Übungsaufgaben zur Vorlesung 08.128.121 im WS 17/18

„Theoretische Physik 2, Elektrodynamik“

Prof. Dr. Peter van Dongen

Institut für Physik, KOMET 7, Johannes Gutenberg-Universität

Aufgabenblatt 11, Abgabe: Montag, 22. 01. 2018, 10:15 Uhr

Aufgabe 28. Das relativistische Coulomb-Problem (Präsenzanteil)

Betrachten Sie ein relativistisches geladenes Teilchen (Ruhemasse m_0, Ladung q), das sich im Coulomb-Feld einer unbeweglichen Ladung q_0 befindet. Die Lagrange-Funktion des Teilchens lautet:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c}\right)^2} + \frac{a}{x} \quad , \quad a \equiv -\frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0} \ .$$

Wir definieren den Parameter $\bar{a} \equiv \frac{a}{|\mathbf{L}|c}$, wobei $\mathbf{L}$ den (erhaltenen) Drehimpuls des Teilchens darstellt. In der Vorlesung wurde die Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichung für den Fall attraktiver Coulomb-Wechselwirkung ($\bar{a} > 0$) diskutiert. Man findet, dass das Teilchen für Parameterwerte $\bar{a} \geq 1$ in das Anziehungszentrum hinabstürzt, falls für die Gesamtenergie $\mathcal{E}_g$ des Teilchens entweder $\mathcal{E}_g < m_0 c^2$ oder alternativ $\mathcal{E}_g \geq m_0 c^2$ und zusätzlich $\dot{x}(0) < 0$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass die Zeit, die das geladene Teilchen für $\bar{a} \geq 1$ benötigt, um in den Kern hinabzustürzen, *endlich* ist.

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen nun für den Fall *repulsiver* Coulomb-Wechselwirkung ($\bar{a} < 0$). Bestimmen Sie insbesondere den Ablenkungswinkel eines Teilchens, das aus dem Unendlichen eintrifft und an der abstoßenden Ladung q_0 gestreut wird.

Aufgabe 29. Der relativistische harmonische Oszillator (Hausaufgabe, 12 Punkte + 5 Bonuspunkte)

Die relativistische Variante des harmonischen Oszillators wird durch die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = -m_0 \omega^2 \mathbf{x} \quad , \quad \boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

beschrieben und ließe sich in der Elektrodynamik mit Hilfe von Potentialen $q\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} m_0 \omega^2 \mathbf{x}^2$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ realisieren.

(a) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\mathbf{L}$ und die Gesamtenergie $\mathcal{E}_g$ des harmonischen Oszillators erhalten sind.

Wählen Sie den Drehimpuls in $\hat{\mathbf{e}}_3$-Richtung und beschreiben Sie die Bewegung in der (x_1, x_2)-Ebene mit Hilfe von Polarkoordinaten (x, φ).

(b) Bestimmen Sie die kanonisch zu (x, φ) konjugierten Impulse π_x und π_φ und leiten Sie aus dem Energieerhaltungssatz eine Beziehung zwischen π_x und x her.

(c) Zeigen Sie, dass die Variablen $x(t)$ und $\varphi(t)$ Bewegungsgleichungen der Form

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = f(x) \quad , \quad \dot{\varphi} = g(x)$$

erfüllen und bestimmen Sie $f(x)$ und $g(x)$ explizit. Wie könnte man $x(t)$ und $\varphi(t)$ im Prinzip – eventuell mit Hilfe von numerischen Methoden – aus diesen Bewegungsgleichungen bestimmen? Zeigen Sie, dass man die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Variablen $\xi \equiv \frac{m_0 c x}{L}$ und $\tau \equiv \omega t$ und der Parameter $\eta \equiv \frac{\mathcal{E}_g}{m_0 c^2}$ und $\lambda \equiv \frac{\omega L}{m_0 c^2}$ auch dimensionslos darstellen kann.

(d) **5 Bonuspunkte:** Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $\xi(\varphi)$ numerisch für den Fall $\lambda^2 = 2\eta$ mit $\eta = 4$. Sind die Bahnen geschlossen? Bestimmen Sie $\xi(\tau)$ und $\varphi(\tau)$.