Johannes Gutenberg Universität Mainz
Institut für Kernphysik

Experimentelle Bestimmung von Quadrupolparametern an der Testquelle des Mainzer Mikrotrons

Bachelorarbeit
im Rahmen des Studiengangs Physik
zur Erlangung des Grades
Bachelor of Science

von

Steffen Heidrich

geboren am 21.03.1988

Erstgutachter	Herr PD Dr. K. Aulenbacher
Betreuer:	Herr Dipl. Ing. I. Alexander
Matrikelnummer	2658622
Arbeit vorgelegt am:	21.05.2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

2 Theoretische Konzepte **3**
2.1 Bewegung von Elektronen im magnetischen Feld 3
2.2 Die Elektronenbahn im Quadrupol 4
2.2.1 Transformationsmatrizen 5
2.3 Strahlverhalten im magnetischen Feld 6
2.3.1 Betatronschwingung 7
2.3.2 Twiss-Parameter und Phasenellipse 7
2.3.3 Strahlquerschnitt 9
2.3.4 Transformation von Twiss-Parametern 10

3 Experimentelle Methoden **13**
3.1 Erzeugung und Flugbahn der Elektronen 14
3.2 Vermessung von Quadrupolmagnetfeldern 14
3.2.1 Aufbau 14
3.2.2 Durchführung 16
3.3 Emittanzmessung an der PKAT 16
3.3.1 Aufbau 17
3.3.2 Durchführung 17
3.4 Widerstandvergleichsmessung 18
3.4.1 Aufbau 18
3.4.2 Durchführung 18

4 Ergebnisse und Auswertung **19**
4.1 Ermittlung der effektiven Länge 19
4.2 Einfluss eines verkippten Aufbaus auf die Messungen 22
4.3 Multipolanteile 22
4.4 Widerstandvergleichsmessung 23
4.5 Ermittlung der Twiss-Parameter 25
4.6 Strahlverlauf und Phasenraumellipsen am Schirm 28

5 Fazit und Ausblick **33**

6 Anhänge **39**
6.1 Information zu den angehängten Mathematikaskripten 39
6.2 Fehlerrechnungen und Graphiken 39

Eidesstattliche Erklärung **43**

1 Einführung

Die Polarisierte-Kanone-Testquelle (PKAT) ist eine baugleiche Variante der im Mainzer Mikrotron (MAMI) verwendeten PKA1 und enthält sowohl die Elektronenquelle, als auch die ersten vier Meter der Strahlführung. Sie dient dazu, Analysen mit dem noch relativ niederenergetischen Elektronenstrahl durchzuführen, ohne den Betrieb der eigentlichen Beschleunigeranlage zu unterbrechen. Die maximale Strahlenergie beträgt 100 keV und ist somit im Vergleich zu den erreichbaren Elektronenenergien des MAMI von bis zu 1,5 GeV gering. Neben der Grundlagenforschung im Bereich der spinpolarisierten Elektronen dient die PKAT auch der Erprobung strahloptischer Komponenten und neuer Konzepte der Strahldiagnose. Damit übernimmt die Anlage eine essentielle Aufgabe im Bereich Forschung und Entwicklung am Institut für Kernphysik. Die PKAT besteht aus knapp 20 Elementen, welche den Elektronenstrahl manipulieren und je nach Aufgabe einzeln eingestellt werden müssen. Zu diesem Zweck sind an entsprechenden Stellen der Anlage Leuchtschirme und Kameras installiert. Entprechen die übermittelten Bilder nicht dem gewünschten Strahlbild, werden die verschiedenen Bauelemente manuell nachgeregelt, was mitunter sehr zeitaufwändig sein kann. Es besteht also Interesse an einem Modell, mit dem es möglich ist, die Auswirkungen der einzelnen Bauelemente bei vorgegebenen Bestromungen vorherzusagen. Hierfür wurden bereits in der Vergangenheit Eingangsemittanzmessungen unter anderem von Karl-Heinz Steffens [4] durchgeführt. Zu dem Zeitpunkt der Messungen gab es noch nicht die Möglichkeit, den Strahl im Ultrahochvakuum mithilfe von Leuchtschirmen zu analysieren, was zu einer langen Strahlführung und somit ungenauen Ergebnissen führte. Genau hier setzt diese Bachelorarbeit an. Das angestrebte Ziel ist, die den Strahl definierenden Eigenschaften, sowie den Einfluss der ersten beiden strahlfokussierenden Quadrupole neu zu bestimmen.

Zunächst muss hierfür das magnetische Feld der Quadrupole vermessen werden. Dabei lassen sich diese nicht aus der Anlage ausbauen, sodass ein baugleicher Quadrupol als Messobjekt dienen soll. Mit dem ermittelten Magnetfeldverlauf werden anschließend die Quadrupolstärken, sowie die effektiven Längen der Quadrupole errechnet. Diese Größen bestimmen den Einfluss, den die Magnete auf den Strahlverlauf haben. Durch vergleichende Emittanzmessungen lassen sich so Rückschlüsse auf die Eigenschaften des Strahls selber ziehen. Dies ist der schwierigste und wertvollste Teil der Arbeit, denn es gilt eine große Datenmenge zu verarbeiten und die dafür notwendigen Programme zu konzipieren. Als Abschluss der Arbeit wird die Phasenellipse an der Position des Schirms, sowie die Strahleinhüllende über den gesamten behandelten Bereich der PKAT visuell dargestellt.

Um Missverständnissen vorzubeugen, findet in der gesamten Arbeit ein einheitliches Koordinatensystem Verwendung. Dabei wird die longitudinale Bewegungsrichtung des Elektronenstrahls immer mit s und die transversalen Abstände von der Sollbahn mit x in horizontaler Richtung, beziehungsweise z in vertikaler Richtung gekennzeichnet.

2 Theoretische Konzepte

Um eine Aussage über das Verhalten eines Elektronenstrahls treffen zu können, müssen zunächst die Eigenschaften des Strahls sowie die auf ihn wirkenden Kräfte mathematisch erfasst werden. Dazu soll als erstes auf das Verhalten einzelner Elektronen und im Anschluss daran auf das kollektive Verhalten aller Elektronen als vereinten Strahl eingegangen werden. Insbesondere wird dabei der Einfluss von Quadrupolen als fokussierende, beziehungsweise defokussierende Elemente behandelt. Der größte Teil des theoretischen Hintergrunds wurde dabei aus der Monographie *Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen* von K. Wille [2] entnommen.

2.1 Bewegung von Elektronen im magnetischen Feld

Bewegt sich ein Ladungsträger der Ladung e und Masse m innerhalb eines magnetischen Feldes B, so wirkt auf ihn die Lorentzkraft F_L.

$$F_L = e\vec{v} \times \vec{B} \tag{2.1}$$

Beziehungsweise komponentenweise aufgeschrieben:

$$F_{L,x} = ev_x B_z \tag{2.2}$$

$$F_{L,z} = ev_z B_x \tag{2.3}$$

F_L befindet sich im Gleichgewicht mit einer entsprechenden Zentripetalkraft F_Z und lenkt das Teilchen auf eine Kreisbahn. Durch Gleichsetzen der beiden Kräfte lässt sich leicht eine Beziehung zwischen dem Magnetfeld und dem Kreisradius R herleiten.

$$F_{L,x} = F_{Z,x} \tag{2.4}$$

$$ev_s B_z(x) = mv_s^2/R_x \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{e}{p} B_z(x) \tag{2.6}$$

Die Rechnung für die z-Richtung verläuft analog, weswegen auch im Folgenden nur der Magnetfeldverlauf auf der x-Achse behandelt wird. Zur Elektronenstrahlmanipulation werden neben Solenoiden hauptsächlich Dipole und Quadrupole eingesetzt, womit deren Magnetfelder von besonderem Interesse sind. Multipole verschiedener Ordnung erzeugen Magnetfelder, deren Stärke und Richtung von den Ortskoordinaten innerhalb des Elements abhängen. Eine Ausnahme bildet hierbei der Dipol, welcher im idealen Fall ein rein homogenes Feld erzeugt. Wird angenommen, dass die Strahlachse s exakt durch den Mittelpunkt des entsprechenden Multipols verläuft, so sollte die Magnetfeldstärke $B(x,z)$ als Funktion des transversalen Strahlachsenabstands x und z beschrieben werden können. Eine Entwicklung des Magnetfelds in der Umgebung der Idealbahn zeigt den funktionalen Zusammenhang zwischen Magnetfeldstärke und transversalem Strahlachsenabstand.

$$B_z(x) = B_{z,0} + \frac{dB_z}{dx}x + \frac{1}{2!}\frac{d^2B_z}{dx^2}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3B_z}{dx^3}x^3 + \ldots \tag{2.7}$$

Zur weiteren Auswertung bietet es sich an, den Ausdruck mit $\frac{e}{p}$ zu multiplizieren:

$$\begin{array}{rcccccccccc} \frac{e}{p}B_z(x) & = & \frac{e}{p}B_{z,0} & + & \frac{e}{p}\frac{dB_z}{dx}x & + & \frac{e}{p}\frac{1}{2!}\frac{d^2B_z}{dx^2}x^2 & + & \frac{e}{p}\frac{1}{3!}\frac{d^3B_z}{dx^3}x^3 & + & \ldots \\ & = & \frac{1}{R} & + & kx & + & \frac{1}{2!}mx^2 & + & \frac{1}{3!}ox^3 & + & \ldots \\ & = & \text{Dipol} & + & \text{Quadrupol} & + & \text{Sextupol} & + & \text{Oktupol} & + & \ldots \end{array} \tag{2.8}$$

Zu jeder Ordnung von x gehört also offensichtlich ein eigener Multipolanteil.

2.2 Die Elektronenbahn im Quadrupol

Bevor nun die Bahngleichung für ein bewegtes Elektron im Quadrupol aufgestellt wird, sollten einige vereinfachende Annahmen getroffen werden. Zunächst soll gelten, dass alle Teilchen die selbe Energie besitzen und somit $\frac{\Delta p}{p} = 0$. Desweiteren wird angenommen, dass das Magnetfeld abrupt einsetzt und auf jeder beliebigen Parallelen zur Sollbahn konstant ist. Zuletzt wird davon ausgegangen, dass es keine Kopplung zwischen vertikaler (z-Richtung) und horizontaler (x-Richtung) Teilchenbewegung gibt. Die Betrachtung der Teilchenbahn auf der x-s-Ebene liefert also analog Ergebnisse für Bewegungen auf der z-s-Ebene. Im Folgenden wird daher nur noch die x-s-Ebene behandelt. Mithilfe der angestellten Vereinfachungen lässt sich nun eine simple Bewegungsgleichung aufstellen.

$$\frac{d^2x(s)}{ds^2} = x(s)'' = kx(s) \tag{2.9}$$

$$x'' - kx(s) = 0 \tag{2.10}$$

k ist dabei die konstante Stärke des Quadrupols.

Die Betrachtung des Quadrupolfeldverlaufs zeigt, dass ein ihn durchlaufendes Elektron entweder zur Strahlachse hin- oder von ihr weggelenkt wird, je nachdem ob es in vertikaler oder horizontaler Richtung von der Sollbahn abweicht. Konventionell gilt bei einer Fokussierung $k < 0$ und bei einer Defokussierung $k > 0$. Es ergeben sich also auch zwei Lösungen für Gleichung 2.10.

Für $k > 0$:

$$x(s) = A\cosh\left(\sqrt{k}s\right) + B\sinh\left(\sqrt{k}s\right) \tag{2.11}$$

$$x'(s) = \sqrt{k}A\sinh\left(\sqrt{k}s\right) + \sqrt{k}B\cosh\left(\sqrt{k}s\right) \tag{2.12}$$

und für $k < 0$:

$$x(s) = A\cos\left(\sqrt{|k|}s\right) + B\sin\left(\sqrt{|k|}s\right) \tag{2.13}$$

$$x'(s) = \sqrt{|k|}B\cos\left(\sqrt{|k|}s\right) - \sqrt{|k|}A\sin\left(\sqrt{|k|}s\right) \tag{2.14}$$

x beschreibt hierbei den Abstand von der Strahlachse und x' die Neigung, die das Teilchen zur Strahlachse hat. Nun wählt man noch als Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $x'(0) = x'_0$.

Somit gilt für $k > 0$:

$$x(s) = x_0\cosh\left(\sqrt{k}s\right) + \frac{x'_0}{\sqrt{k}}\sinh\left(\sqrt{k}s\right) \tag{2.15}$$

$$x'(s) = x_0\sqrt{k}\sinh\left(\sqrt{k}s\right) + x'_0\cosh\left(\sqrt{k}s\right) \tag{2.16}$$

und für $k < 0$:

$$x(s) = x_0\cos\left(\sqrt{|k|}s\right) + \frac{x'_0}{\sqrt{|k|}}\sin\left(\sqrt{|k|}s\right) \tag{2.17}$$

$$x'(s) = -x_0\sqrt{|k|}\sin\left(\sqrt{|k|}s\right) + x'_0\cos\left(\sqrt{|k|}s\right) \tag{2.18}$$

2.2.1 Transformationsmatrizen

Ein Elektron wird im Quadrupolfeld durch den Bahnvektor

$$\vec{X}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

beschrieben, wobei für $s = 0$

$$\vec{X}(0) = \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

gilt.

Um nun nicht jede einzelne Komponente ausrechnen zu müssen, bietet es sich an, den Bahnvektor mithilfe von Matrizen zu transformieren. Bei einer

Strahlführung durch Quadrupolfelder und feldfreie Driftstrecken ($k = 0$) ergeben sich drei verschiedene Transformationsmatrizen.

Für $k > 0$ (vertikal fokussierend):

$$\mathbf{M}_{\text{def}} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{k}s\right) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\left(\sqrt{k}s\right) & 0 & 0 \\ \sqrt{k}\sinh\left(\sqrt{k}s\right) & \cosh\left(\sqrt{k}s\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\sqrt{|k|}s\right) & \frac{1}{\sqrt{|k|}}\sin\left(\sqrt{|k|}s\right) \\ 0 & 0 & -\sqrt{|k|}\sin\left(\sqrt{|k|}s\right) & \cos\left(\sqrt{|k|}s\right) \end{pmatrix}$$

für $k < 0$ (horizontal fokussierend):

$$\mathbf{M}_{\text{fok}} = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{|k|}s\right) & \frac{1}{\sqrt{|k|}}\sin\left(\sqrt{|k|}s\right) & 0 & 0 \\ -\sqrt{|k|}\sin\left(\sqrt{|k|}s\right) & \cos\left(\sqrt{|k|}s\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\left(\sqrt{k}s\right) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\left(\sqrt{k}s\right) \\ 0 & 0 & \sqrt{k}\sinh\left(\sqrt{k}s\right) & \cosh\left(\sqrt{k}s\right) \end{pmatrix}$$

und für $k = 0$ (feldfrei):

$$\mathbf{M}_{\text{Drift}} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es lässt sich nun für eine beliebig komplexe Anordnung aus Quadrupolen und Driftstrecken eine aufbauspezifische Transformationsmatrix erstellen, welche sich aus den einzelnen Abschnittsmatrizen zusammensetzt.

$$\mathbf{M}_{Ges} = ... \cdot \mathbf{M}_{Drift3} \cdot \mathbf{M}_{Quad2} \cdot \mathbf{M}_{Drift2} \cdot \mathbf{M}_{Quad1} \cdot \mathbf{M}_{Drift1} \tag{2.21}$$

Sind die Startparameter eines Elektrons bekannt, lässt sich also der resultierende Bahnvektor nach Durchlaufen der Anlage direkt durch die Anwendung von M_{Ges} auf dessen anfänglichen Bahnvektor berechnen.

2.3 Strahlverhalten im magnetischen Feld

Nachdem nun die Bewegung eines einzelnen Elektrons nachvollzogen werden kann, ist es an der Zeit einen Formalismus für den gesamten Strahl zu entwickeln.

2.3.1 Betatronschwingung

Wird in Gleichung (2.10) eine variable Quadrupolstärke zugelassen, ergibt sich eine neue Bewegungsgleichung.

$$x'' - k(s)x(s) = 0 \tag{2.22}$$

$x(s)$ ist als Schwingung um die Sollbahn zu betrachten, wobei sowohl die Amplitude A als auch die Phase Φ vom Strahlachsenabschnitt abhängen.

$$x(s) = Au(s)\cos[\Psi(s) + \Phi] \tag{2.23}$$

Setzt man Gleichung (2.23) und deren zweite Ableitung in (2.22) ein, erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} &A[u''(s) - u(s)\Psi'^2(s) - k(s)u(s)]\cos(\Psi(s) + \Phi) \\ &-A[2u'(s)\Psi'(s) + u(s)\Psi''(s)]\sin(\Psi(s) + \Phi) = 0 \;. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Solange $A \neq 0$ ist, kann diese Gleichung nur gelten, wenn

$$u''(s) - u(s)\Psi'^2(s) - k(s)u(s) = 0 \tag{2.25}$$

$$2u'(s)\Psi'(s) + u(s)\Psi''(s) = 0 \tag{2.26}$$

$$\Leftrightarrow 2u'(s) + \Psi''(s) = 0 \;. \tag{2.27}$$

(2.24) ergibt durch Integration

$$\Psi(s) = \int_0^s \frac{d\sigma}{u^2(\sigma)} \;. \tag{2.28}$$

Wird (2.28) nun in (2.25) eingesetzt, ergibt sich die analytisch nicht lösbare Differentialgleichung

$$u''(s) - \frac{1}{u^3(s)} - k(s)u(s) = 0 \;. \tag{2.29}$$

Gleichung (2.29) könnte auf numerischem Wege gelöst werden, was jedoch gerade bei komplexen Strahlführungen extrem zeitaufwändig und unpraktikabel wäre. Um dennoch zu einem Ergebnis zu kommen, werden im nächsten Kapitel Parameter eingeführt, die anstelle der einzelnen Teilchen den kompletten Strahl definieren.

2.3.2 Twiss-Parameter und Phasenellipse

Es besteht die Möglichkeit, die Strahloptik durch die drei Twiss-Parameter α, β, γ, sowie die Emittanz ϵ zu kennzeichnen. Wenn es gelingt, diese Parameter zu ermitteln und wie den Bahnvektor $\vec{X}$ mithilfe von Matrizen zu transformieren, könnten auch Strahlverläufe durch zahlreiche Elemente leicht vorhergesagt werden. Zunächst sollen hierzu die Amplitudenfunktion

$$\beta(s) := u^2(s) \tag{2.30}$$

und die Emittanz ϵ, für die

$$\sqrt{\epsilon} := A \tag{2.31}$$

gilt, eingeführt werden. Die Amplitude der Betatronschwingung ist nun durch

$$E(s) = \sqrt{\epsilon\beta(s)} \tag{2.32}$$

gegeben. $E(s)$ wird auch Enveloppe genannt und entspricht der Einhüllenden des Teilchenstrahls. Als nächstes wird

$$\alpha(s) := -\frac{\beta'(s)}{2} \tag{2.33}$$

eingeführt, mit dessen Hilfe sich $x'(s)$ einfacher darstellen lässt.

$$x'(s) = -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\beta(s)}}[\alpha(s)\cos(\Psi(s) + \Phi) + \sin(\Psi(s) + \Phi)] \tag{2.34}$$

Wenn es nun noch gelingt, die von $\Psi(s)$ abhängigen Terme zu eliminieren, lässt sich die Veränderung von $x(s)$ und $x'(s)$ im Phasenraum beschreiben. Durch (2.23) und (2.32) ergibt sich

$$\cos(\Psi(s) + \Phi) = \frac{x(s)}{\sqrt{\epsilon\beta(s)}} \ . \tag{2.35}$$

Wird dies in (2.34) eingesetzt, so ergibt sich

$$\sin(\Psi(s) + \Phi) = \frac{\sqrt{\beta(s)}x'(s)}{\sqrt{\epsilon}} + \frac{\alpha(s)x(s)}{\sqrt{\epsilon\beta(s)}} \ . \tag{2.36}$$

Mit

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \tag{2.37}$$

ergibt sich

$$\frac{x^2}{\beta(s)} + \left(\frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}}x(s) + \sqrt{\beta(s)}x'(s)\right)^2 = \epsilon \ . \tag{2.38}$$

Wird hier noch der dritte Twiss-Parameter

$$\gamma := \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \tag{2.39}$$

eingesetzt, so vereinfacht sich die Gleichung auf

$$\gamma(s)x^2(s) + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'^2(2) = \epsilon \ . \tag{2.40}$$

Es handelt sich hierbei um die allgemeine Gleichung einer Ellipse. Da diese Ellipse die grafische Darstellung der Teilchenbewegung im x-x'-Phasenraum wie in Abbildung 2.1 möglich macht, wird sie auch Phasenraumellipse genannt. Solange die Strahlelektronen kanonischen Bewegungsgleichungen gehorchen, verändert sie in Abhängigkeit von s zwar ihre Form, jedoch bleibt ihre Fläche $F = \pi\epsilon$ immer gleich. Dieser Sachverhalt wird im Satz von Liouville [5] beschrieben.

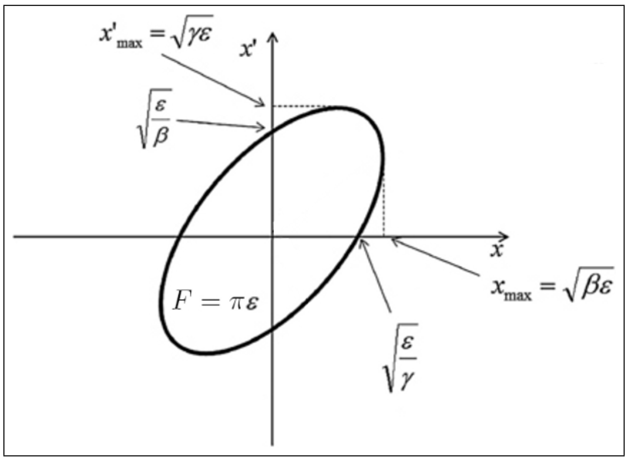


Abbildung 2.1: Schematische Emittanzellipse als grafische Darstellung der Teilchenbewegung im x-x'-Phasenraum. Die besondere Bedeutung der Twissparameter als strahldefinierende Größen wird hervorgehoben.

2.3.3 Strahlquerschnitt

Es stellt sich die Frage, wo eigentlich der Rand eines Elektronenstrahls liegt. Es wird immer Elektronen geben, die einen so großen Abstand zur Strahlachse aufweisen, dass ein Aufbau in dieser Größenordnung unpraktikabel wäre. Andererseits muss die Strahlführung natürlich genügend Platz bieten um eine ausreichende Intensität zu garantieren. Um eine vernünftige Definition der Strahlbreite zu erhalten, bietet es sich an, das Verhalten der Elektronendichte bei zunehmendem Strahlachsenabstand zu betrachten. Es kann dafür angenommen werden, dass die Dichtefunktion einer Gaußverteilung entspricht.

$$\rho(x,z) = \frac{Ne}{2\pi\sigma_x\sigma_z}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) \tag{2.41}$$

Der Strahlachsenabstand, bei dem die Elektronendichte auf $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = 0,607$ abgefallen ist entspricht genau einer Standardabweichung σ und wird als Konvention für die Strahlbreite benutzt.

$$\sigma(s) = \sqrt{\epsilon\beta(s)} \tag{2.42}$$

Die Ausmaße der Strahlführung sollten sich also an dem Wert von $\sigma(s)$ orientieren, was die Wichtigkeit der quantitativen Kenntnis über die in diesem Kapitel aufgeführten Parameter deutlich macht.

2.3.4 Transformation von Twiss-Parametern

Wenn man sich Gleichung (2.40) geschickt zu Nutze macht, müsste es möglich sein, einen methodischen Transformationsprozess für die Twiss-Parameter zu finden. Als erstes wird hierzu eine Matrix definiert, welche die anfänglichen Twiss-Parameter beinhaltet

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} \beta_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

Desweiteren wird der Bahnvektor benötigt

$$\vec{X}_{x0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix},$$

sowie dessen Transponierung $\vec{X}_0^T$. Durch diese Hilfsmittel lässt sich nun Gleichung (2.40) in Matrizenform darstellen.

$$\begin{aligned} \vec{X}_0^T \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \cdot \vec{X}_0 &= \gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x_0' + \beta_0 x_0'^2 \\ &= \epsilon \end{aligned} \tag{2.44}$$

Die Transformation des Ortsvektors wird mithilfe der Transformationsmatrix $\mathbf{M}$ durchgeführt. Mit der Beziehung $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = 1$, sowie $\mathbf{M}^T(\mathbf{M}^T)^{-1} = 1$ ergibt sich aus (2.44)

$$\epsilon = \mathbf{X}_0^T \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \cdot \mathbf{X}_0 \tag{2.45}$$

$$= \mathbf{X}_0^T(\mathbf{M}^T(\mathbf{M}^T)^{-1})\mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{X}_0 \tag{2.46}$$

$$= \mathbf{X}_0^T\mathbf{M}^T((\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{M}\mathbf{X}_0 \ . \tag{2.47}$$

Mithilfe von $\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T = (\mathbf{BA})^T$ und $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{BA})^{-1}$, folgt

$$\epsilon = \mathbf{X}_0^T\mathbf{M}^T((\mathbf{M}^T)^{-1}(\mathbf{MB}_0)^{-1})\mathbf{MX}_0 \tag{2.48}$$

$$= \mathbf{X}_0^T\mathbf{M}^T(\mathbf{MB}_0\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{MX}_0 \tag{2.49}$$

$$= (\mathbf{MX}_0)^T(\mathbf{MB}_0\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{MX}_0 \ . \tag{2.50}$$

Jedoch ist $(\mathbf{MX}_0)^T = \mathbf{X}^T$, womit sich (2.50) zu

$$\epsilon = \mathbf{X}^T(\mathbf{MB}_0\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{X} \tag{2.51}$$

vereinfacht. Wird dieses Resultat mit (2.44) verglichen und dabei bedacht, dass die Emittanz konstant bleibt, ergibt sich die Transformation der Betamatrix und somit der Twiss-Parameter.

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{M}^T \tag{2.52}$$

3 Experimentelle Methoden

Um den Strahlverlauf einer konkreten Anlage bestimmen zu können, müssen zunächst die Eigenschaften der einzelnen Bauelemente vermessen werden. Dazu gehören insbesondere die Stärken der eingesetzten Quadrupole, sowie die am Strahleingang vorliegenden Twissparameter. In dieser Arbeit wird der erste Ab-

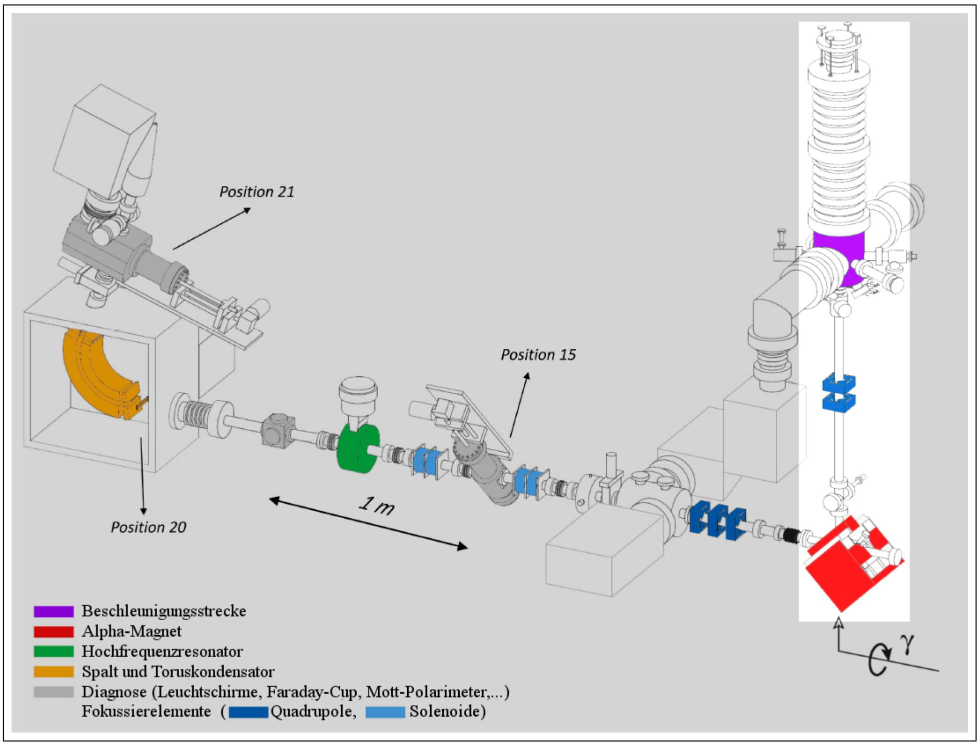


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der PKAT [3]. Der für diese Arbeit interessante Abschnitt ist hell hervorgehoben und beinhaltet die ersten beiden strahlfokussierenden Quadrupole (blau). Oberhalb der violett gekennzeichneten Beschleunigungsstrecke erzeugt ein Laserstrahl in einem GaAs-Kristall freie Elektronen, welche anschließend auf 100 keV beschleunigt werden.

schnitt der PKAT untersucht, welcher in Abbildung 3.1 hell hervorgehoben ist. Das Hauptaugenmerk wird dabei auf den beiden strahlfokussierenden Quadrupolen liegen.

3.1 Erzeugung und Flugbahn der Elektronen

Im Folgenden soll ein knapper Umriss der grundsätzlichen Elektronenflugbahn im ersten Abschnitt der PKAT erfolgen. Zunächst werden durch das Bestrahlen eines Gallium-Arsenid-Kristalls mit einem UV-Laser der Wellenlänge 405 nm freie Elektronen erzeugt[1]. Diese werden anschließend auf einer Strecke von 15 cm auf eine Energie von 100 keV beschleunigt, was 55% der Lichtgeschwindigkeit entspricht. Das longitudinale Energiespektrum hat dabei nur eine Breite von circa 1 eV. Nach dem Durchlaufen der in Abbildung 3.1 violett dargestellten Beschleunigungsstrecke bewegen sich die Elektronen durch die beiden Quadrupole (blau), um schließlich auf einen Leuchtschirm zu prallen, der sich knapp oberhalb des rot gekennzeichneten Alpha-Magneten befindet.

3.2 Vermessung von Quadrupolmagnetfeldern

Bevor quantitative Überlegungen bezüglich des Strahlverlaufs gemacht werden können, muss zunächst das Magnetfeld der eingesetzten Quadrupole als essentieller Bestandteil der Strahlmanipulation untersucht werden.

3.2.1 Aufbau

Für die Vermessung wurden folgende Materialien verwendet:

- Ein 3D-Verschiebetisch mit einer Genauigkeit von 0,01 mm
- eine Hallsonde und ein Gaußmeter mit einer Genauigkeit von 0,3 Gs
- eine Stromquelle
- ein Strommessgerät mit einer Genauigkeit von 1 mA
- ein Quadrupol, wie er auch in der PKAT verwendet wird[2]
- eine aus Spanplatten selbstgeschreinerte Fixierung

Die Genauigkeit des Verschiebetischs würde bereits bei einer geringfügig gekippten oder verdrehten Stellung zum Quadrupol stark kompromittiert werden, weswegen der Bau einer geeigneten Fixierung viel Zeit in Anspruch nahm. Nachdem eine geeignete Konstruktion vorhanden war, wurde die Hallsonde mit einem Carbonzylinder ummantelt und mithilfe zweier Doppelmuffen an den Verschiebetisch befestigt. Abbildung 3.2 zeigt alle Geräte und ihren Aufbau.

[1] Eine nähere Beschreibung findet sich unter anderem in [3]

[2] Der Quadrupol hat eine Länge von 41 mm und einen Aperturdurchmesser von 40 mm

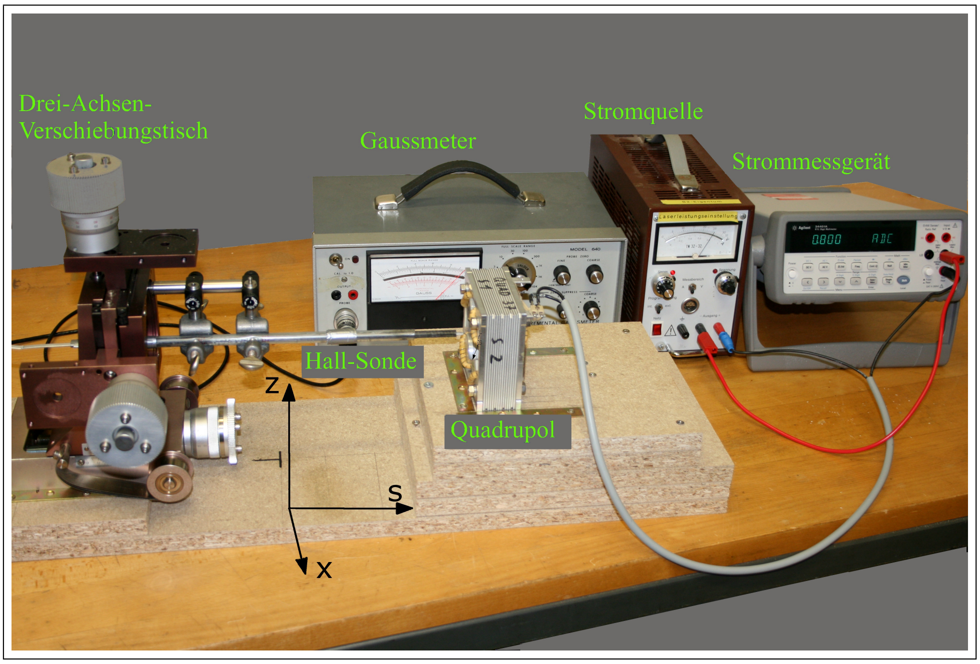


Abbildung 3.2: Aufbau zur Vermessung des Quadrupolmagnetfelds. Die einzelnen Bauteile wurden an dem eingezeichneten Koordinatensystem orientiert und anschließend fixiert. Die exakte Positionierung der Hallsonde ist durch den 3D-Achsen-Verschiebungstisch garantiert.

3.2.2 Durchführung

Um nicht in jede Messung einen Offset einfließen zu lassen, wurde zuallererst das Gaußmeter kalibriert. Hierfür wurde die Hallsonde mit einem magnetisch undurchlässigen Metallzylinder vom Erdmagnetfeld abgeschirmt und daraufhin in diesem Zustand der Aussschlag des Gaußmeters auf Null gesetzt.

Als nächstes musste ein geeignetes Verfahren zur systematischen Vermessung des Magnetfelds entwickelt werden. Hierfür wurde die Hallsonde mithilfe einer Wasserwaage horizontal ausgerichtet und in den mit 800 mA bestromten Quadrupol eingeführt. Um den transversalen Mittelpunkt des Magneten zu finden, wurde der Abstand benachbarter Kalotten mithilfe des Verschiebetischs ausgemessen. Über den halbierten Kalottenabstand wurde dann der geometrische Nullpunkt in x- und z-Richtung ermittelt. Da davon ausgegangen werden konnte, dass das Magnetfeld des Quadrupols auch in longitudinaler Richtung spiegelsymmetrisch ist, wurde der longitudinale Abstand zwischen zwei Punkten mit der gleichen Magnetfeldstärke vermessen. Die Distanz betrug $d = (11,0 \pm 0,1)$ mm bei einem Magnefeld von $B = (5,5 \pm 0,1)$ Gs. Mithilfe der halbierten Distanz konnte anschließend der magnetische Mittelpunkt auf 0,014 mm genau errechnet werden.

Das Zentrum des Quadrupols wurde so zum Ursprung des in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensystems. Um nun die Magnetfeldvermessung als Grundlage für die Bestimmung der Quadrupolstärke durchzuführen, wurde die Hallsonde auf die Koordinaten

$$\vec{K}_0 = \begin{pmatrix} x_{k0} \\ z_{k0} \\ s_{k0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{mm}$$

gesetzt und in Schritten von 2 mm das Magnetfeld gemessen. Die maximale Auslenkung betrug dabei 50 mm in beide Richtungen.
Zur Magnetfeldmessung bezüglich eventueller Multipolanteile wurde die Hallsonde auf die Startposition

$$\vec{Q}_0 = \begin{pmatrix} x_{q0} \\ z_{q0} \\ s_{q0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{mm}$$

gebracht und von dort in Schritten von $0,5\,\text{mm}$ in x-Richtung verschoben. Die maximale transversale Auslenkung betrug dabei $\pm 10\,\text{mm}$.

3.3 Emittanzmessung an der PKAT

Das erfolgreiche Vermessen der in der PKAT genutzten Quadrupole ist ein wichtiger Schritt zur Beschreibung des Strahlverlaufs, fördert allerdings noch keine Informationen bezüglich der Parameter, die den Strahl am Anfang der Teststrecke definieren. Oder anders ausgedrückt: Es sind zwar die äußeren Umstände bekannt, aber noch nicht das Objekt auf das sie wirken. Um dem Abhilfe zu verschaffen, wurde an der PKAT eine Emittanzmessung durchgeführt.

3.3.1 Aufbau

Auf Höhe des ersten Schirms in der PKAT-Strahlführung befindet sich ein Sichtfenster. Wird davor wie in Abbildung 3.3 eine Kamera montiert, kann die Strahlfleckgröße während des Strahlbetriebs aufgenommen werden. Der verwendete Schirm besitzt zur Orientierungs- und Vermessungshilfe ein eingeritztes Gitter mit einer Gitterkonstanten von 5 mm. Die Kamerabilder werden direkt in den ausgelagerten Kontrollraum geleitet, wo auch gleichzeitig die Bestromung der Quadrupole und die Strahlstromstärke geregelt werden können.

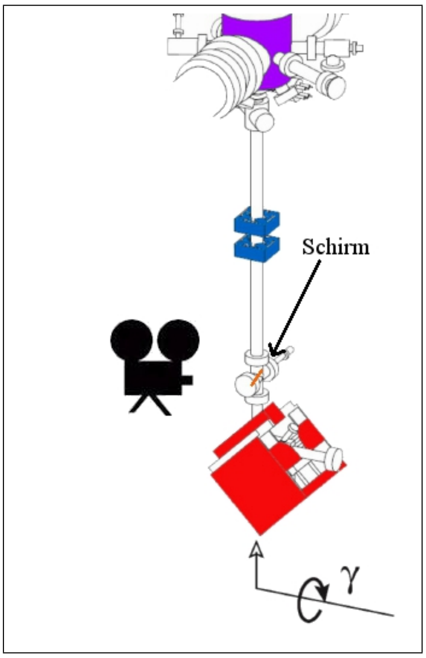


Abbildung 3.3: Aufbau zur Emittanzmessung. Die Grafik zeigt eine Vergrößerung des hellen Ausschnitts aus Abbildung (3.1). Vor dem Schirm befindet sich ein Sichtfenster, durch das mithilfe einer Digitalkamera die Strahlfleckbilder aufgenommen und direkt in den Kontrollraum gesendet werden.

3.3.2 Durchführung

Für die Durchführung wurde nur der obere der beiden Quadrupole bestromt, wobei nicht direkt der Strom, sondern nur die Brechkraft in der Einheit $\frac{1}{\mathrm{m}}$ eingestellt werden konnte. Für jede Brechkraft wurden zehn Aufnahmen gemacht, wobei der Ausgangswert bei $-2{,}5\,\frac{1}{\mathrm{m}}$ lag und in zwanzig gleichen Schritten auf $2{,}5\,\frac{1}{\mathrm{m}}$ erhöht wurde. Dieses Verfahren wurde bei einer Strahlstromstärke von 180 nA, 550 nA und 800 nA durchgeführt, was also insgesamt 630 Aufnahmen hervorbrachte.

3.4 Widerstandvergleichsmessung

Da es nicht als gesichert galt, ob die in der PKAT verwendeten Quadrupole tatsächlich baugleich mit dem bereits vermessenen Quadrupol waren, wurde mithilfe einer vergleichenden Widerstandsmessung genau das überprüft.

3.4.1 Aufbau

Um den Strom der Quadrupole zu messen, wurde vor den Magneten jeweils ein Amperemeter eingebaut. Die Spannung wurde parallel mithilfe eines Voltmeters ermittelt.

3.4.2 Durchführung

In allen drei Fällen (Laborquadrupol und beide PKAT-Quadrupole) wurde der durch den Quadrupol fließende Strom sowie die anliegende Spannung gleichzeitig gemessen. Der vorhandene Aufbau wurde auch direkt genutzt, um eine Beziehung zwischen dem anliegenden Strom und dem im Kontrollraum angezeigten Dioptriewert des jeweiligen Quadrupols zu ermitteln. Dafür wurden an dem unteren Quadrupol fünf Messungen mit den Dioptriewerten 0, 1, 2, 5, 10 und 15 $\frac{1}{\mathrm{m}}$, an dem oberen Quadrupol sieben Messungen mit den Werten -5, -2, -1, 0, 1, 2 und 5 $\frac{1}{\mathrm{m}}$ und an dem Laborquadrupol zehn Messungen mit Stromwerten von 50 mA bis 800 mA durchgeführt.

4 Ergebnisse und Auswertung

4.1 Ermittlung der effektiven Länge

Das reale magnetische Feld eines Quadrupols hat einen glockenförmigen Verlauf und erstreckt sich theoretisch bis in die Unendlichkeit. Das bedeutet, dass sich die Transformationsmatrix für einen Quadrupol aus infinitesimal vielen Abschnittsmatrizen zusammensetzt, was rechnerisch natürlich nur schwer zu handhaben ist. Um dieses Problem zu umgehen, wird das Quadrupolfeld ersatzweise über eine effektive Länge L_{eff} und einen festen Magnetfeldgradienten $B'_{\text{eff}} = \frac{dB_{\text{eff}}}{dx}$ beschrieben. Das eigentlich komplizierte Quadrupolfeld vereinfacht sich so zu einer rechteckigen und somit gut zu erfassenden Form. Das Ziel ist es nun, die Größen L_{eff} und B'_{eff} zu ermitteln. Hierfür wurde zunächst eine Messreihe durchgeführt, in der der ortsabhängige Magnetfeldgradient $B'_{\text{ort}}(s)$ sowie die longitudinale Ortskoordinate s notiert werden. Abbildung 4.1 zeigt den dazu passenden Plot mit angepassten polynomischen Funktionen dritter und vierter Ordnung (die Funktionen spiegeln keinen physikalischen Zusammenhang wieder, sondern werden nur zur Flächenberechnung benötigt).

Oberhalb der Abszissenachse ist der Magnetfeldgradient in horizontaler Richtung und unterhalb in vertikaler Richtung dargestellt. Die Anpassfunktionen wurden mit dem Computeralgebraprogramm *Mathematica 8* erstellt. Als nächstes werden die Flächen zwischen den beiden Plotkurven und der s-Achse ermittelt. Dabei ergibt sich für die Fläche oberhalb der Abszissenachse ein Wert von

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{-50\,\text{mm}}^{-20\,\text{mm}} A1(s)ds + \int_{-20\,\text{mm}}^{20\,\text{mm}} B1(s)ds + \int_{20\,\text{mm}}^{50\,\text{mm}} C1(s)ds \\ &= (166,89 \pm 4,95)\,\text{Gs} \end{aligned} \tag{4.1}$$

und unterhalb

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{-50\,\text{mm}}^{-20\,\text{mm}} A2(s)ds + \int_{-20\,\text{mm}}^{20\,\text{mm}} B2(s)ds + \int_{20\,\text{mm}}^{50\,\text{mm}} C2(s)ds \\ &= (168,61 \pm 3,50)\,\text{Gs} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Um den Fehler dieser Werte zu ermitteln, werden Anpassungskurven durch die oberen und unteren Fehlergrenzen der einzelnen Messpunkte gelegt und auch hier wiederum die Flächen berechnet. Die Differenzen zwischen der minimalen (F_{min}) und maximalen (F_{max}) Fläche zu der Sollfläche ergeben den Fehler von

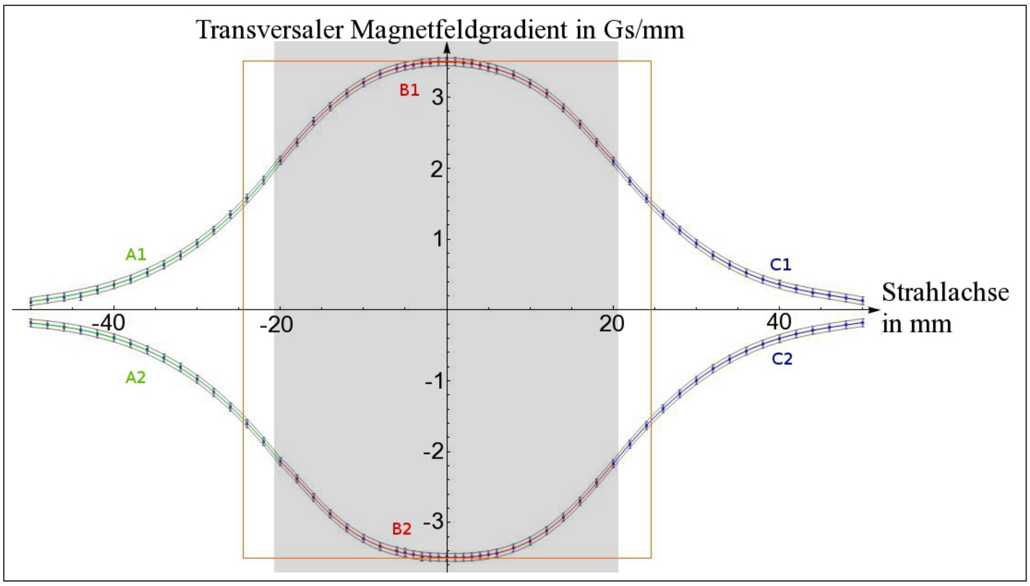


Abbildung 4.1: Der gemessene Magnetfeldgradient des Laborquadrupols, sowie das orange dargestellte, modellierte Rechteckfeld. Der grau unterlegte Bereich markiert die Position des Quadrupols. Die Kurven sind sowohl in horizontaler, als auch in vertikaler Richtung innerhalb der Fehlertoleranzen symmetrisch.

F_1 und F_2.

$$\begin{aligned}
\Delta F_1 &= \pm^{(Fmax_1 - F_1)}_{(F_1 - Fmin_1)} \\
&= \pm^{(171{,}84\ \text{Gs} - 166{,}89\ \text{Gs})}_{(166{,}89\ \text{Gs} - 161{,}94\ \text{Gs})} \\
&= \pm 4,95\ \text{Gs} \\
\Delta F_2 &= \pm^{(Fmax_2 - F_2)}_{(F_2 - Fmin_2)} \\
&= \pm^{(172{,}10\ \text{Gs} - 168{,}61\ \text{Gs})}_{(168{,}61\ \text{Gs} - 165{,}10\ \text{Gs})} \\
&= \pm^{3{,}49\ \text{Gs}}_{3{,}51\ \text{Gs}} \approx \pm 3,50\ \text{Gs}
\end{aligned}$$

Die Fehlertoleranzen unterscheiden sich in positiver Richtung kaum von denen in negativer Richtung, was die weitere Verarbeitung vereinfacht. Der maximal erreichte Magnetfeldgradient lag in horizontaler, sowie vertikaler Richtung bei

$$\begin{aligned}
B'_{max} = B'_{\text{eff}} = \frac{B_{max}}{lI} &= \frac{27,9\ \text{Gs}}{8\ \text{mm}} \\
&= (3,49 \pm 0,10)\ \frac{\text{Gs}}{\text{mm}}.
\end{aligned}$$

Aus den Quotienten der Sollflächen und B'_{max} ergeben sich die effektiven Längen für das Magnetfeld in x- sowie in z-Richtung.

$$\begin{aligned}
L_{eff1} &= \frac{F_1}{B'_{\text{eff}}} = \frac{166,89\ \text{Gs}}{3,49\ \frac{\text{Gs}}{\text{mm}}} = (47,82 \pm 1,96)\ \text{mm} \\
L_{eff2} &= \frac{F_2}{B'_{\text{eff}}} = \frac{168,61\ \text{Gs}}{3,49\ \frac{\text{Gs}}{\text{mm}}} = (48,31 \pm 1,70)\ \text{mm}
\end{aligned}$$

Es ist natürlich möglich, dass ein Quadrupol in vertikaler Richtung eine andere effektive Länge hat als in horizontaler Richtung. Da die beiden Werte jedoch nur einen Abstand von $0,49$ mm besitzen, was einer relativen Differenz von 1% entspricht und zudem noch weit innerhalb der gegenseitigen Fehlertoleranzen liegen, ist die Bildung des Mittelwerts gerechtfertigt. Die ursprünglich sehr großzügig gewählten Fehlertoleranzen der einzelnen effektiven Längen reduzieren sich im Laufe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung auf ein realistisches Maß.

$$L_{mittel} = \frac{L_{eff1} + L_{eff2}}{2} = (48,1 \pm 1,3)\ \text{mm}$$

Der relative Fehler der ermittelten effektiven Länge liegt bei etwa 3%. Es wurden bereits in der Vergangenheit Quadrupole des PKAT auf ihre mittlere effektive Länge hin untersucht, wobei in [4] ein Wert von $L_{lit} = 48$ mm genannt wird. Die Abweichung zu dem in dieser Arbeit ermittelten Werts liegt also gerade bei 0,1 mm oder 0,2%, was eine hervorragende Bestätigung darstellt.

4.2 Einfluss eines verkippten Aufbaus auf die Messungen

Der Bau einer geeigneten Messapparatur erforderte ein gewisses handwerkliches Geschick. In Kapitel 4.3 wird dann auch tatsächlich festgestellt, dass eine leichte Verkippung innerhalb des Aufbaus vorliegt. Da diese Problematik während der Vermessung des Quadrupols bekannt war, wurde bei jeder longitudinalen Verschiebung der Hallsonde erst der magnetische Nullpunkt ermittelt und als Bezugspunkt verwendet. Als willkommener Nebeneffekt konnte so auch gleichzeitig der Einfluss des Erdmagnetfelds beseitigt werden.

4.3 Multipolanteile

Wie bereits in Kapitel 3.2 gezeigt, wurde bei der Vermessung des Quadrupolfelds auch direkt eine Überprüfung auf Multipolanteile durchgeführt. Hierfür wurde eine Messreihe bestehend aus der Magnetfeldstärke B, dem transversalen Abstand zur Strahlachse x, sowie der Strahlachsenkoordinate s aufgenommen. Abbildung 4.2 zeigt beispielhaft den resultierenden Plot bei $s = 15\,\text{mm}$. Mithilfe

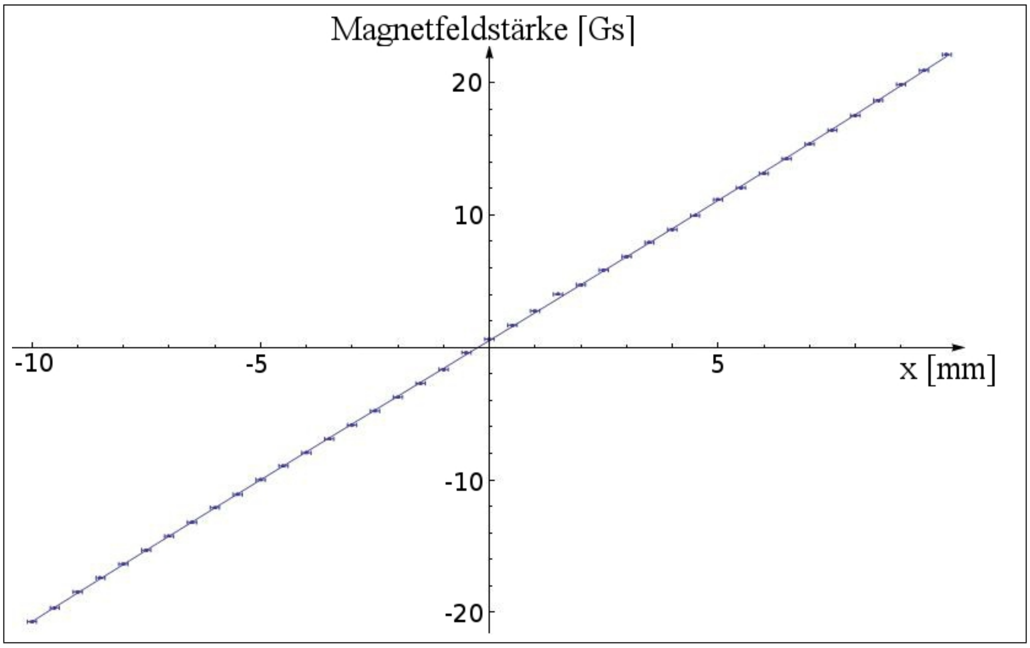


Abbildung 4.2: Der transversale Magnetfeldverlauf in horizontaler Richtung bei $s = 15$ mm. Die Linearität ist offensichtlich, wobei die Nullpunktsymmetrie durch einen positiven Offset gestört wird. Dieser Versatz kommt durch die Verkippung der Apparatur zustande.

von Gleichung (2.8), lässt sich eine Anpassfunktion erstellen, deren Parameter

s [mm]	Δ**s** [mm]	$\frac{1}{R}$ [Gs]	$\Delta\frac{1}{R}$ [Gs]	k [$\frac{Gs}{mm}$]	Δk [$\frac{Gs}{mm}$]	$\frac{m}{2!}$ [$\frac{Gs}{mm^2}$]	$\Delta\frac{m}{2!}$ [$\frac{Gs}{mm^2}$]
0,00	0,01	0,25	0,02	2,61	0,01	0,00	0,00
15,00	0,01	0,53	0,02	2,10	0,01	0,00	0,00
30,00	0,01	0,79	0,03	0,81	0,01	0,00	0,00

Tabelle 4.1: Multipolanteile zu verschiedenen Strahlachsenkoordinaten. Der Dipolanteil erhöht sich deutlich mit zunehmendem longitudinalen Abstand s. Ansonsten sind jedoch neben dem Quadrupolanteil keine weiteren Anteile zu erkennen.

direkt die Multipolanteile beliebiger Ordnung anzeigen. Es stellt sich heraus, dass neben den Quadrupolanteilen noch signifikante Dipolanteile vorhanden sind. Tabelle 4.1 zeigt, dass der Dipolanteil nahezu linear mit zunehmendem Abstand vom longitudinalen Quadrupolmittelpunkt wächst. Hierfür ist jedoch kein tatsächlicher Feldfehler, sondern eine Verkippung der Messapparatur verantwortlich. Wird als Grundlage der Dipolanteil bei s = 30 mm genommen, lässt sich die Ausprägung dieser Verkippung bestimmen. Zunächst muss hierfür der x-Wert ermittelt werden, bei dem der ideale Quadrupol ein Magnetfeld der Stärke des Dipolanteils aufweisen würde.

$$\frac{1}{R} = 0,79 \text{ Gs} = k \cdot x \tag{4.3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0,79 \text{ Gs}}{k} = \frac{0,79 \text{ Gs}}{0,81 \ \frac{\text{Gs}}{\text{mm}}} = 0,98 \pm 0,04\text{mm} \tag{4.4}$$

Aus dem Quotienten vom transversalem und longitudinalem Abstand, ergibt sich direkt die Verkippung ξ des Quadupols.

$$\xi = \frac{x}{s} = \frac{0,98 \text{ mm}}{30 \text{ mm}} = 0,032 \pm 0,001 \tag{4.5}$$

Es kann davon ausgegangen werden, dass bei dem Bau der Fixierung aufgrund fehlender Justagemöglichkeiten eine Genauigkeit von 30 mrad nur schwer zu übertreffen war. Die Annahme ist also berechtigt, dass das vermeintliche Dipolfeld in dieser Größenordnung nicht existiert und nur ein Artefakt aus dem experimentellen Aufbau darstellt.

4.4 Widerstandvergleichsmessung

Aus den erfolgten Strom I und Spannungsmessungen U wird jeweils der Widerstand R errechnet. Dabei ergeben sich für den oberen Quadrupol (R_o) sieben Werte, für den unteren Quadrupol (R_u) fünf Werte und für den Laborquadrupol

(R_L) zehn. Diese Ergebnisse werden jeweils gemittelt.

$$R_o = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} R_{oi} = 8,42 \pm 0,05\,\Omega \tag{4.6}$$

$$R_u = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} R_{ui} = 1,67 \pm 0,01\,\Omega \tag{4.7}$$

$$R_L = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} R_{Li} = 8,43 \pm 0,01\,\Omega \tag{4.8}$$

Der Fehler entspricht der Standardabweichung des Mittelwerts. Es zeigt sich, dass der obere Quadrupol tatsächlich baugleich mit seinem Laborpendant ist. Der Widerstand des unteren Quadrupols weicht jedoch um den Faktor vier von den anderen Magneten ab, obwohl keine konstruktionsbedingten Unterschiede sichtbar sind. Für die Messung der Strahlemittanz stellt das kein Problem dar, da hier auch nur mit dem oberen Quadrupol gearbeitet werden kann. Für die Analyse des Strahlverlaufs bei einem regulären Betrieb ist die Unwissenheit über die tatsächliche Stärke des unteren Quadrupols jedoch fatal. Um dieses Problem zu lösen, muss jedoch zuerst der Proportionalitätsfaktor n zwischen der im Kontrollraum angezeigten Brechkraft D und dem Quadrupolstrom ermittelt werden. Dazu wird der Qotient aus Dioptriewert und Strom gebildet und wieder für den jeweiligen Quadrupol gemittelt.

$$n_i = \frac{D_i}{I_i} \tag{4.9}$$

$$\Rightarrow n_o = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} n_{oi} = 6,76 \pm 0,02\,\frac{1}{\mathrm{Am}} \tag{4.10}$$

$$n_u = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} n_{ui} = 20,19 \pm 0,04\,\frac{1}{\mathrm{Am}} \tag{4.11}$$

Da die Quadrupole nicht aus dem Strahlverlauf ausgebaut werden können, wurde nun mit einem mobilen Gaußmeter eine vorläufige Messung der Magnetfeldstärke durchgeführt. Es zeigte sich, dass bei gleicher Bestromung im unteren Quadrupol nur die halbe Magnetfeldstärke erzeugt wird. Es kann also davon ausgegangen werden, dass die Spulen des Magneten den doppelten Drahtquerschnitt bei halber Windungszahl besitzen. Ein Grund für den Einbau eines solchen Quadrupols könnte in der genaueren Ansteuerung bei höheren Strömen liegen. Ob diese Annahme der Wirklichkeit entspricht, wird sich bei einem Vergleich des theoretischen Strahlverlaufs mit den aufgenommenen Strahlbildern herausstellen.

4.5 Ermittlung der Twiss-Parameter

Die aufgenommenen Elektronenstrahlbilder haben eine Auflösung von 1024 mal 1280 Pixeln, wobei jedem Pixel eine Intensität zugeordnet ist. Diese Intensität ist bezüglich zur Strahlbreite gaußförmig verteilt und bei den vorliegenden Betriebsbedingungen proportional zu der Menge an Elektronen, die auf dem Schirm an der von der Kamera zugeordneten Pixelposition auftreffen. Um die Emittanz des Strahls zu ermitteln, werden als erstes seine Breite und seine Höhe am Schirm benötigt. Wie in Kapitel 2.3.3 beschrieben, entsprechen diese Werte dem Abstand zur Strahlachse und somit dem Abstand zum Intensitätsmaximum, der einem σ entspricht. Um nun alle Strahlfleckaufnahmen daraufhin zu untersuchen, werden sie zunächst in ein Mathematicaskript[1] eingelesen. Im nächsten Schritt erzeugt das Skript eine zu der Intensitätsverteilung des Strahlflecks passende, zweidimensionale Gaußfunktion $G(x, z)$.

$$G(x, z) = A * e^{-(a(x-\mu 1)^2+2b(x-\mu 1)(y-\mu 2)+c(y-\mu 2)^2)} \tag{4.12}$$

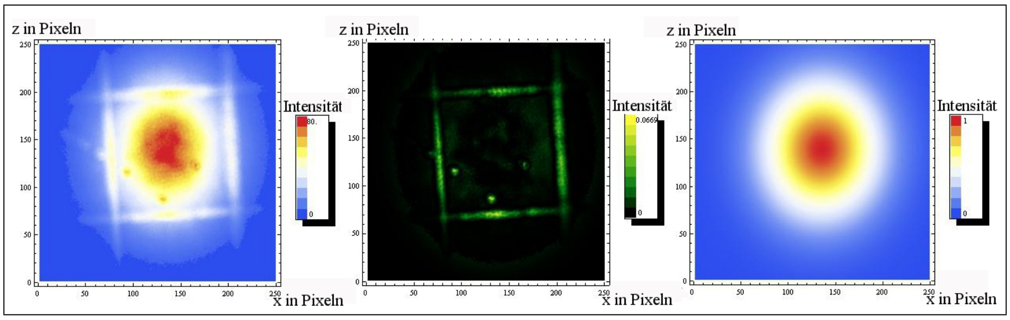


Abbildung 4.3: Von links nach rechts: Rohdatenbild, vom Skript erkannte Abweichung zur Gaußverteilung, fertige Anpassfunktion mit genormter Intensität. Ein Pixel entspricht dabei 39 μm.

Abblidung 4.3 veranschaulicht beispielhaft die Vorgehensweise des Programms bei der Verarbeitung der Daten. Aus den resultierenden Anpassfunktionen werden schließlich die Strahlhöhen und Breiten extrahiert und können nun weiterverarbeitet werden. Multipliziert man Gleichung (2.52) mit der konstanten Emittanz ϵ,

$$\epsilon \mathbf{B} = \zeta^1 = \epsilon \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{M}^T = \mathbf{M} \cdot \zeta^0 \cdot \mathbf{M}^T \tag{4.13}$$

so ergibt das Element $\zeta^1_{11} = \epsilon\beta = \sigma_1^2$ der resultierenden Matrix das Quadrat der

[1] Das Skript wurde von meinem Betreuer zur Verfügung gestellt und nur geringfügig modifiziert

Strahlbreite am Punkt der Messung. Für ζ_{11}^1 gilt aber ebenso

$$\zeta_{11}^1 = \mathbf{M}_{11}^2 \zeta_{11}^0 + 2\mathbf{M}_{11}\mathbf{M}_{12}\zeta_{12}^0 + \mathbf{M}_{12}^2 \zeta_{22}^0 \tag{4.14}$$

Mit Gleichung (4.14) lässt sich nun eine Anpassungskurve durch den mit *Mathematica* erzeugten Datenplot legen und so die unbekannten Twissparameter am Startpunkt der Strahlführung bestimmen. Zunächst wird hierzu jedoch die Transformationsmatrix $\mathbf{M}$ benötigt. Abbildung 3.1 zeigt, dass der Elektronenstrahl zu Beginn die Driftstrecke s_1 bis zum oberen Quadrupol der effektiven Länge L_{eff} zurücklegt, dann durch den Magneten geführt wird und bei ausgeschaltetem, unteren Quadrupol eine weitere Driftstrecke s_2 bis zum Schirm durchläuft. Es gilt also

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{M}_{Quad} \cdot \mathbf{D}_1 \tag{4.15}$$

Die Driftabschnittsmatrizen ergeben sich alleine aus den Driftstrecken,wobei für s_1 eine Länge von $(42,2 \pm 0,1)\,\text{cm}$ und für s_2 eine Länge von $(54,0 \pm 0,1)\,\text{cm}$ gemessen wurde. Schwieriger ist die Definition der Tranformationsmatrix für den Quadrupol $\mathbf{M}_{Quad}$. In Kapitel 2.3.4 wurde gezeigt, dass die die Matrix definierenden Parameter aus der Quadrupolstärke

$$k = \frac{e}{p_{elektron}} B'_{\text{eff}} \tag{4.16}$$

sowie der effektiven Länge L_{eff} bestehen. L_{eff} und B'_{eff} wurden bereits in Kapitel 4.1 bestimmt, weswegen jetzt nur noch der Elektronenimpuls p berechnet werden muss. Mit der relativistischen Energie-Impuls Beziehung ergibt sich

$$E^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2 \tag{4.17}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m_e^2 c^4} \tag{4.18}$$

wobei

$$E = E_0 + E_{kin} = 511\ \text{keV} + 100\ \text{keV} = 611\ \text{keV} \tag{4.19}$$

Da nun alle nötigen Größen bekannt sind, müssen diese nur noch in Gleichung (4.14) eingesetzt werden. Die resultierende Funktion ist von enormen Umfang und wird deshalb hier nicht explizit gezeigt. Abbildung 4.4 zeigt sowohl die geplotteten Werte der quadrierten vertikalen Strahlbreiten, als auch die von *Mathematica* erzeugte Anpassungskurve. Die so erzeugen Werte entsprechen den Twissparametern in horizontaler und vertikaler Strahlrichtung, multipliziert mit der jeweiligen Strahlemittanz. Ihre Fehler entsprechen den von *Mathematica* berechneten Standardabweichungen. Das Ziel ist es nun, die Twissparameter von der Emittanz zu isolieren und einzeln darzustellen. Mithilfe der Gleichungen aus Kapitel 2.3.2 wird dies im Folgenden umgesetzt.

$$x_0 = \sqrt{\beta_x^0 \epsilon_x} = 0,430 \pm 0,020 \text{ mm} \qquad \frac{\Delta x_0}{x_0} = 4,7\%$$

$$z_0 = 0,390 \pm 0,020 \text{ mm} \qquad \frac{\Delta z_0}{z_0} = 5,1\%$$

$$x'_0 = \sqrt{\gamma_x^0 \epsilon_x} = 1,45 \pm 0,08 \text{ mrad} \qquad \frac{\Delta x'_0}{x'_0} = 5,5\%$$

$$z'_0 = 1,93 \pm 0,10 \text{ mrad} \qquad \frac{\Delta z'_0}{z'_0} = 5,1\%$$

$$\epsilon_x = \sqrt{x_0^2 \gamma_x^0 \epsilon_x + 2\alpha_x^0 \epsilon_x x_0 x'_0 + \beta_x^0 \epsilon_x x_0'^2}$$

$$= 0,771 \pm 0,045 \text{ mm} \cdot \text{mrad} \qquad \frac{\Delta \epsilon_x}{\epsilon_x} = 5,8\%$$

$$\epsilon_z = 0,722 \pm 0,040 \text{ mm} \cdot \text{mrad} \qquad \frac{\Delta \epsilon_z}{\epsilon_z} = 5,5\%$$

$$\beta_x^0 = \frac{\beta_x^0 \epsilon_x}{\epsilon_x} = 0,244 \pm 0,015 \ \frac{\text{mm}}{\text{mrad}} \qquad \frac{\Delta \beta_x^0}{\beta_x^0} = 6,1\%$$

$$\beta_z^0 = 0,220 \pm 0,013 \ \frac{\text{mm}}{\text{mrad}} \qquad \frac{\Delta \beta_z^0}{\beta_z^0} = 5,9\%$$

$$\alpha_x^0 = \frac{\alpha_x^0 \epsilon_x}{\epsilon_x} = -0,206 \pm 0,008 \qquad \frac{\Delta \alpha_x^0}{\alpha_x^0} = 3,9\%$$

$$\alpha_z^0 = -0,598 \pm 0,018 \qquad \frac{\Delta \alpha_z^0}{\alpha_z^0} = 3,0\%$$

$$\gamma_x^0 = \frac{\gamma_x^0 \epsilon_x}{\epsilon_x} = 2,73 \pm 0,11 \ \frac{\text{mrad}}{\text{mm}} \qquad \frac{\Delta \gamma_x^0}{\gamma_x^0} = 4,0\%$$

$$\gamma_z^0 = 5,18 \pm 0,15 \ \frac{\text{mrad}}{\text{mm}} \qquad \frac{\Delta \gamma_z^0}{\gamma_z^0} = 2,8\%$$

Der relative Fehler der ermittelten Parameter liegt mit bis zu 6,1% in einem akzeptablen Rahmen. Die Ablage x_0 stimmt mit z_0 nahezu überein (4% Abweichung). Der Strahl ist also zu Beginn der Strahlführung nahezu rund, was sich jedoch später aufgrund der verschiedenen Neigungen x'_0 und z'_0 ändern wird. Um zu klären woher diese unterschiedlichen Neigungen kommen, muss noch einmal die Erzeugung der freien Elektronen betrachtet werden. Ein Laserstrahl bestrahlt den GaAs-Kristall in der PKAT und erzeugt so die nötigen freien Ladungsträger. Wenn nun aber die Form des Laserstrahlflecks nicht exakt rund ist, so wird auch der entstehende Elektronenstrahl keine runde Form und auch keine einheitliche Neigung haben. Ob dieser Fall auch in der PKAT zutrifft, wurde anhand einer Vermessung des Laserstrahlflecks überprüft. In Abbildung 4.5 ist eine Aufnahme der Intensitätsverteilung zu sehen. Sie bekräftigt die Annahme, dass die Ursache der Elektronenstrahlunförmigkeit im Astigmatismus des La-

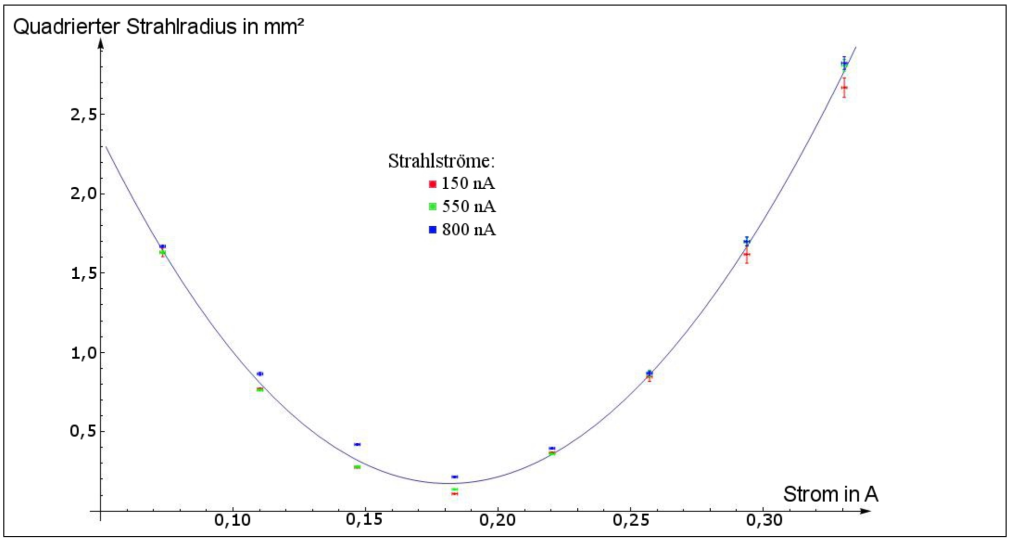


Abbildung 4.4: Plot und Fitfunktion zur Bestimmung der Twissparameter in vertikaler Richtung. Die Messpunkte der verschiedenen Strahlströme überlagern sich teilweise und liegen generell sehr dicht. Der Strahlstrom kann also keinen nennenswerten Einfluss auf die Strahlbreite haben.

serstrahls liegt. Eine quantitative Analyse dieses Zusammenhangs würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen und wird daher nicht erfolgen.

4.6 Strahlverlauf und Phasenraumellipsen am Schirm

Mithilfe der nun zur Verfügung stehenden Daten kann neben der Strahlform auch die Phasenellipse an jeder beliebigen Position im Strahlverlauf berechnet werden. Hierzu werden die gesammelten Parameter in die Transformationsmatrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{M}_{Quad2} \cdot \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{M}_{Quad1} \cdot \mathbf{D}_1 \tag{4.20}$$

eingesetzt und wie in Gleichung (2.52) auf die Betamatrix, sowie den Bahnvektor $\vec{X}_0$ angewandt.

$$\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ z_0 \\ z_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,48 \text{ mm} \\ 0,45 \text{ mrad} \\ 0,5 \text{ mm} \\ 0,78 \text{ mrad} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

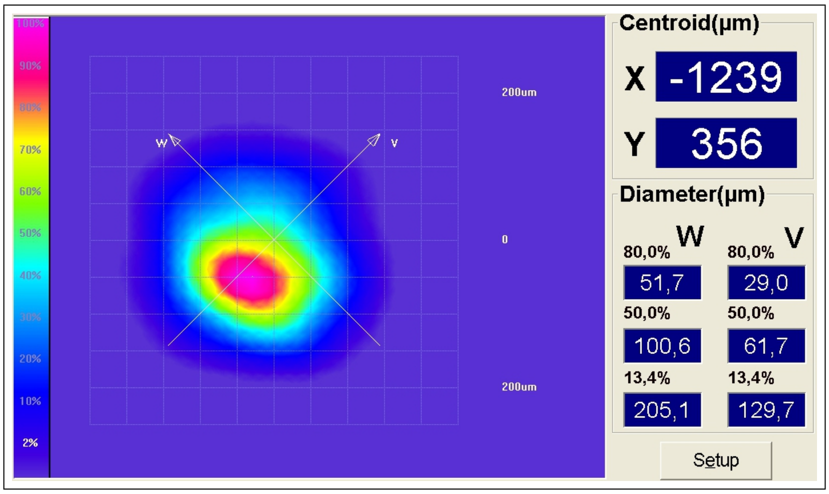


Abbildung 4.5: Intensitätsverteilung des Lasers an dem GaAs-Kristall der PKAT. Der Fleck ist nicht kreisförmig, wobei die genauen vertikalen und horizontalen Durchmesser bei 80%, 50% und 13,4% der maximalen Intensität am rechten Rand gezeigt sind.

Mit den transformierten Werten kann nun die Ellipsengleichung (2.40) aufgestellt werden. In Abbildung 4.6 sieht man ein Beispiel für die grafische Darstellung einer solchen Phasenellipse. Die Quadrupole wurden dabei mit jeweils 300 mA bestromt. Es kann nicht pauschal gesagt werden, welche Strahlparameter für ein bestimmtes Experiment von Interesse sind. Es mag sein, dass eine bestimmte Strahlfleckform (um beispielweise ein Target optimal auszuleuchten) oder aber auch eine möglichst geringe Strahlneigung verlangt werden. Gerade Letztere lässt sich dabei experimentell nur schwer bestimmen, weswegen eine theoretische Betrachtung des Strahlverlaufs vor dem tatsächlichen Versuch sehr praktisch sein kann. Das im Anhang zur Verfügung gestellte *Mathematika*-Skript wurde zu eben diesen Zweck entwickelt.

Desweiteren wird es den Experimentator interessieren, ob der erzeugte Strahl überhaupt genug Platz in der Strahlführung findet. Hierzu muss der vom Strahl eingenommene Ortsraum an jedem Punkt des Aufbaus bekannt sein. Lässt man den longitudinalen Streckenparameter s innerhalb der Tranformationsmatrix $\mathbf{M}$ variabel, so kann die Enveloppe des Strahls visuell über die gesamte Strahlführung dargestellt und mit dem jeweiligen Versuchsaufbau verglichen werden. Um zu überprüfen, ob die ermittelten Twissparameter korrekt sind, wurden die theoretischen Strahlbreiten mit den gemessenen Breiten am Schirm verglichen. Dafür wurden zehn Strahlfleckbilder bei unbestromten Quadrupolen erstellt, und mit der in Kapitel 4.5 beschriebenen Verfahrensweise ausgemessen. Die Abweichungen von der Theorie zur Messung liegen bei bis zu 6%, was in Anbetracht der Fehlertoleranzen der Twissparameter einen guten Wert dar-

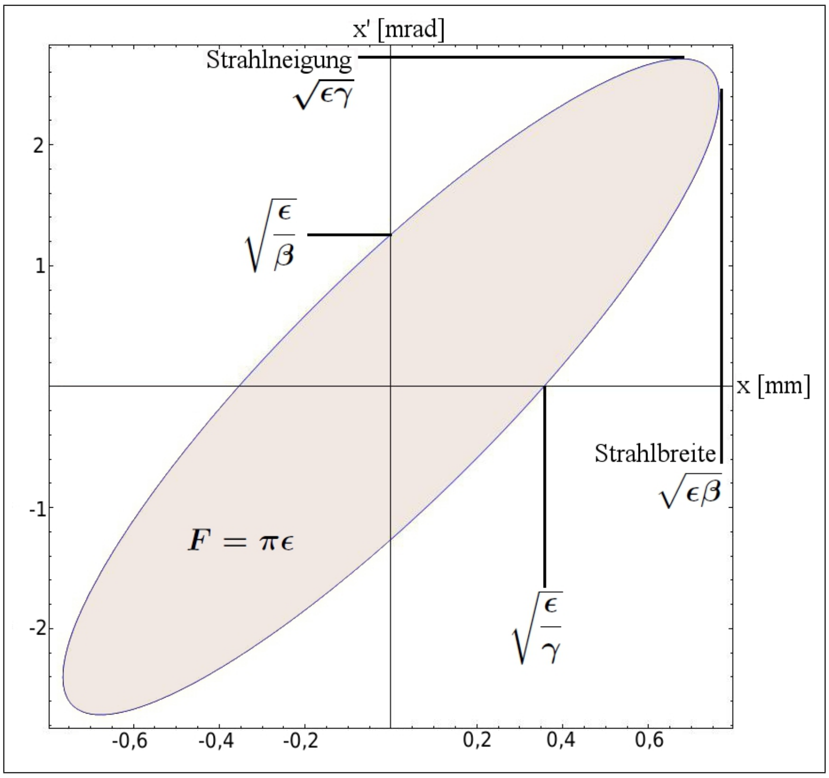


Abbildung 4.6: PKAT Phasenellipse am Standort des Schirms bei einer Bestromung von 300 mA an beiden Quadrupolen. Die Fläche der Ellipse bleibt immer gleich, nur ihre Form kann sich ändern.

	Messung [mm]	**Theorie** [mm]	$\frac{\textbf{Theorie}}{\textbf{Messung}}$
z	$4,38 \pm 0,01$	$4,40 \pm 0,07$	$1,01 \pm 0,02$
x	$3,46 \pm 0,01$	$3,26 \pm 0,06$	$0,94 \pm 0,02$

Tabelle 4.2: Vergleich der gemessenen Strahlbreiten in vertikaler (z) und horizontaler (x) Richtung mit der theoretischen Vorhersage. Die gute Übereinstimmung der Daten bekräftigt die Korrektheit der ermittelten Twissparameter.

stellt. Es zeigt sich, dass das *Mathematica*-Skript im Rahmen der zur Verfügung stehenden Genauigkeiten seine Aufgabe erfüllt. Desweiteren bestätigt der Vergleich der berechneten Strahlbreiten mit dem realen Strahlbild die Korrektheit der Twissparameter.

5 Fazit und Ausblick

Zum Abschluss sollen die Resultate dieser Arbeit zusammengefasst und diskutiert werden. Das Ziel bestand in dem Ermitteln der Elektronenstrahlparameter und Quadrupoleigenschaften der PKAT. Als erstes wurde hierfür ein Quadrupol vermessen, der in seiner Bauform den Quadrupolen entspricht, die in der Strahlführung Verwendung finden. Sein kontinuierliches Magnetfeld wurde in ein rechteckiges Effektivfeld mit einer effektiven Länge von $(48,1 \pm 1,3)$ mm bei einem relativen Fehler von 3% ummodelliert. Der über diese Länge bestehende Magnetfeldgradient liegt bei $(4,36 \pm 0,13)\,{}^{\mathrm{Gs}}/_{\mathrm{mmA}}$ mit einem relativen Fehler von ebenfalls 3%. Einige Jahre zuvor wurden bereits von Karl Heinz Steffens [4] ähnliche Messungen durchgeführt. Die effektive Länge wurde dabei auf 48 mm und der Magnetfeldgradient auf $4,6\,{}^{\mathrm{Gs}}/_{\mathrm{mmA}}$ bestimmt. Dies entspricht Abweichungen von 0,2% und 5% von den in dieser Arbeit ermittelten Werten. Die gute Übereinstimmung der effektiven Längen spricht für die präsentierten Messergebnisse. Die relativ große Abweichung im Magnetfeldgradienten lässt sich durch Schwankungen der magnetischen Permeabilität erklären, welche auch bei baugleichen Quadrupolen leicht auftreten können. Als nächstes wurde überprüft, ob es sich bei den PKAT Quadrupolen tatsächlich um baugleiche Varianten des Laborquadrupols handelt. Dabei stellte sich heraus, dass der in der Strahlführung vorne liegende Magnet tatsächlich dem Labormuster entspricht. Der zweite Quadrupol besitzt jedoch nur die halbe Windungszahl, dafür aber den doppelten Drahtdurchmesser. Dies resultiert in einem halb so großen Magnetfeldgradienten, was im weiteren Verlauf der Auswertung berücksichtigt werden musste.

Nach der erfolgreichen Beschreibung der Quadrupole, konnten die Twissparameter des Elektronenstrahls durch eine Emittanzmessung bestimmt werden. Dafür wurden 600 Strahlfleckaufnahmen bei unterschiedlicher Quadrupolbestromung und verschiedenen Strahlströmen gemacht. Aus den Bildern wurden die Strahlbreiten extrahiert und in den Matrixformalismus aus Kapitel 2.3.4 eingesetzt. Das Ergebnis stellen die Strahlparameter dar, wie sie hinter der Beschleunigungsstrecke der PKAT vorliegen. Sie bilden die Berechnungsgrundlage der Auswirkungen verschiedenster Elemente wie Quadrupolen, Solenoiden et cetera auf die Strahlform und Strahlneigung.

Letztendlich lassen sich die Strahleinhüllende wie in Abbildung 5.1 und auch die Phasenellipse wie in Abbildung 4.6 für vorgegebene Quadrupolbestromungen über den ersten Meter der PKAT visuell darstellen. Das Ziel der Arbeit ist somit erreicht.

Der nächste Schritt sollte darin bestehen, die Transformationsmatrizen sämtlicher in der PKAT verwendeter Bauteile zu ermitteln, um eine komplette Strahlmodel-

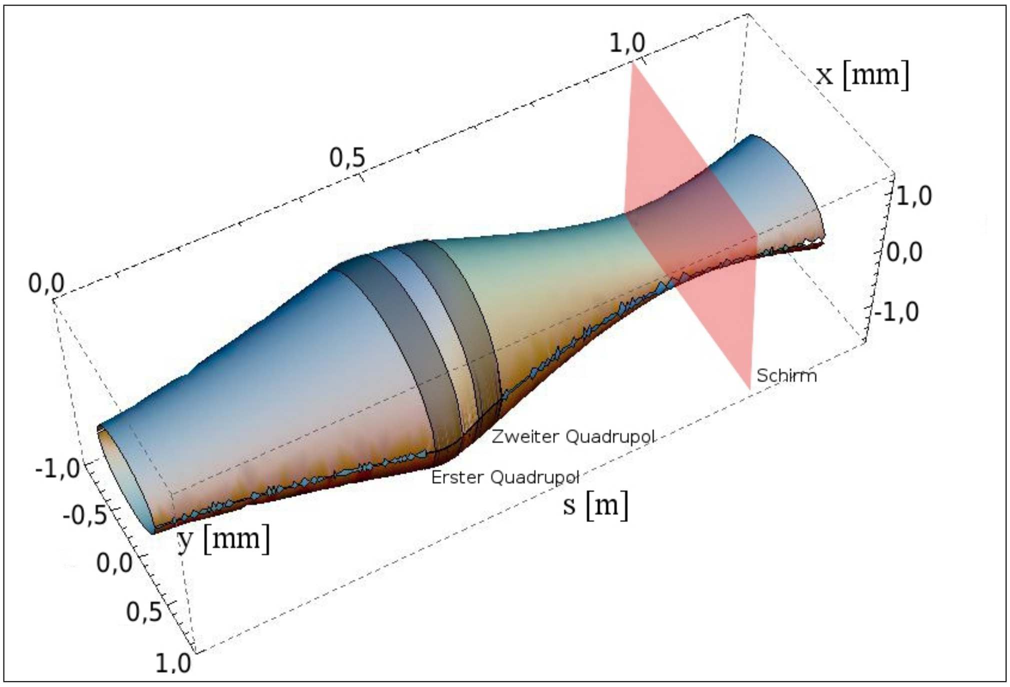


Abbildung 5.1: Theoretische Enveloppe des Elektronenstrahls an der PKAT entlang des ersten Meters der Strahlführung. In grau dargestellt sind die strahlfokussierenden Quadrupole und in rot der Schirm. Die in die Berechnung eingegangenen Bestromungen der Quadrupole liegen hier bei 260 mA (erster Quadrupol) und 280 mA (zweiter Quadrupol).

Strahlstartparameter	**Horizontal**	**rel. Fehler**	**Vertikal**	**rel. Fehler**
ϵ [mm · mrad]	$0{,}771 \pm 0{,}045$	5,8%	$0{,}722 \pm 0{,}040$	5,5%
r [mm]	$0{,}430 \pm 0{,}020$	4,7%	$0{,}390 \pm 0{,}020$	5,1%
r' [mrad]	$1{,}45 \pm 0{,}08$	5,5%	$1{,}93 \pm 0{,}10$	5,2%
α	$-0{,}206 \pm 0{,}008$	3,9%	$-0{,}598 \pm 0{,}018$	3,0%
β [m/rad]	$0{,}244 \pm 0{,}015$	6,1%	$0{,}220 \pm 0{,}013$	5,9%
γ [rad/m]	$2{,}730 \pm 0{,}110$	4,0%	$5{,}180 \pm 0{,}150$	2,9%

Tabelle 5.1: Ermittelte Strahlparameter mit relativem Fehler. Die Werte stellen das wichtigste Resultat der Arbeit dar und bieten eine essentielle Grundlage zur Strahlanalyse. Mit ihnen lassen sich Strahlmodelle unter Einfluss verschiedenster Strahlführungselemente erstellen.

lierung für die gesamte Anlage zu ermöglichen. Desweiteren sollte das Verhalten der Elektronen innerhalb der Beschleunigungsstrecke näher untersucht werden. Es seien nur diese beiden logischen Fortführungen genannt, jedoch sind noch viele weitere Projekte vorstellbar, die auf dieser Arbeit als Fundament aufbauen können.

Literaturverzeichnis

[1] Evtushenko, *Dissertation: Electron Beam Diagnostic at the ELBE Free Electron Laser*, **2004**

[2] K. Wille, *Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen*, **1992**

[3] Dr. E. J. Riehn, *Dissertation: Photokathoden mit internem DBR-Reflektor als Quellen nichtintensiver, spinpolarisierter Elektronenstrahlen*, **2011**

[4] Karl Heinz Steffens, *Konzeption und Optimierung eines 100 keV Injektionssystems zur Erzeugung eines longitudinal polarisierten Elektronenstrahls am MAMI*, **1993**

[5] Karl-Heinz Goldhorn, Hans-Peter Heinz, *Mathematik für Physiker 2*, **2007**

[6] Dipl. Ing. Igor Alexander, *Interne Kommunikation*, **April 2012**

6 Anhänge

6.1 Information zu den angehängten Mathematikaskripten

Die auf der CD zu findenden Mathematikaskripte wurden bis auf das Skript *Vermessung der Strahlbreite* [6] selbstständig angefertigt. Die Erstellung der Programme kostete viel Zeit und stellte einen der anstrengensten Abschnitte dieser Arbeit dar.

6.2 Fehlerrechnungen und Graphiken

Kapitel 4.1:

$$\Delta B'_{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{l}\right)^2 + \left(\frac{B\Delta l}{l^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0{,}3\,\text{Gs}}{8{,}0\,\text{mm}}\right)^2 + \left(\frac{27{,}9\,\text{Gs}\cdot 0{,}1\,\text{mm}}{(8{,}0\,\text{mm})^2}\right)^2} = 0{,}1\,\frac{\text{Gs}}{\text{mm}}$$

$$\Delta L_{\text{eff1}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta F_1}{B'_{\text{eff}}}\right)^2 + \left(\frac{F_1\Delta B'_{\text{eff}}}{B'^2_{\text{eff}}}\right)^2}$$

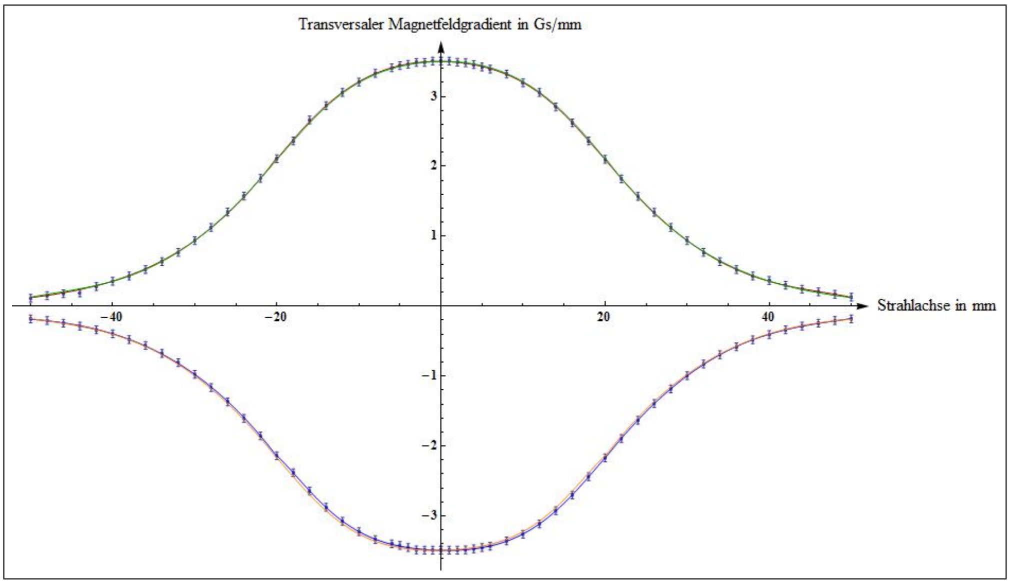
$$= \sqrt{\left(\frac{4,95\ \text{Gs}}{3,5\ \frac{\text{Gs}}{\text{mm}}}\right)^2 + \left(\frac{166,89\ \text{Gs}\cdot 0,1\ \frac{\text{Gs}}{\text{mm}}}{\left(3,5\ \frac{\text{Gs}}{\text{mm}}\right)^2}\right)^2} = 1,96\ \text{mm}$$

$$\Delta L_{\text{eff2}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta F_2}{B'_{\text{eff}}}\right)^2 + \left(\frac{F_2\Delta B'_{\text{eff}}}{B'^2_{\text{eff}}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3,50\ \text{Gs}}{3,5\ \frac{\text{Gs}}{\text{mm}}}\right)^2 + \left(\frac{168,61\ \text{Gs}\cdot 0,1\ \frac{\text{Gs}}{\text{mm}}}{\left(3,5\ \frac{\text{Gs}}{\text{mm}}\right)^2}\right)^2} = 1,70\ \text{mm}$$

$$\Delta L_{\text{mittel}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L_{eff1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L_{eff2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1,96\ \text{mm}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1,70\ \text{mm}}{2}\right)^2} = 1,3\ \text{mm}$$



Horizontale Spiegelung und Originalplot der Magnetfeldvermessung. Die Fits überlagern sich nahezu perfekt, was für eine gute Bausymmetrie des Quadrupols spricht.

Kapitel 4.3:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\Delta \frac{1}{R}}{k}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{R} \cdot \Delta k}{k^2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{0,03\ \mathrm{Gs}}{0,81\ \frac{\mathrm{Gs}}{\mathrm{mm}}}\right)^2 + \left(\frac{0,79\ \mathrm{Gs} \cdot 0,01\ \frac{\mathrm{Gs}}{\mathrm{mm}}}{\left(0,81\ \frac{\mathrm{Gs}}{\mathrm{mm}}\right)^2}\right)^2} = 0,04\ \mathrm{mm}$$

$$\Delta \xi = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{s}\right)^2 + \left(\frac{x \cdot \Delta s}{s^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{0,04\ \mathrm{mm}}{30\ \mathrm{mm}}\right)^2 + \left(\frac{0,98\ \mathrm{mm} \cdot 0,01\ \mathrm{mm}}{(30\ \mathrm{mm})^2}\right)^2} = 0,001$$

Kapitel 4.5:

$$\Delta p = \frac{E\Delta E}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}$$

$$\Delta x_0 = \frac{\Delta(\beta_x^0\epsilon_x)}{\sqrt{\beta_x^0\epsilon_x}}$$

$$\Delta x_0' = \sqrt{\left(\frac{\Delta(\alpha_x^0\epsilon_x)}{\sqrt{\beta_x^0\epsilon_x}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_x^0\Delta(\beta_x^0\epsilon_x)}{2(\beta_x^0\epsilon_x)^{\frac{3}{2}}}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_x = &\frac{1}{2\sqrt{(x_0^2\gamma_x^0\epsilon_x + 2\alpha_x^0\epsilon_x x_0 x_0' + \beta_x^0\epsilon_x x_0'^2)}}(((2x_0\gamma_x^0\epsilon_x \\ &+ 2\alpha_x^0\epsilon_x x_0')\Delta x_0)^2 + ((2\alpha_x^0\epsilon_x x_0 + 2\beta_x^0\epsilon_x x_0')\Delta x_0')^2 \\ &+ (x_0^2\Delta(\gamma_x^0\epsilon_x))^2 + (2x_0x_0'\Delta(\alpha_x^0\epsilon_x))^2 + (x_0'^2\Delta(\beta_x^0\epsilon_x))^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

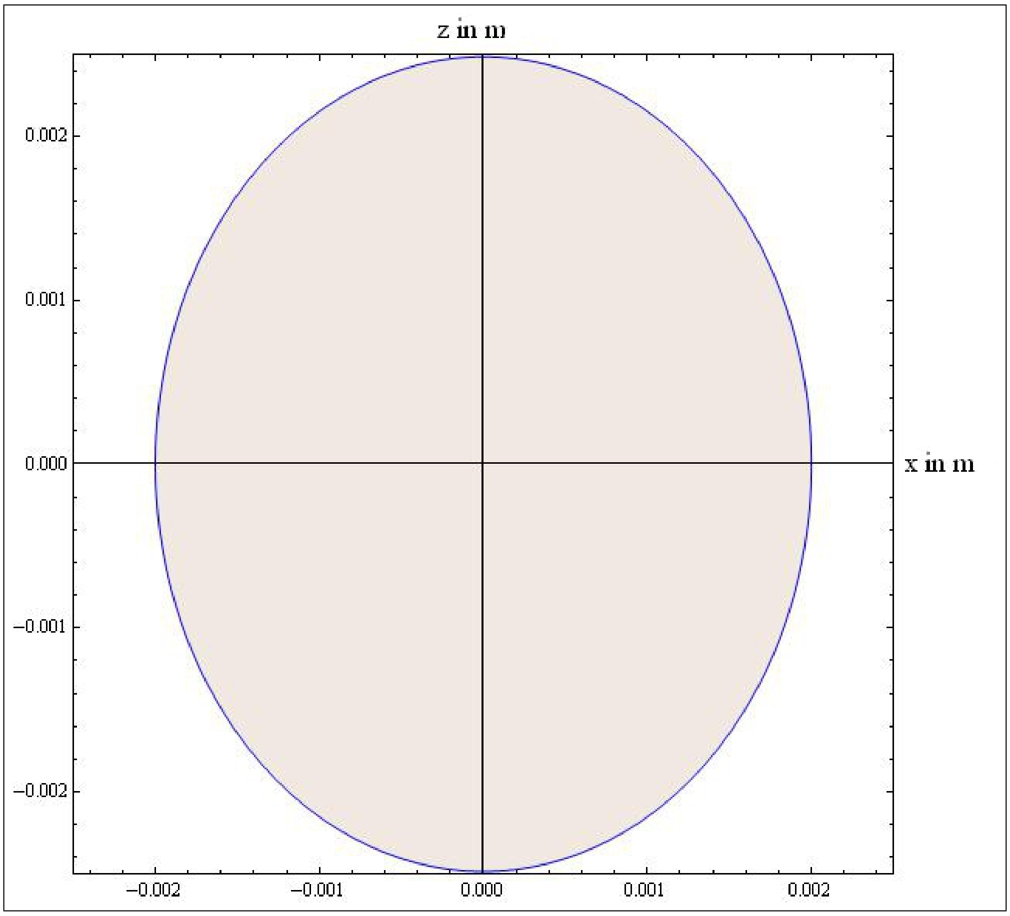
$$\Delta\beta_x^0 = \sqrt{\left(\frac{\Delta(\beta_x^0\epsilon_x)}{\epsilon_x}\right)^2 + \left(\frac{\beta_x^0\epsilon_x\Delta\epsilon_x}{\epsilon_x^2}\right)^2}$$

$$\Delta\alpha_x^0 = \sqrt{\left(\frac{\Delta(\alpha_x^0\epsilon_x)}{\epsilon_x}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_x^0\epsilon_x\Delta\epsilon_x}{\epsilon_x^2}\right)^2}$$

$$\Delta\gamma_x^0 = \sqrt{\left(\frac{\Delta(\gamma_x^0\epsilon_x)}{\epsilon_x}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_x^0\epsilon_x\Delta\epsilon_x}{\epsilon_x^2}\right)^2}$$

	ε*β[mm²]	Δ(ε*β)[mm²]	ε*α[mm]	Δ(ε*α)[mm]	ε*γ	Δ(ε*γ)
Horizontal	0,250	0,009	-0,39	0,03	3,33	0,06
Vertikal	0,234	0,007	-0,22	0,02	1,94	0,03

Tabelle 2: Twissparameter in horizontaler sowie vertikaler Richtung, multipliziert mit der Strahlemittanz



Ortsraumellipse bei unbestromten Quadrupolen am Schirm. Obwohl der Strahl am Anfang der Apparatur nahezu kreisrund ist, bildet er bis zum Schirm aufgrund verschiedener Neigungen in x und z Richtung eine deutliche Ellipsenform aus.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungskommission vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum *Steffen Heidrich*