Übungsaufgaben zur Vorlesung 08.128.121 im WS 17/18
„Theoretische Physik 2, Elektrodynamik“
Prof. Dr. Peter van Dongen
Institut für Physik, KOMET 7

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 03, Abgabe: Montag, 13.11.2017, 10:15 Uhr

Aufgabe 8. Energie und Eindeutigkeit (Präsenzanteil)

In der Elektrodynamik ist es natürlich von großem Interesse, die im elektromagnetischen Feld enthaltene Energie zu kennen. Außerdem ist die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit der Maxwell-Gleichungen, die man ja physikalisch erwarten würde, von Interesse. In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass beide auf den ersten Blick so unterschiedlichen Fragestellungen eng miteinander verknüpft sind. Wie üblich nehmen wir an, dass $\rho(\mathbf{x},t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ schnell genug gegen Null gehen für $|\mathbf{x}| \to \infty$. Alle Integrationen $\int d\mathbf{x}$ erfolgen über den ganzen dreidimensionalen Ortsraum. Wir gehen von der Coulomb- Eichung aus: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$.

(a) Interpretieren Sie die Größe $-\int d\mathbf{x}\, \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ physikalisch.

(b) Zeigen Sie:

$$-\int d\mathbf{x}\, \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{dE}{dt}\ , \quad E(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d\mathbf{x}\, \left\{ (\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 + \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)^2 + c^2 (\boldsymbol{\nabla} A_i)^2 \right] \right\} .$$

Warum kann man $E(t)$ als die im elektromagnetischen Feld enthaltene Energie auffassen?

(c) Zeigen Sie, dass $E(t)$ in (b) auch als $\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d\mathbf{x}\, (\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2)$ darstellbar ist.

Betrachten Sie nun die Maxwell-Gleichungen für Φ und $\boldsymbol{A}$ mit vorgegebenen Ladungs- und Stromdichten $\rho(\mathbf{x},t)$ bzw. $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ und einer Anfangsbedingung $\mathbf{A}(\mathbf{x},t_0)$, $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x},t_0)$, die mit der Coulomb-Eichung kompatibel ist. Aus Aufgabe 6 wissen wir bereits, dass das skalare Potential Φ eindeutig durch die Ladungsdichte ρ bestimmt wird. Nehmen wir nun an, es gäbe zwei unterschiedliche Lösungen $(\Phi, \mathbf{A}_1)$ und $(\Phi, \mathbf{A}_2)$ der Maxwell-Gleichungen.

(d) Zeigen Sie, dass die Differenzlösung $(0, \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)$ eine vereinfachte Form der Maxwell-Gleichungen erfüllt, und bestimmen Sie die Energie $E(t)$ dieser Differenzlösung. Schließen Sie aus dem Resultat, dass unbedingt $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$ gelten muss, und folgern Sie hieraus, dass die Lösung der Maxwell-Gleichungen eindeutig ist.

Aufgabe 9. Elektrostatik (5 Punkte)

Das skalare Potential $\Phi(\mathbf{x})$ in der Elektrostatik ist in der Coulomb-Eichung bekanntlich durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}'\, \frac{\rho(\mathbf{x}')}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

gegeben. Hierbei stellt ρ die Ladungsdichte dar.

(a) Zeigen Sie, dass für $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$:

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{x}\left\{1 + \frac{\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}'}{x} + \frac{1}{2x^2}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\left[3\mathbf{x}'(\mathbf{x}')^{\mathrm{T}} - (x')^2\mathbb{1}\right]\hat{\mathbf{x}} + \dots\right\}$$

gilt, wobei $\mathbf{x}'(\mathbf{x}')^{\mathrm{T}}$ als Dyade zu interpretieren ist.

Wir betrachten nun eine Gesamtladung $q \neq 0$ in einem begrenzten Raumbereich nahe dem Ursprung.

(b) Bestimmen Sie $\Phi(\mathbf{x})$ für $x \to \infty$ bis einschließlich $\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Werten Sie das Ergebnis explizit aus für einen dünnen, homogen geladenen Stab $(-a < x_1 < a)$ und einen homogen geladenen Kubus $(-a < x_i < a\,, \quad i = 1, 2, 3)$.

Aufgabe 10. Die ein- und die zweidimensionale Elektrodynamik (Hausaufgabe, 7 Punkte)

Betrachten Sie die Maxwell-Gleichungen im Vakuum für ein dreidimensionales System, das translationsinvariant in den x_2- und x_3-Richtungen und invariant gegenüber Spiegelungen an der x_1-Achse ist: $\rho = \rho(x_1, t)\,,\ \mathbf{j} = j(x_1, t)\hat{\mathbf{e}}_1$. Sie dürfen annehmen, dass in diesem System Ladungsneutralität gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, \rho(x_1, t) = 0\,.$

(a) Lösen Sie die Maxwell-Gleichungen mit Hilfe eines Ansatzes der Form $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E(x_1, t)\hat{\mathbf{e}}_1\,,\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ und bestimmen Sie die Stromdichte $j(x_1, t)$, ausgedrückt mit Hilfe der Ladungsdichte $\rho(x_1, t)$.

Betrachten Sie nun das analoge Problem eines Systems, das lediglich translationsinvariant in x_3-Richtung und invariant gegenüber Spiegelungen an der (x_1, x_2)-Ebene ist: $\rho = \rho(\mathbf{x}_\parallel, t)$, $\mathbf{j} = j_1(\mathbf{x}_\parallel, t)\hat{\mathbf{e}}_1 + j_2(\mathbf{x}_\parallel, t)\hat{\mathbf{e}}_2$ mit $\mathbf{x}_\parallel \equiv (x_1, x_2)$. Wir machen nun einen Ansatz der Form $\Phi = \Phi(\mathbf{x}_\parallel, t)$ für das skalare Potential bzw. $\mathbf{A} = A_1(\mathbf{x}_\parallel, t)\hat{\mathbf{e}}_1 + A_2(\mathbf{x}_\parallel, t)\hat{\mathbf{e}}_2$ für das Vektorpotential und wählen die Coulomb-Eichung $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$. Es gilt Ladungsneutralität: $\int d\mathbf{x}_\parallel\, \rho(\mathbf{x}_\parallel, t) = 0\,.$

(b) Zeigen Sie:

$$\Phi(\mathbf{x}_\parallel, t) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{x}'_\parallel\, \rho(\mathbf{x}'_\parallel, t) \ln \frac{\xi_0}{|\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel|} \qquad \text{(Länge } \xi_0 \text{ beliebig)}\ .$$

(c) Ist der obige Ansatz für das Vektorpotential konsistent mit den genannten Invarianzen des Systems? In welche Richtung zeigt das Magnetfeld?