**Übungsaufgaben zur Vorlesung 08.128.121 im WS 17/18**

**„Theoretische Physik 2, Elektrodynamik“**

**Prof. Dr. Peter van Dongen**

**Institut für Physik, KOMET 7**

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 05, Abgabe: Montag, 27.11.2017, 10:15 Uhr

**Aufgabe 14. Eine Spritztour durch die Milchstraße** (Präsenzaufgabe)

Eine Astronautin befindet sich in der Nähe unserer Sonne in einer Rakete, die sich geradlinig in $\hat{\boldsymbol{\beta}}$-Richtung durch die Milchstraße bewegt. Anfangs ist ihre Geschwindigkeit sehr niedrig (auf jeden Fall nicht-relativistisch) im Vergleich zu den benachbarten Sternen. Die Astronautin schaut aus dem Fenster, sieht den Polarstern ($\alpha$ Ursae Minoris) unter einem Winkel von 45° zu ihrer Flugrichtung und untersucht insbesondere die Absorptionslinie von Eisen (bei etwa 5300 Å) in dessen Spektrum. Dann beschleunigt sie, zuerst auf 0,3 $c$, danach auf 0,6 $c$ und noch etwas später auf 0,9 $c$, schließlich sogar auf 0,99 $c$. Diese letzte Geschwindigkeit behält sie dann auch bei.

(a) Unter welchem Winkel zu ihrer Flugrichtung sieht die Astronautin jeweils den Polarstern? Bei welcher Wellenlänge sieht sie die Absorptionslinie von Eisen?

Sie fliegt an einem (in seinem Ruhesystem) sphärischen Planeten vorbei, der (in seinem Ruhesystem) einen Durchmesser von $10^7$ m hat.

(b) Beschreiben Sie die Resultate ihrer Längenmessungen an diesem Planeten.

Sie nähert sich einer kosmischen Ampel, die im Inertialsystem der Fixsterne ruht und dort auf Rot (6500 Å) steht.

(c) Auf welche Geschwindigkeit muss die Astronautin abbremsen, damit sie grünes Licht (5300 Å) für ihren Weiterflug erhält?

Nach der Ampel beschleunigt die Astronautin wieder auf 0,99 c und sieht dann plötzlich eine zweite Ampel strikt rechts von ihr (also unter einem Winkel von 90° zu ihrer Flugrichtung). Auch diese zweite Ampel ruht im Inertialsystem der Fixsterne und steht dort auf Rot.

(d) Welche Farbe hat die Ampel laut der Astronautin?

**Aufgabe 15. Über hyperbolische Bewegung und zwei Bärte** (Hausaufgabe, 12 Punkte)

Betrachten Sie zwei Inertialsysteme $K$ und $K'$, wobei $K'$ die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zu $K$ hat. Wir wählen die $x_1$- und $x_1'$-Achsen von $K$ und $K'$ parallel zur Geschwindigkeit: $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1' = \hat{\mathbf{v}}$.

(a) Leiten Sie aus dem relativistischen Transformationsgesetz für Geschwindigkeiten das folgende Transformationsgesetz für Beschleunigungen ab:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x_1'}{(dt')^2} \Bigg/ \left[\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dx_1'}{dt'}\right)\right]^3 \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} \, .$$

Wir betrachten nun einen Körper, der zur Zeit $t = 0$ im Ursprung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Inertialsystems $K$ ruht. Für $t \geq 0$ wird der Körper beschleunigt in $\hat{\mathbf{e}}_1$-Richtung; die Größe der Beschleunigung ist hierbei konstant (und gleich $a$) im jeweiligen Ruhesystem des Körpers.

(b) Zeigen Sie, dass die dimensionslose Geschwindigkeit $\beta = \frac{dx_1}{d(ct)}$ des Körpers die Gleichung $\frac{d\beta}{dt} = \frac{a}{c}(1-\beta^2)^{3/2}$ erfüllt, und leiten Sie hieraus für die $x_1$-Koordinate und die Eigenzeit des Körpers ab:

$$\beta(t) = \left[1 + \left(\frac{c}{at}\right)^2\right]^{-1/2} \quad , \quad x_1(t) = \sqrt{c^2t^2 + \frac{c^4}{a^2}} - \frac{c^2}{a} \quad , \quad \tau(t) = \frac{c}{a}\,\mathrm{arsinh}\left(\frac{at}{c}\right) \ .$$

Erklären Sie den Namen „hyperbolische Bewegung“.

Als Anwendung betrachten wir Einsteins Theorem über das Zurückbleiben beschleunigter Uhren („Zwillingsparadoxon“): Zwei (männliche) Zwillinge trennen sich zur Zeit $t = 0$; der eine verbringt seine Zeit ruhend im Ursprung des Inertialsystems $K$, der andere fliegt mit einer Rakete zu einem (einen Abstand $L$ entfernten) Stern hin und her, wobei die (in seinem jeweiligen Ruhesystem gemessene) Beschleunigung betragsmäßig stets konstant ist (das erste und letzte Viertel der Reise sei die Beschleunigung $+a$, das zweite und dritte Viertel $-a$).

(c) Um wieviel jünger ist der Astronaut als sein Bruder, wenn er am Ende seiner Reise an den Ursprung zurückkehrt?

Nehmen wir an, der Ursprung $\mathbf{0}$ entspricht der Erde, die Beschleunigung sei $a = g \simeq 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2$ und der Stern sei $\alpha$ Centauri, so dass $L \simeq 4{,}3$ Lichtjahre gilt. Nehmen wir des Weiteren an, die Zwillinge sind zur Zeit $t = 0$ wohlrasiert und lassen ab der Trennung ihre Bärte wachsen (mit einer Wachstumsgeschwindigkeit von 2 cm/Monat, wobei Länge und Zeit in ihrem jeweiligen Ruhesystem gemessen werden).

(d) Wieviel länger ist der Bart des zurückgebliebenen Zwillings als derjenige seines Bruders bei dessen Rückkehr (gemessen im Inertialsystem $K$)?