JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 02, Abgabe: Donnerstag, 02.11.2017, 10:15 Uhr

Aufgabe 5. Die Deltafunktion (Präsenzaufgabe)

Die Deltafunktion $\delta(x)$ ist dadurch definiert, dass sie in Integralen, in Kombination mit einer beliebigen, jedoch genügend glatten Funktion $f(x)$, die folgende Wirkung hat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\; f(x)\;\delta(x-a) = f(a) \qquad (a \in \mathbb{R})\ .$$

Insbesondere gilt also $\int dx f(x)\,\delta(x) = f(0)$. Die „Deltafunktion“ ist keine Funktion im üblichen Sinne, sondern eine *verallgemeinerte Funktion* oder *Distribution*. Wie in der Vorlesung gezeigt, kann sie im Limes $n \to \infty$ aus der Funktionenfolge $\Delta_n(x)$ erhalten werden, wobei $\Delta_n(x) \equiv n$ für $|x| \le \frac{1}{2n}$ und $\Delta_n(x) \equiv 0$ für $|x| > \frac{1}{2n}$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass man die Deltafunktion alternativ im Limes $n \to \infty$ aus der Folge $\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}$ erhält.

(b) Beweisen Sie die Eigenschaften:

$$(i)\quad \delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(x) \quad \text{und} \quad (ii) \quad \delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}\ ,$$

wobei angenommen wird, dass $f(x)$ nur einfache Nullstellen x_i hat und an diesen jeweils differenzierbar ist.

Die Verallgemeinerung der Deltafunktion auf beliebige Dimensionen $d = 1, 2, ...$ ist:

$$\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \delta(x_1-a_1)\ldots\delta(x_d-a_d) = \prod_{\ell=1}^{d}\delta(x_\ell - a_\ell)$$

und hat (s. Vorlesung) die Eigenschaft $\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\; f(\mathbf{x})\;\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$.

(c) Beweisen Sie (für $\varepsilon > 0$ und $\lambda \neq 0$) die weiteren Eigenschaften:

$$(i) \quad \int_{\{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|\le\varepsilon\}} d\mathbf{x}\;\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = 1 \quad , \quad (ii) \quad \delta^{(d)}(\lambda\mathbf{x}) = |\lambda|^{-d}\,\delta^{(d)}(\mathbf{x})\ .$$

(d) Zeigen Sie außerdem für eine nicht-singuläre Matrix A:

$$\delta(A\mathbf{x}+\mathbf{b}) = \frac{1}{|\det(A)|}\,\delta(\mathbf{x}+A^{-1}\mathbf{b}) \quad .$$

Aufgabe 6. Die Grundlösung der Laplace-Gleichung (Hausaufgabe, 7 Punkte)

Die Grundlösung der Laplace-Gleichung ist die Lösung der Gleichung

$$\Delta U(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \qquad\qquad (\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d)\ , \tag{1}$$

wobei $\Delta = \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2}$ den d-dimensionalen Laplace-Operator bezeichnet. Hier beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Fall ($d = 3$) und nehmen an, dass $U(\mathbf{x})$ die Randbedingung $U \to 0$ für $|\mathbf{x}| \to \infty$ erfüllt. Aufgrund der sphärischen Symmetrie des Problems beschränken wir uns des Weiteren auf Lösungen der Form $U(\mathbf{x}) = u(x)$ mit $x \equiv |\mathbf{x}|$.

(a) Leiten Sie aus (1) eine gewöhnliche Differentialgleichung für $u(x)$ her. Zeigen Sie, dass die Lösung die Form $u(x) = A\frac{1}{x}$ hat.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, dass $A = \frac{1}{4\pi}$ und somit $\Delta(-\frac{1}{4\pi x}) = \delta(\mathbf{x})$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{x}' \, \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

eine Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{x}, t)$ zu der Randbedingung $\Phi(\mathbf{x}, t) \to 0$ für $|\mathbf{x}| \to \infty$ ist.

(d) Nehmen wir nun an, es gäbe eine weitere Lösung $\Phi_2 \neq \Phi_1$ der Poisson-Gleichung zur Randbedingung $\Phi(\mathbf{x}, t) \to 0$ für $|\mathbf{x}| \to \infty$. Leiten Sie unter Anwendung des Gauß'schen Satzes auf $\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{2}w^2(\mathbf{x})$ mit $w(\mathbf{x}) = \Phi_2(\mathbf{x}) - \Phi_1(\mathbf{x})$ und $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$ einen Widerspruch her und schließen Sie auf die Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung (zur genannten Randbedingung).

Aufgabe 7. Der Helmholtz'sche Satz (Hausaufgabe, 6 Punkte)

In dieser Aufgabe befassen wir uns mit divergenz- und wirbelfreien Vektorfeldern im $\mathbb{R}^3$ und außerdem mit dem Helmholtz'schen Satz, der besagt, dass ein beliebiges Vektorfeld im dreidimensionalen Raum als Summe eines wirbelfreien und eines divergenzfreien Anteils darstellbar ist. Voraussetzung ist stets, dass die betrachteten Vektorfelder genügend schnell gegen Null gehen für $x \equiv |\mathbf{x}| \to \infty$. Es wird mehrmals die Identität $\Delta(-\frac{1}{4\pi x}) = \delta(\mathbf{x})$ verwendet.

(a) Zeigen Sie für Vektorfelder $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ mit $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\nabla} \times \int d\mathbf{x}' \, \frac{(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \; .$$

(b) Zeigen Sie für Vektorfelder $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ mit $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = -\boldsymbol{\nabla} \int d\mathbf{x}' \, \frac{(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \; .$$

(c) Beweisen Sie als Verallgemeinerung von (a) und (b) den Helmholtz'schen Satz:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = -\boldsymbol{\nabla} \int d\mathbf{x}' \, \frac{(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \boldsymbol{\nabla} \times \int d\mathbf{x}' \, \frac{(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a})(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \; .$$