Übungsaufgaben zur Vorlesung 08.128.121 im WS 17/18
„Theoretische Physik 2, Elektrodynamik“
Prof. Dr. Peter van Dongen
Institut für Physik, KOMET 7

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 10, Abgabe: Montag, 15.01.2018, 10:15 Uhr

Aufgabe 26. Alternative Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld (Präsenzanteil)

Betrachten Sie die Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_1 = -\tfrac{1}{4}\varepsilon_0 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{c}j_\mu A^\mu$$

für das elektromagnetische Feld in Wechselwirkung mit (fest vorgegebenen) Ladungen und Strömen.

(a) Ist $\mathcal{L}_1$ Lorentz-invariant? Ist sie eichinvariant?

Betrachten Sie nun die alternative Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_2 = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - \tfrac{1}{c}j_\mu A^\mu .$$

(b) Ist $\mathcal{L}_2$ Lorentz-invariant? Ist sie eichinvariant? Bestimmen Sie die zu $\mathcal{L}_2$ gehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen. Sind sie (bzw. unter welchen Bedingungen sind sie) die Maxwell-Gleichungen?

(c) Zeigen Sie explizit, dass $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$ unter gewissen Bedingungen (welchen Bedingungen?) als 4-Divergenz geschrieben werden kann. Ändert diese zusätzliche 4-Divergenz die Wirkung oder die Euler-Lagrange-Gleichungen?

Aufgabe 27. Energie und Impuls des Strahlungsfeldes im Vakuum (Hausaufgabe, 12 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Wir betrachten ein elektromagnetisches Feld A^μ in einem Raumbereich $\mathcal{D}$ ohne äußere Quellen (d. h. mit $j^\mu = 0$). Es gilt wie üblich $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ und $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$. Der Raumbereich $\mathcal{D}$ soll *endlich* sein, aber so groß, dass die Felder $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \Phi)$ auf seinem Rand $\partial\mathcal{D}$ stets null sind.

(a) Zeigen Sie, dass man die Eichung so wählen kann, dass $\Phi = 0$, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$ gilt, und dass die Energie $\mathcal{E}_\mathrm{F}$ und der Impuls $\mathbf{P}_\mathrm{F}$ des Feldes im Raumbereich $\mathcal{D}$ dann die folgende Form besitzen:

$$\mathcal{E}_\mathrm{F} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 + c^2(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})^2\right] \; , \; \mathbf{P}_\mathrm{F} = -\varepsilon_0 \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}\, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) \; .$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $\mathcal{D}$ würfelförmig mit Volumen $V = L^3$ ist und dass das Vektorpotential $\mathbf{A}$ in $\mathcal{D}$ periodische Randbedingungen erfüllt: $\mathbf{A}(\mathbf{x} + L\hat{\mathbf{e}}_\ell) = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ für $\ell = 1, 2, 3$.

(b) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Wellengleichung $\Box\mathbf{A} = 0$ mit $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$ durch die Fourier-Reihe

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{V}}\sum_{\mathbf{k}\alpha}\left(c_{\mathbf{k}\alpha}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + c^*_{\mathbf{k}\alpha}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathbf{k}\alpha)}$$

dargestellt werden kann. Hierbei sind $c_{\mathbf{k}\alpha}$ die Fourier-Koeffizienten dieser Entwicklung, die $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathbf{k}\alpha)}$ (mit $\alpha = 1, 2$) werden als *Polarisationsvektoren* bezeichnet, und es gilt

$$\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}| \quad , \quad \mathbf{k} = \tfrac{2\pi}{L}\mathbf{n} \quad (\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^3)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathbf{k}\ell)} = \varepsilon_{\ell mn}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathbf{k}m)}\times\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathbf{k}n)} \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathbf{k}3)} \equiv \mathbf{k}/k = \hat{\mathbf{k}}\ .$$

(c) Zeigen Sie:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{F}} = \tfrac{2}{c^2}\sum_{\mathbf{k}\alpha}\omega^2_{\mathbf{k}}|c_{\mathbf{k}\alpha}|^2\ . \tag{1}$$

(d) (**3 Bonuspunkte**) Zeigen Sie:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{F}} = \tfrac{2}{c}\sum_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}|c_{\mathbf{k}\alpha}|^2\ . \tag{2}$$

Bemerkung: Die Ergebnisse (1) und (2) sind sehr wichtig; sie bilden den Startpunkt für die Quantisierung des Strahlungsfeldes.