Übungsaufgaben zur Vorlesung 08.128.121 im WS 17/18
„Theoretische Physik 2, Elektrodynamik“
Prof. Dr. Peter van Dongen
Institut für Physik, KOMET 7

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 07, Abgabe: Montag, 11.12.2017, 10:15 Uhr

Aufgabe 19. Relativistisches Teilchen im elektrischen Feld (Präsenzanteil)

Wir betrachten ein Teilchen der Ruhemasse m_0 und der Ladung q in einem räumlich homogenen, zeitunabhängigen elektrischen Feld $\mathbf{E}$. Der kinetische Impuls $\boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u}$ und die Energie $\mathcal{E} = \gamma_u m_0 c^2$ des Teilchens erfüllen die Bewegungsgleichungen $\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q\mathbf{E}$ und $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}$. Lösen Sie diese Bewegungsgleichungen für eine allgemeine Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{u}(0) \equiv \mathbf{u}_0$ zur Zeit $t = 0$. Wir nehmen an, dass das Teilchen sich zur Zeit $t = 0$ im Ursprung befindet: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, und definieren $x_\parallel \equiv \mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{E}}$, $\pi_{0\parallel} \equiv \boldsymbol{\pi}(0)\cdot\hat{\mathbf{E}}$, $\boldsymbol{\pi}_{0\perp} = \boldsymbol{\pi}(0) - \pi_{0\parallel}\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{0\perp} \equiv \boldsymbol{\pi}_{0\perp}/|\boldsymbol{\pi}_{0\perp}|$ und $x_\perp \equiv \mathbf{x}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}_{0\perp}$. Berechnen Sie $\mathbf{x}(t)$ und $\mathcal{E}(t)$ und zeigen Sie insbesondere für den Spezialfall $\pi_{0\parallel} = 0$:

$$x_\parallel(t) = \frac{m_0 c^2}{qE}\sqrt{1 + \left(\frac{\boldsymbol{\pi}_{0\perp}}{m_0 c}\right)^2}\left[\cosh\left(\frac{qEx_\perp}{|\boldsymbol{\pi}_{0\perp}|c}\right) - 1\right] .$$

Vergleichen Sie die Bahnformen relativistischer und nicht-relativistischer Teilchen für diesen Spezialfall.

Aufgabe 20. Der Levi-Civita-Tensor (Hausaufgabe, 8 Punkte)

Wir betrachten den vollständig antisymmetrischen Tensor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ in vier Dimensionen ($\mu,\nu,\rho,\sigma \in \{0,1,2,3\}$):

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} \mathrm{sgn}(P), & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) = (P0,\ P1,\ P2,\ P3) \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei P eine Permutation der Zahlen $\{0,1,2,3\}$ darstellt.

(a) Bestimmen Sie $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.

(b) Bestimmen Sie die Stufe der Tensoren $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^{\varphi\xi\psi\zeta}$. Sind sie vollständig antisymmetrisch? Sind sie echte oder Pseudotensoren?

(c) Zeigen Sie: $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24$ und außerdem

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} = -6\delta^\mu{}_\alpha \quad , \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2\begin{vmatrix} \delta^\mu{}_\alpha & \delta^\mu{}_\beta \\ \delta^\nu{}_\alpha & \delta^\nu{}_\beta \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\begin{vmatrix} \delta^\mu{}_\alpha & \delta^\mu{}_\beta & \delta^\mu{}_\gamma \\ \delta^\nu{}_\alpha & \delta^\nu{}_\beta & \delta^\nu{}_\gamma \\ \delta^\rho{}_\alpha & \delta^\rho{}_\beta & \delta^\rho{}_\gamma \end{vmatrix} \quad , \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\begin{vmatrix} \delta^\mu{}_\alpha & \delta^\mu{}_\beta & \delta^\mu{}_\gamma & \delta^\mu{}_\delta \\ \delta^\nu{}_\alpha & \delta^\nu{}_\beta & \delta^\nu{}_\gamma & \delta^\nu{}_\delta \\ \delta^\rho{}_\alpha & \delta^\rho{}_\beta & \delta^\rho{}_\gamma & \delta^\rho{}_\delta \\ \delta^\sigma{}_\alpha & \delta^\sigma{}_\beta & \delta^\sigma{}_\gamma & \delta^\sigma{}_\delta \end{vmatrix} .$$

Sind die linken Glieder dieser fünf Gleichungen echte oder Pseudotensoren?

(d) Zeigen Sie: $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta = -24\det(\Lambda)$.

Wir definieren die zu a^σ, $a^{\rho\sigma}$ und $a^{\nu\rho\sigma}$ dualen Tensoren $\tilde{a}^{\mu\nu\rho}$, $\tilde{a}^{\mu\nu}$ und $\tilde{a}^\mu$ durch:

$$\tilde{a}^{\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}a_\sigma \quad , \quad \tilde{a}^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}a_{\rho\sigma} \quad , \quad \tilde{a}^\mu = \tfrac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}a_{\nu\rho\sigma} .$$

Hierbei sind die Tensoren $a^{\rho\sigma}$ und $a^{\nu\rho\sigma}$ antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Indizes.

(e) Bestimmen Sie die zu $\tilde{a}^{\mu\nu\rho}$, $\tilde{a}^{\mu\nu}$ und $\tilde{a}^\mu$ dualen Tensoren.

Aufgabe 21. Relativistisches Teilchen im Magnetfeld (Hausaufgabe, 4 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Ruhemasse m_0 und der Ladung q in einem räumlich homogenen, zeitunabhängigen Magnetfeld $\mathbf{B}$. Der kinetische Impuls $\boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u}$ und die Energie $\mathcal{E} = \gamma_u m_0 c^2$ des Teilchens erfüllen die Bewegungsgleichungen $\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ und $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$. Die Anfangsbedingung lautet $\mathbf{u}(0) \equiv \mathbf{u}_0$ und $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie $\mathbf{x}(t)$.