Übungsaufgaben zur Vorlesung 08.128.121 im WS 17/18
„Theoretische Physik 2, Elektrodynamik“
Prof. Dr. Peter van Dongen
Institut für Physik, KOMET 7

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 12, Abgabe: Montag, 29.01.2018, 10:15 Uhr

Aufgabe 30. Die Grundlösung der Helmholtz-Gleichung (Präsenzanteil)

Die Grundlösung (oder Green'sche Funktion) der Helmholtz-Gleichung ist die Lösung der Gleichung

$$(\Delta + \lambda)U(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \qquad\qquad (\lambda > 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)\ , \tag{1}$$

wobei $\Delta = \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2}$ den d-dimensionalen Laplace-Operator bezeichnet. Hier beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Fall ($d = 3$) und nehmen an, dass $U(\mathbf{x})$ die Randbedingung $U \to 0$ für $|\mathbf{x}| \to \infty$ erfüllt. Aufgrund der sphärischen Symmetrie des Problems beschränken wir uns des Weiteren auf Lösungen der Form $U(\mathbf{x}) = u(r)$ mit $r \equiv |\mathbf{x}|$.

(a) Leiten Sie aus (1) eine gewöhnliche Differentialgleichung für $u(r)$ her, gültig für alle $r > 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung die Form $u(r) = A\left[\frac{\cos(\sqrt{\lambda}r)}{r} + B\frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{r}\right]$ hat.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, dass $A = \frac{1}{4\pi}$ gilt, während B beliebig ist.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}'\ U(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\mu(\mathbf{x}') \tag{2}$$

eine Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung $(\Delta + \lambda) = -\mu(\mathbf{x})$ zu der Randbedingung $\Phi(\mathbf{x}, t) \to 0$ für $|\mathbf{x}| \to \infty$ ist. Sie dürfen annehmen, dass $\mu(\mathbf{x})$ räumlich begrenzt ist.

(d) Erläutern Sie die Relevanz der Gleichungen (1) und (2) für die Bestimmung der Grundlösung $G(\mathbf{x}, t)$ der Wellengleichung, die durch $\Box G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c}\delta(\mathbf{x})\delta(t)$ definiert ist, bzw. für die Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\Box G = \mu(\mathbf{x}, t)$.

Aufgabe 31. Der Quadrupoltensor (Hausaufgabe, 13 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Quadrupoltensor Q in Kartesischen Koordinaten *spurlos* ist. Wie viele unabhängige Parameter werden benötigt, um die symmetrische spurlose Matrix Q allgemein zu beschreiben?

(b) Wie wird der Quadrupoltensor Q unter Koordinatentransformationen (Translationen) der Form $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' \equiv \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ transformiert? Wie wird Q unter Koordinatentransformationen (Drehungen) der Form $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}$ transformiert?

Betrachten Sie ein geladenes Ellipsoid $\mathcal{D} \equiv \left\{\mathbf{x}\ \middle|\ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1\right\}$ mit drei unterschiedlichen Achsen a_1, a_2 und a_3. Die Gesamtladung des Ellipsoids sei q. Wir betrachten zwei mögliche Verteilungen dieser Gesamtladung über das Ellipsoid.

(c) Zuerst nehmen wir an, dass sich in den sechs Punkten $\mathbf{x} = \pm a_1\hat{\mathbf{e}}_1,\ \pm a_2\hat{\mathbf{e}}_2,\ \pm a_3\hat{\mathbf{e}}_3$ jeweils eine Punktladung $\frac{1}{6}q$ befindet. Berechnen Sie den Quadrupoltensor Q dieser Ladungsverteilung.

(d) Nun nehmen wir an, dass die Ladung homogen über das Ellipsoid $\mathcal{D}$ verteilt ist. Berechnen Sie den Quadrupoltensor Q dieser Ladungsverteilung.

(e) Bestimmen Sie schließlich noch den Quadrupoltensor Q für den Fall, dass die Ladungsverteilung aus (c) um einen Winkel φ um die x_2-Achse gedreht wird.