Prof. Dr. Peter van Dongen
Institut für Physik, KOMET 7

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 13, Abgabe: Montag, 05.02.2018, 10:15 Uhr

Aufgabe 32. Lösung der Wellengleichung für räumlich begrenzte Systeme (Präsenzanteil)
In der Vorlesung wird die allgemeine Lösung der Wellengleichung in räumlich unendlich ausgedehnten Systemen diskutiert. Hier möchten wir einige (relativ) einfache Beispiele von räumlichen Begrenzungen vorführen, in denen eine *exakte Lösung* der Wellengleichung erzielt werden kann.

(a) **Die schwingende Saite**
Die Wellengleichung für eine Saite (d. h. für ein effektiv eindimensionales System der Länge L) lautet:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (0 \le x \le L) \\ &u(x,0) = f(x) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0 \; . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass man die Lösung dieses kombinierten Anfangs- und Randwertproblems durch Trennung von Variablen in der Form einer Reihe darstellen kann:

$$u(x,t) = \sum_n X_n(x)\, T_n(t) \; ,$$

wobei $\{X_n(x)\}$ den Satz der normierten Eigenfunktionen des „Laplace-Operators“ $\partial^2/\partial x^2$ auf dem Intervall $0 \le x \le L$ bezeichnet. Bestimmen Sie $X_n(x)$ und $T_n(t)$ explizit.

(b) **Die schwingende Fensterscheibe, das schwingende Haus, etc.**
Zeigen Sie, dass man die unter a) hergeleiteten Ergebnisse leicht auf ein d-dimensionales quaderförmiges System, d. h. ein System der Form $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \mid 0 \le x_k \le L_k \;\; (k = 1,\dots,d)\}$ verallgemeinern kann. Auf dem Rand $\partial\mathcal{D}$ von $\mathcal{D}$ soll zu jeder Zeit $u = 0$ gelten.

(c) **Die schwingende Membran**
Auch für nicht-quaderförmige Systeme kann man mit Hilfe der Methode der Variablentrennung explizite Lösungen erzielen. Hier betrachten wir z. B. eine Kreisscheibe mit Radius R: $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + x_2^2 \le R\}$. Es gilt wieder $u = 0$ auf dem Rand von $\mathcal{D}$. Zeigen Sie, dass man dieses Problem lösen kann durch Einführung von Polarkoordinaten: $(x_1, x_2) = (\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi))$ und Trennung der Variablen (ρ, φ, t), so dass man eine Lösung der Form

$$u(\mathbf{x},t) = \sum_{nm} P_{nm}(\rho)\Phi_{nm}(\varphi)T_{nm}(t) \; ,$$

erhält. Zeigen Sie insbesondere, dass der ρ-abhängige Anteil $P_{nm}(\rho)$ in einfacher Weise mit der Bessel-Funktion J_n verknüpft ist.

Aufgabe 33. Die inhomogene Wellengleichung und Resonanz (Hausaufgabe, 13 Punkte)

Die Anwesenheit äußerer Kräfte führt zu *Inhomogenitäten* in der Wellengleichung, die wir in dieser Aufgabe durch eine Funktion $F(\mathbf{x},t)$ beschreiben werden. Wir nehmen an, dass die Wellengleichung in einem offenen Gebiet $\mathcal{D}$ gelöst werden soll und dass die Anfangswerte der Funktion u und ihrer Ableitung $\partial u/\partial t$ sowie der Wert von u auf dem Rand $\partial\mathcal{D}$ von $\mathcal{D}$ vorgegeben sind:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u + F(\mathbf{x},t) \\ &u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}) \;\; ; \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x}) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathbf{x}\in\mathcal{D}) \tag{1}$$
$$u(\mathbf{x},t) = v(\mathbf{x},t) \qquad\qquad (\mathbf{x}\in\partial\mathcal{D}) \; .$$

Dabei seien $\mathcal{D}$ sternförmig sowie der Rand $\partial\mathcal{D}$ selbst und die darauf definierte Funktion $v(\mathbf{x},t)$ hinreichend glatt.

(a) Zeigen Sie, dass man o. B. d. A. den vorgegebenen Randwert $v(\mathbf{x},t)$ $(\mathbf{x}\in\partial\mathcal{D})$ ersetzen kann durch $v(\mathbf{x},t)=0$, indem man die Funktionen u, F, f und g geeignet modifiziert. Im Folgenden werden wir annehmen, dass $v(\mathbf{x},t)=0$ gewählt wurde.

(b) Man kann die gesuchte Lösung $u(\mathbf{x},t)$ und die Inhomogenität $F(\mathbf{x},t)$ nun entwickeln nach den Eigenfunktionen $X_n(\mathbf{x})$ des Laplace-Operators auf $\mathcal{D}$, die die vorgegebene Randbedingung erfüllen (d. h. $X_n(\mathbf{x})=0$ für $\mathbf{x}\in\partial\mathcal{D}$):

$$u(\mathbf{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)X_n(\mathbf{x}) \qquad ; \qquad U_n(t) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}\; u(\mathbf{x},t)X_n(\mathbf{x})$$
$$F(\mathbf{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)X_n(\mathbf{x}) \qquad ; \qquad F_n(t) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}\; F(\mathbf{x},t)X_n(\mathbf{x}) \; .$$

Sei nun der zu X_n gehörende Eigenwert gegeben durch λ_n. Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten $U_n(t)$ folgenden Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen:

$$\frac{d^2U_n(t)}{dt^2} + c^2\lambda_n U_n(t) = F_n(t).$$

Geben Sie auch die Anfangsbedingungen $U_n(0)$, $\frac{dU_n}{dt}(0)$ der Entwicklungskoeffizienten an.

(c) Es gibt hierbei einen interessanten Spezialfall, der auftritt, wenn für irgendeine Mode (z. B. für $n=m$) die Zeitabhängigkeit der Quelle $F_m(t)$ genau der Eigenfrequenz $\sqrt{\lambda_m}$ entspricht: $F_m(t) = K\cos(\sqrt{\lambda_m}ct)$, wobei K eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$U_m(t) = A_m\cos(\sqrt{\lambda_m}ct) + B_m\sin(\sqrt{\lambda_m}ct) + C_m t\sin(\sqrt{\lambda_m}ct)$$

gilt, so dass $U_m(t)$ divergiert für $t\to\infty$ und folglich die in der m-ten Mode gespeicherte Energie unbegrenzt anwächst. Man spricht von „Resonanz“. Drücken Sie die Konstanten A_m, B_m und C_m durch die Anfangsbedingungen aus.