\mathbf{x}}.$$

Bei der Berechnung der Felder beschränken wir uns auf die führende Ordnung in der Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{kx}$. Man erhält für das Magnetfeld:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{M1+E2} &= \nabla \times \mathcal{A}_{M1+E2} \sim ik\hat{\mathbf{x}} \times \mathcal{A}_{M1+E2} \\ &\sim \frac{k^2\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \hat{\mathbf{x}} \times \left[\left(D - \frac{1}{3}i\omega Q\right) \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{3}i\omega \int d\xi \xi^2 \rho(\xi) \hat{\mathbf{x}} \right] \\ &\sim \frac{k^2\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \hat{\mathbf{x}} \times (M\hat{\mathbf{x}}) \quad , \quad M \equiv D - \frac{1}{3}i\omega Q \end{aligned}$$

und für das elektrische Feld:

$$\mathcal{E}_{M1+E2} = \frac{ic}{k} \nabla \times \mathcal{B}_{M1+E2} \sim -c\hat{\mathbf{x}} \times \mathcal{B}_{M1+E2}.$$

Der zeitliche Mittelwert der Leistung pro Raumwinkel ist nun durch

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{M1+E2} &= \frac{1}{\mu_0} \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{x}}} x^2 \sim \frac{cx^2}{2\mu_0} |\hat{\mathbf{x}} \times \mathcal{B}_{M1+E2}|^2 \\ &\sim \frac{\mu_0 ck^4}{32\pi^2} |\hat{\mathbf{x}} \times [\hat{\mathbf{x}} \times (M\hat{\mathbf{x}})]|^2 = \frac{\mu_0 ck^4}{32\pi^2} |\hat{\mathbf{x}} \times (M\hat{\mathbf{x}})|^2 \end{aligned}$$

gegeben, und die zeitgemittelte Gesamtleistung ist daher gleich

$$\overline{W}_{M1+E2} = \int d\Omega \overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{M1+E2} \sim \frac{\mu_0 c k^4}{8\pi} \langle |\hat{\mathbf{x}} \times (M\hat{\mathbf{x}})|^2 \rangle_{\Omega} .$$

Hierbei bezeichnet $\langle \dots \rangle_{\Omega}$ den Mittelwert über alle möglichen Raumwinkel. Aus der Symmetrie von Q und der Antisymmetrie von D folgt nun leicht:

$$\langle |\hat{\mathbf{x}} \times (M\hat{\mathbf{x}})|^2 \rangle_{\Omega} = \frac{1}{3} \text{Sp}(DD^\dagger) + \frac{\omega^2}{45} \text{Sp}(QQ^\dagger) .$$

Führen wir wie in Abschnitt [5.2] das magnetische Moment \mathbf{m} ein:

$$D_{ij} = -\varepsilon_{ijk} m_k \quad , \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d\xi \xi \times \mathbf{j}(\xi) ,$$

dann kann man noch $\text{Sp}(DD^\dagger) = 2|\mathbf{m}|^2$ schreiben. Somit gilt für die zeitgemittelte Gesamtleistung:

$$\overline{W}_{M1+E2} \sim \frac{\mu_0 c k^4}{12\pi} \left[|\mathbf{m}|^2 + \frac{\omega^2}{30} \text{Sp}(QQ^\dagger) \right] .$$

Interessant an diesem Ergebnis ist u. a., dass die Beiträge der $M1$ - und $E2$ -Strahlung zur Gesamtleistung nicht mischen, sondern rein additiv sind. Diese Additivität gilt allgemein für Multipolstrahlung, nicht nur für die hier betrachteten führenden Momente.

Wir betrachten nun die zeitgemittelte Leistung pro Raumwinkel, zuerst für $M1$ - und dann für $E2$ -Strahlung. Für $M1$ -Strahlung ($D \neq 0, Q = 0$) gilt mit $\hat{\mathbf{x}} \cdot D = -\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{m}$:

$$\overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{M1} = \frac{\mu_0 c k^4}{32\pi^2} |\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{m})|^2 = \frac{\mu_0 c k^4 |\mathbf{m}|^2}{32\pi^2} \sin^2(\vartheta) ,$$

wobei ϑ den Winkel zwischen \mathbf{m} und $\hat{\mathbf{x}}$ bezeichnet. Das Strahlungsfeld für $M1$ -Strahlung hat also genau dieselbe Winkelabhängigkeit wie dasjenige der elektrischen Dipolstrahlung ($E1$). Für $E2$ -Strahlung ($D = 0, Q \neq 0$) gilt allgemein:

$$\overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{E2} = \frac{c k^6}{3^2 2^5 \pi^2 \varepsilon_0} |\hat{\mathbf{x}} \times (Q\hat{\mathbf{x}})|^2 .$$

Hierbei ist Q eine spurlose, symmetrische, komplexe, also nicht notwendigerweise diagonalisierbare Matrix. Nimmt man jedoch zur Illustration an, dass Q die einfache Form $Q = \text{diag}\{Q_0, Q_0, -2Q_0\}$ hat, so erhält man das Strahlungsfeld

$$\overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{E2} = \frac{c k^6 |Q_0|^2}{2^7 \pi^2 \varepsilon_0} \sin^2(2\vartheta) ,$$

wobei ϑ nun den Winkel zwischen $\hat{\mathbf{x}}$ und der $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Achse bezeichnet. Eine Polardarstellung dieses Strahlungsfeldes ist in Abbildung 7.7 skizziert. Falls das elektrische Quadrupolmoment Q eine andere Form hat, kann natürlich auch das zugehörige Strahlungsfeld durchaus komplizierter sein.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Dynamik der von lokalisierten, nicht-relativistischen Ladungs- und Stromdichten erzeugten Strahlungsfelder mit Hilfe der im Laufe dieser Vorlesung entwickelten Methoden und Ideen

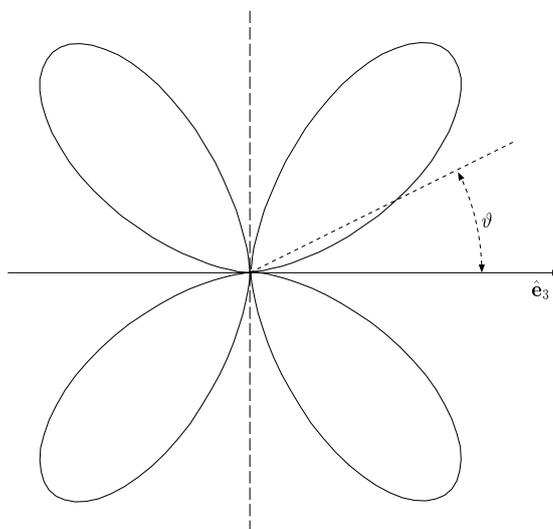


Abbildung 7.7: Polarplot der gemittelten Quadrupolabstrahlung

im Detail untersucht werden kann. Für manche Anwendungen benötigt man unter Umständen Verfeinerungen des hier behandelten Formalismus: Zum Beispiel müsste man die Theorie für Anwendungen in der Atomphysik quantenmechanisch formulieren und benötigt man für astrophysikalische Zwecke eine relativistische Variante. Für solche Erweiterungen sei auf die Literatur verwiesen.

7.3.1 Was ändert sich bei Wellenausbreitung im Medium?

Bisher wurde in diesem Abschnitt [7.3] angenommen, dass sich die Strahlungsfelder der betrachteten lokalisierten oszillierenden Quellen *im Vakuum* ausbreiten. Falls die Wellenausbreitung alternativ durch ein homogenes *Medium* (mit einer relativen Permeabilität μ_r und einer relativen Permittivität ϵ_r) stattfindet, ändert sich formal sehr wenig: Wie bereits aus der Einführung (Abschnitt [??]) bekannt ist, sind in diesem Fall lediglich überall die Parameter ϵ_0 und μ_0 durch $\epsilon \equiv \epsilon_0 \epsilon_r$ bzw. $\mu \equiv \mu_0 \mu_r$ und somit auch $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ durch $\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ zu ersetzen. *Im Vakuum* haben wir sowohl für die *E1*-Strahlung als auch für die *(M1 + E2)*-Strahlung in der Strahlungszone Beziehungen der Form $\mathcal{E} \sim c \mathcal{B} \times \hat{\mathbf{x}}$ erhalten. *Im Medium* werden diese Beziehungen durch

$$\mathcal{E} \sim \bar{c} \mathcal{B} \times \hat{\mathbf{x}} = \mu \bar{c} \mathcal{H} \times \hat{\mathbf{x}} \quad , \quad \mathcal{H} \equiv \frac{1}{\mu} \mathcal{B}$$

ersetzt. Interessant an dieser verallgemeinerten Beziehung ist, dass das Verhältnis zwischen den Amplituden der elektrischen und magnetischen Felder *mediumabhängig* wird. Analog wird auch der Proportionalitätsfaktor im Ausdruck für den zeitlichen Mittelwert der Leistung pro Raumwinkel mediumabhängig:

$$\frac{d\bar{W}}{d\Omega} = \frac{\bar{c} x^2}{2\mu} |\mathcal{B} \times \hat{\mathbf{x}}|^2 = \frac{1}{2} \mu \bar{c} x^2 |\mathcal{H} \times \hat{\mathbf{x}}|^2 \quad .$$

Amüsanterweise hat in den beiden Ausdrücken für \mathcal{E} und $\frac{dW}{d\Omega}$ der Vorfaktor $\mu\bar{c}$ im jeweiligen rechten Glied die physikalische Dimension eines *Widerstandes*:

$$[\mu\bar{c}] = [\mu_0 c] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A}^2 \text{s}^3} = \Omega \quad .$$

Außerdem gilt $[x\mathcal{E}] = \text{V}$ und $[\mathcal{H} \times \mathbf{x}] = \text{A}$. Definiert man also:

$$\mu\bar{c} \equiv R \quad , \quad x|\mathcal{E}| \equiv V \quad , \quad x|\mathcal{H}| \equiv I \quad , \quad \frac{dW}{d\Omega} \equiv P \quad ,$$

so erhält man die aus der Theorie eines Wechselstroms durch einen Ohm'schen Widerstand bekannten Ausdrücke:

$$V = IR \quad , \quad P = \frac{1}{2}RI^2 \quad ,$$

wobei P die zeitgemittelte (oder effektive) Leistung des Wechselstromkreises darstellt. Die Analogie mit der elementaren Elektrizitätslehre liegt auf der Hand, und in der Tat wird das Produkt $\mu\bar{c}$ in der Literatur manchmal als der *Wellenwiderstand* des Mediums bezeichnet. Der numerische Wert dieses „Wellenwiderstands“ hängt von ε_r und μ_r und somit vom Medium ab und ist durch

$$\mu\bar{c} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \mu_0 c \simeq \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \times 376,73 \Omega$$

gegeben. Es ist klar, dass man diese formale Analogie nicht überinterpretieren sollte: Mit echter Stromleitung hat die in diesem Abschnitt betrachtete Wellenausbreitung in einem *isolierenden* Medium natürlich nichts zu tun.

Anhang **A**

Retardierte elektromagnetische Felder

Wir fassen die wichtigsten Rechenschritte zusammen, die von den retardierten Potentialen,

$$\Phi(\mathbf{R}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad , \quad \mathbf{A}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad ,$$

zu den retardierten Feldern,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla_{\mathbf{x}}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} \quad ,$$

führen. Details und Hintergründe kann man in Abschnitt [7.1] finden. Wir erinnern an die Definitionen des Relativvektors $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau)$,

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(\tau) \quad , \quad R(\mathbf{x}, \tau) \equiv |\mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau)| \quad ,$$

und der retardierten Zeit $\tau(\mathbf{x}, t)$,

$$\tau + \frac{R(\mathbf{x}, \tau)}{c} \equiv t \quad .$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)_t &= -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial R_j} \left(\frac{\partial R_j}{\partial x_i} + \frac{\partial R_j}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_j} \frac{d\beta_j}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}\right] \\ -\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} &= -\left(\frac{\partial A_i}{\partial R_j} \frac{\partial R_j}{\partial \tau} + \frac{\partial A_i}{\partial \beta_j} \frac{d\beta_j}{d\tau}\right) \frac{\partial \tau}{\partial t} \end{aligned}$$

und

$$B_i = \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\right)_t = \epsilon_{ijk} \left[\frac{\partial A_k}{\partial R_l} \left(\frac{\partial R_l}{\partial x_j} + \frac{\partial R_l}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial A_k}{\partial \beta_l} \frac{d\beta_l}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_j}\right]$$

ist klar, dass die Berechnung der Felder die Bestimmung einiger partieller Ableitungen erfordert. Am einfachsten sind wohl

$$\boldsymbol{\beta}(\tau) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}_q}{d\tau}(\tau) \quad , \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}(\tau) \equiv \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{c} \frac{d^2 \mathbf{x}_q}{d\tau^2}(\tau) \quad ,$$

die nicht explizit von \mathbf{x} abhängig sind. Die Ortsableitung von $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(\tau)$ folgt als $\frac{\partial R_i}{\partial x_i} = \delta_{ij}$, und die Ableitungen von $R(\mathbf{x}, \tau)$ folgen durch Ableiten der Identität $\frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{2}\mathbf{R}^2$:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right)_{\mathbf{x}} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{R} = -c\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad , \quad \left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right)_{\tau} = \frac{R_i}{R} = \left(\frac{\partial R}{\partial R_i}\right)_{\tau} .$$

Zur Berechnung der Ableitungen von $\tau(\mathbf{x}, t)$ bezüglich \mathbf{x} und t verwenden wir die Identität $\tau = t - \frac{R}{c}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = 1 + (\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} \\ \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\right)_t &= -\frac{1}{c} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right)_{\tau} + \left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right)_{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\right)_t \right] . \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \quad , \quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{x}}\right)_t = \frac{-\frac{1}{c}\hat{\mathbf{R}}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}} .$$

Mit $\hat{R}_i \equiv \frac{R_i}{R}$ erhalten wir also:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)_t &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{\hat{R}_j - \beta_j}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2} \left[\delta_{ij} + (-c\beta_j) \frac{(-\frac{1}{c}\hat{R}_i)}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(-R_j)}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2} \dot{\beta}_j \frac{(-\frac{1}{c}\hat{R}_i)}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})(\hat{R}_i - \beta_i) + (\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} - \beta^2)\hat{R}_i + \frac{1}{c}R(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\hat{R}_i}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ -\frac{\beta_i(\hat{R}_j - \beta_j)}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2} (-c\beta_j) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\delta_{ij}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} - \frac{\beta_i(-R_j)}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2} \right] \dot{\beta}_j \right\} \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{-(\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})\beta_i + \beta^2\beta_i - \frac{1}{c}R[(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})\dot{\beta}_i + (\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\beta_i]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^3} \end{aligned}$$

und daher insgesamt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q \left\{ (1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{c}R[(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) - \hat{\mathbf{R}} \cdot (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}] \right\}}{4\pi\epsilon_0 R^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^3} .$$

Aufgrund der Identität $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ ist dies äquivalent zum Ausdruck (7.8) für das elektrische Feld. Für das Magnetfeld findet man:

$$\begin{aligned}
 B_i &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \varepsilon_{ijk} \left\{ -\frac{\beta_k(\hat{R}_l - \beta_l)}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2} \left[\delta_{lj} + (-c\beta_l) \frac{\left(-\frac{1}{c}\hat{R}_j\right)}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\delta_{kl}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} - \frac{\beta_k(-R_l)}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2} \right] \dot{\beta}_l \frac{\left(-\frac{1}{c}\hat{R}_j\right)}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \right\} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R^2} \varepsilon_{ijk} \frac{-(1 - \beta^2)\hat{R}_j \beta_k - \frac{1}{c}R[(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})\dot{\beta}_k + (\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\beta_k] \hat{R}_j}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^3} \\
 &= \frac{1}{c} (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E})_i .
 \end{aligned}$$

Interessanterweise steht das Magnetfeld also stets senkrecht auf dem elektrischen Feld.

Literaturverzeichnis

- [1] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band II (Klassische Feldtheorie) und Band VIII (Elektrodynamik der Kontinua), Akademie-Verlag (Berlin).
- [2] M. Schwartz, *Principles of Electrodynamics*, Dover Publications (New York, 1987)
- [3] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley (New York, 1999).
- [4] H. Römer, M. Forger, *Elementare Feldtheorie*, VCH (Weinheim, 1993).
- [5] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Dover Publications (New York, 1981).
- [6] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications (Dover 1965).