Übungsaufgaben zur Vorlesung 08.128.121 im WS 17/18
„Theoretische Physik 2, Elektrodynamik“
Prof. Dr. Peter van Dongen
Institut für Physik, KOMET 7

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 08, Abgabe: Montag, 18.12.2017, 10:15 Uhr

Aufgabe 22. Der relativistische Würfel (Präsenzanteil)

Wir betrachten zwei Inertialsysteme K und K', die sich mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$ relativ zueinander bewegen und nehmen an, dass die Koordinatenursprünge beider Systeme zur Zeit $t = t' = 0$ koinzidieren und dass die Lorentz-Transformation, die die Koordinatensysteme verbindet, ein reiner Boost sei. Die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ zeige in $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_2'$-Richtung. Im Inertialsystem K' ruht ein Würfel mit der Seitenlänge a; seine Koordinaten sind $\left\{\mathbf{x}' \middle| \, |x_i'| \leq \frac{1}{2}a, \ i = 1, 2, 3\right\}$.
Wir betrachten diesen Würfel nun aus der Sicht von K. Misst man die Koordinaten des Würfels in K alle *gleichzeitig*, so würde man bekanntlich keinen Würfel, sondern einen Quader finden, der in $\hat{\mathbf{e}}_1$- und $\hat{\mathbf{e}}_3$-Richtung die Länge a und in $\hat{\mathbf{e}}_2$-Richtung die Länge a/γ mit $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ und $\beta = \frac{v}{c}$ hat (Lorentz-Kontraktion).
Betrachtet ein in K ruhender Beobachter den Würfel jedoch mit bloßem Auge, oder macht er ein Foto, so würde er etwas anderes sehen, da die Lichtsignale, die das Auge oder die Kamera zur Zeit t empfängt, zu *unterschiedlichen* Zeiten durch die verschiedenen Punkte der Würfeloberfläche ausgestrahlt wurden. Um das optische Bild des Würfels zu bestimmen, führen wir ein Gedankenexperiment durch und platzieren eine auf den Ursprung von K gerichtete Kamera im Punkte $\mathbf{x}_L \equiv (L, 0, 0)$. Wir nehmen an, dass der Körper des Würfels transparent ist und markieren die Eckpunkte, die Kanten und die Flächen mit vielen kleinen Lämpchen, so dass ein Beobachter in $\mathbf{x}_L$ alle 6 Flächen deutlich sehen kann.

(a) Zeigen Sie, dass das Lichtsignal, das ein Beobachter in $\mathbf{x}_L$ zur Zeit t (gemessen in K-Zeit) vom Punkte $\mathbf{x}_P' = (x_1', x_2', x_3')$ der Würfeloberfläche in K' erhält, aus seiner Sicht zur Zeit t_P am Ort $\mathbf{x}_P = (x_1', \frac{1}{\gamma}x_2' + vt_P, x_3')$ in K entstand, wobei t_P und $\mathbf{x}_P$ durch $c(t - t_P) = |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_L|$ verknüpft sind.

Zur Zeit $t = L/c$ wird ein Foto gemacht. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $L \gg a$ gilt; dies vereinfacht die Berechnung enorm.

(b) Beschreiben Sie quantitativ, welche Würfelform auf dem Foto zu sehen ist und skizzieren Sie sie. Berechnen Sie insbesondere den Winkel zwischen den Seitenwänden des Würfels und der Blickrichtung im optischen Bild. Zeigen Sie, dass das optische Bild nicht von demjenigen eines Würfels mit der Seitenlänge a, der um den Winkel $\arcsin(\beta)$ um die $\hat{\mathbf{e}}_3$-Achse durch den Würfelmittelpunkt gedreht ist, unterschieden werden kann.

Aufgrund des ersten Versuchs erhält man optisch den Eindruck, dass man die Lorentz-Kontraktion des Würfels auf einem zur Zeit $t = 0$ gemachten Foto hätte sehen können. (Warum?) Wir wiederholen also das Gedankenexperiment und drücken nun bereits zur Zeit $t = 0$ ab. Nach wie vor gilt $L \gg a$.

(c) Beschreiben Sie quantitativ, an welcher Stelle und mit welcher Form die Kamera den Würfel sieht; machen Sie eine Skizze. Bestimmen Sie insbesondere die scheinbare Breite des Würfels im optischen Bild der Kamera am Ort $\mathbf{x}_L$.

Aufgabe 23. Parallele E- und B-Felder (Hausaufgabe, 12 Punkte)

Wir führen eine Lorentz-Transformation $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ von einem Inertialsystem K zu einem anderen Inertialsystem K' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$ durch.

(a) Nehmen wir zuerst an, dass in K gilt: $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$. Für welche $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ gilt dann in $K' : \mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}'$?

(b) Nehmen wir nun an, dass in K nicht gilt: $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$. Geben Sie explizit ein $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ an, so dass in K' gilt: $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}'$. Bestimmen Sie $\beta = |\mathbf{v}|/c$ insbesondere für die Spezialfälle $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ und $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$. Was passiert, falls sowohl $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ als auch $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$ gilt?