Übungsaufgaben zur Vorlesung 08.128.121 im WS 17/18
„Theoretische Physik 2, Elektrodynamik“
Prof. Dr. Peter van Dongen
Institut für Physik, KOMET 7

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 06, Abgabe: Montag, 04.12.2017, 10:15 Uhr

Aufgabe 16. Antisymmetrische Tensoren 2. Stufe (Präsenzanteil)

(a) Zeigen Sie, dass ein beliebiger, antisymmetrischer Lorentz-Tensor 2. Stufe in der Form

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

darstellbar ist, wobei $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ein polarer (echter) und $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ein axialer Vektor (Pseudovektor) bezüglich dreidimensionaler orthogonaler Transformationen (also bezüglich Drehungen und Raumspiegelungen) ist. **Hinweis:** Untersuchen Sie das Transformationsverhalten von $A^{\mu\nu}$ unter Lorentz-Transformationen der Form

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathcal{O} \end{pmatrix} ,$$

wobei $\mathcal{O}$ eine dreidimensionale orthogonale Transformation ist: $\mathcal{O}^{\mathrm{T}}\mathcal{O} = \mathbb{1}_3$.

(b) Bestimmen Sie die explizite Form des zu $A^{\mu\nu}$ dualen Tensors $\tilde{A}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma}$.

Aufgabe 17. Die Photonenrakete (8 Punkte)

Wir betrachten eine Rakete, die sich geradlinig bewegt und durch Photonenausstoß angetrieben wird: Strahlt die Rakete Photonen (und somit Masse und Energie und Impuls) in der Rückwärtsrichtung aus, so erfährt sie nach dem Impulserhaltungssatz eine Kraft nach vorne. Wir nehmen an, dass der Antriebsmechanismus der Rakete imstande ist, Masse vollständig in Strahlung (Photonen) umzusetzen, und bezeichnen die (zeitabhängige) Masse der Rakete, gemessen in ihrem momentanen Ruhesystem, als M. Zur Zeit $t = 0$ möge die Rakete im Inertialsystem K ruhen, ihre Masse zu diesem Zeitpunkt sei M_0.

(a) Zeigen Sie:

$$\frac{dM}{d\beta} = -\gamma^2 M \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

wobei v die Geschwindigkeit der Rakete im Inertialsystem K ist, und bestimmen Sie $M(\beta)$ aus dieser Gleichung. **Hinweis:** Verwenden Sie bei Bedarf Aufgabe 15 (a).

Nehmen wir nun an, die Rakete soll eine Raumkapsel mit einem Ruhegewicht von 20 Tonnen von der Erde nach α Centauri hin- und hertransportieren, und zwar so, dass sie sowohl auf der Hin- als auch auf der Rückreise eine Maximalgeschwindigkeit von 0,8 c erreicht. Einfachheitshalber vernachlässigen wir die Effekte der Schwerkraft nahe der Erde und α Centauri.

(b) Bestimmen Sie das hierzu erforderliche Minimalgewicht M_0 der Rakete beim Start.

Wir betrachten wieder das allgemeine, in (a) untersuchte Problem und nehmen zusätzlich an, der Antrieb der Rakete funktioniere so, dass die in Photonen umgesetzte Masse (gemessen im momentanen Ruhesystem der Rakete) stets proportional zu M ist.

(c) Bestimmen Sie $\beta(t)$ und die Eigenzeit $\tau(t)$ der Rakete; hierbei bezeichnet t die Zeit in K.

Nehmen wir nun alternativ an, der Antrieb funktioniere so, dass die in Photonen umgesetzte Masse pro Zeiteinheit (gemessen im momentanen Ruhesystem der Rakete) konstant ist.

(d) Bestimmen Sie die funktionale Beziehung zwischen β und t in diesem Fall und skizzieren Sie sie.

Aufgabe 18. Transformationsverhalten des B-Felds unter Lorentz-Boosts (5 Punkte)

Zeigen Sie aus dem bekannten Transformationsverhalten des elektromagnetischen Feldtensors, $(F')^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}$, und der Form

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbb{1}_3 + (\gamma-1)\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}$$

der Geschwindigkeitstransformation, dass das Magnetfeld $\mathbf{B}$ unter boosts wie folgt transformiert wird:

$$\mathbf{B}' = \gamma\left(\mathbf{B} - \tfrac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}\right) - (\gamma-1)(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{B})\hat{\boldsymbol{\beta}}\ .$$