Übungsaufgaben zur Vorlesung 08.128.121 im WS 17/18
„Theoretische Physik 2, Elektrodynamik“
Prof. Dr. Peter van Dongen
Institut für Physik, KOMET 7

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Aufgabenblatt 01, Abgabe: Montag, 23.10.2017, 10:15 Uhr

Aufgabe 1. Gauß'scher Satz (Präsenzanteil)

Verifizieren Sie den Gauß'schen Satz

$$\int_{\partial\mathcal{D}} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{F} = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}$$

für den Spezialfall $\mathbf{F} = (4x_1x_3,\ -x_2^2,\ x_2x_3)$, wobei $\partial\mathcal{D}$ die Oberfläche des Kubus $\mathcal{D}$, eingeschlossen von den Ebenen $x_i = 0$, $x_i = 1\,(i = 1, 2, 3)$ ist. Der Normalenvektor ist auswärts gerichtet.

Aufgabe 2. Stokes'scher Satz (Präsenzanteil)

Verifizieren Sie den Stokes'schen Satz

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A} = \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{S}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})$$

für den Spezialfall $\mathbf{A} = (2x_1 - x_2,\ -x_2x_3^2,\ -x_2^2x_3)$, wobei $\mathcal{F}$ die obere Hälfte ($x_3 \geq 0$) der Kugeloberfläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (mit auswärts gerichtetem Normalenvektor) und $\partial\mathcal{F}$ der Rand von $\mathcal{F}$ ist. Wie hängt im Allgemeinen die Ausrichtung des Normalenvektors auf der Fläche $\mathcal{F}$ mit dem Umlaufsinn der Kurve $\partial\mathcal{F}$ zusammen?

Aufgabe 3. Exakte Differentiale (Hausaufgabe, 6 Punkte)

Ein auf einem einfach-zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{R}^d$ (also ohne „Löcher“) definiertes Differential $dF = \sum_{\ell=1}^{d} c_\ell(\mathbf{x})dx_\ell$ mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in G$ ist *exakt*, wenn alle $c_\ell(\mathbf{x})$ stetig differenzierbar sind und für alle (ℓ, m):

$$\left(\frac{\partial c_\ell}{\partial x_m}\right)_{\{x_k|k\neq m\}} = \left(\frac{\partial c_m}{\partial x_\ell}\right)_{\{x_k|k\neq \ell\}}$$

gilt, wobei die Bezeichnung $\{x_k|k \neq m\}$ andeutet, dass die entsprechenden Variablen bei der Differentiation nach x_m konstant gehalten werden. Falls dF nicht exakt ist, aber $\gamma(\mathbf{x})dF$ wohl, heißt $\gamma(\mathbf{x})$ ein integrierender Faktor. Man kann leicht zeigen, dass dF dann und nur dann exakt ist, wenn für jeden geschlossenen Integrationsweg $\oint dF = 0$ gilt.

(a) Bestimmen Sie, ob die folgenden Differentiale exakt sind:

1. $dF = \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}dx_2$. Finden Sie ein einfaches Beispiel aus dem Bereich der Magnetostatik, in dem das hier angegebene Vektorfeld $\mathbf{c} = (c_1(\mathbf{x}),\ c_2(\mathbf{x}))$ auftritt.
2. $dF = (x_2 - x_1^2)dx_1 + (x_1 + x_2^2)dx_2$
3. $dF = (2x_2^2 - 3x_1)dx_1 - 4x_1x_2dx_2$.

Bestimmen Sie $F(x_1, x_2)$, falls das Differential exakt ist.

(b) Ist $dF = x_1 dx_1 + \frac{x_1^2}{x_2} dx_2$ exakt? Wenn nicht, bestimmen Sie einen integrierenden Faktor.

(c) Bestimmen Sie den Wert des Wegintegrals

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} (10x_1^4 - 2x_1x_2^3)dx_1 - 3x_1^2x_2^2\, dx_2$$

entlang des Weges $x_1^4 - 6x_1x_2^3 = 4x_2^2$.

Aufgabe 4. Die Lorentz-Kraft (Hausaufgabe, 7 Punkte)

Betrachten Sie ein klassisches, geladenes, nicht-relativistisches Teilchen der Masse m und Ladung q, das sich unter der Einwirkung der Lorentz-Kraft im dreidimensionalen Raum bewegt. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$$

und die Anfangsbedingung ist $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$. Wir nehmen an, dass die elektrischen und magnetischen Felder $\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{B}$ konstant (d. h. zeit- und ortsunabhängig) sind.

(a) Bestimmen Sie $\mathbf{x}(t)$ für den Spezialfall $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbf{x}(t)$ für den Spezialfall $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

(c) Bestimmen Sie $\mathbf{x}(t)$ für den allgemeinen Fall $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ und beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens in Worten.