Johannes Gutenberg-Universität
Fachbereich Rechts- und Wirtschaftswissenschaften

Institut für Statistik und Ökonometrie
Univ.-Prof. Dr. Peter M. Schulze

Unterlagen zur Vorlesung

„Statistik II“

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließende Statistik

Formeln, Tabellen, Beispiele

Wintersemester 2006/2007

Aktuelle Informationen zur Organisation von Lehrveranstaltungen, Klausuren etc. finden Sie auf unserer Homepage:
http://www.statoek.de/

GLIEDERUNG

LITERATURHINWEISE

BLEYMÜLLER, J./ GEHLERT, G./ GÜLICHER, H.	Statistik für Wirtschafts- wissenschaftler 14. überarb. Auflg. München: Vahlen 2004	U b 178
FAHRMEIR, L./ KÜNSTLER, R./ PIGEOT, I./ TUTZ, G.	Statistik: Der Weg zur Datenanalyse 5. verb. Auflg. Berlin u.a.: Springer 2004	U s 387
BOHLEY, P.	Statistik 7. vollst. überarb. u. akt. Auflg. München/Wien: Oldenbourg 2000	U b 218
KOHLER, H.	Statistics for Business and Economics Singapore usw.: Thomson Learning 2002	U k 166

Als Ergänzung:

SCHULZE, P.M.	Beschreibende Statistik 5. Auflg. München/Wien: Oldenbourg 2003	U s 319
SCHULZE, P.M./ DEXHEIMER, V.	Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließenden Statistik Frankfurt (Harri Deutsch) (Erscheint im Dezember 2006)	

1 GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

1.1 Einführung

Rückschlüsse von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit sind nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit möglich.

1.2 Zufällige Ereignisse und Operationen mit zufälligen Ereignissen

(1) Einen Vorgang, dessen Ergebnis nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden kann, nennen wir **Zufallsvorgang**. Das Ergebnis ist ein zufälliges Ereignis.

(2) Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsvorganges bezeichnen wir als **Elementarereignisse** e_i $\quad i = 1, \ldots , n$

(3) Die Menge aller Elementarereignisse eines Zufallsvorganges wird als **Stichprobenraum** S bezeichnet.

(4) Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge des Stichprobenraumes S.

(5) Ein Ereignis tritt ein, wenn irgendeines seiner Elementarereignisse das Ergebnis eines Zufallsvorganges ist.

(6) Das Ereignis, das alle Elementarereignisse des Stichprobenraumes S enthält, heißt **sicheres Ereignis**.

(7) Das Ereignis, das kein Elementarereignis des Stichprobenraumes S enthält, heißt **unmögliches Ereignis**.

(8) Wenn jedes Elementarereignis, das zum Ereignis A gehört, auch im Ereignis B enthalten ist, dann ist das Ereignis A in B enthalten; A ist **Teilereignis** von B: $A \subset B$

(9) Das **Summen-** oder **Vereinigungsereignis** von A und B ist das Ereignis, daß wenigstens eines der Ereignisse A oder B eintritt: $A \cup B$

(10) Der **Durchschnitt** (bzw. das **Produktereignis**) von A und B ist die Menge aller Elementarereignisse, die sowohl zu A als auch zu B gehören: $A \cap B$

(11) Das Ereignis, welches die Elementarereignisse enthält, die zum Ereignis A, aber nicht zum Ereignis B gehören, nennen wir **Differenzereignis**: $A \setminus B$

(12) Die Differenz $S \setminus A$ nennen wir das zu A komplementäre Ereignis $\overline{A}$.

(13) Zwei Ereignisse A und B heißen **unvereinbar** oder **disjunkt**, wenn $A \cap B = \varnothing$ gilt. Verallgemeinerung: Wenn je zwei verschiedene Ereignisse i und j unvereinbar sind, dann nennt man das System von Ereignissen paarweise disjunkt,

$$A_j \cap A_i = \varnothing \quad i \neq j \quad i, j = 1, \ldots , n$$

(14) Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ bilden ein **vollständiges System** S, wenn bei jeder Durchführung eines Zufallsvorgangs eines von ihnen eintreten muß:
$S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
Wenn zusätzlich gilt, daß die Ereignisse paarweise disjunkt sind ($A_i \cap A_j = \varnothing$), dann handelt es sich um ein vollständiges System paarweise disjunkter Ereignisse.

1.3 Verschiedene Wahrscheinlichkeitsbegriffe

1.3.1 Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

P(A): Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A

m: Zahl der für A günstigen Fälle

n: Zahl aller gleichmöglichen Fälle

1.3.2 Statistische Definition der Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

k: Zahl des Eintreffens von Ereignis A

n: Zahl aller beobachteten Zufallsvorgänge

1.3.3 Subjektive Wahrscheinlichkeit

Sie ist ein Maß für den Grad der persönlichen Überzeugung bezüglich eines Ereignisses.

1.4 Axiome und Theoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung

I Axiome

1. Jedem Ereignis $A \subset S$ wird eine nichtnegative Zahl P(A) zugeordnet. Diese Zahl heißt Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: $P(A) \geq 0$.

2. Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses S beträgt Eins: $P(S) = 1$

3. Die Wahrscheinlichkeit der Summe zweier disjunkter Ereignisse A und B ist die Summe der Wahrscheinlichkeit P(A) und P(B) dieser Ereignisse:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ mit $A \cap B = \varnothing$ und $A, B \subset S$.

II Theoreme

1. Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist Null: $P(\emptyset) = 0$.

2. Für die Wahrscheinlichkeit des zu A komplementären Ereignisses $\overline{A}$ in S gilt:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

3. Additionssatz für paarweise disjunkte Ereignisse:

   Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S$ paarweise disjunkt, so gilt:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

4. Additionssatz für zwei beliebige Ereignisse $A, B \subset S$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Bedingte Wahrscheinlichkeit:
   Die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung B $[P(A|B)]$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Voraussetzung, daß das Ereignis B eingetreten ist. Wenn $A, B \subset S$ und $P(B) > 0$, dann ist

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

6. Multiplikationssatz für zwei Ereignisse A und B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

7. Multiplikationssatz für zwei unabhängige Ereignisse A und B:
   Zwei Ereignisse sind dann und nur dann unabhängig, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad [P(A), P(B) > 0]$$

   Wenn A und B unabhängig sind, gilt also

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

8. Für n Ereignisse A_1, A_2, ... , A_n gilt für die Wahrscheinlichkeit des Produkts dieser Ereignisse

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \quad \ldots \quad \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

9. Theorem für die totale Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B:
Wenn die Ereignisse A_1, A_2, ... , A_n paarweise disjunkt sind und in ihrer Gesamtheit den Stichprobenraum S ausmachen, wobei $P(A_i) > 0$ für i = 1, 2, ..., n dann gilt für ein zufälliges Ereignis B ($B \subset S$)

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

10. Bayes-Theorem:
Erfüllen A_1, A_2, ... , A_n und B die Voraussetzungen des Satzes über die totale Wahrscheinlichkeit und ist $P(B) > 0$, so gilt für j = 1, 2, ... , n

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

$$= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$$

1.5 Kombinatorik

- **Permutation**

  ○ ohne Wiederholung
  (1) $P_N = N!$

  Es gilt:
  (2) $0! = 1$

- **Variation** (mit Berücksichtigung der Anordnung)

  ○ ohne Wiederholung
  (3) $V_N^{(n)} = \frac{N!}{(N-n)!}$

  ○ mit Wiederholung
  (4) $V_N^{(n)} = N^n$

- **Kombination** (ohne Berücksichtigung der Anordnung)

  - ohne Wiederholung

(5) $C_N^{(n)} = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$

  - mit Wiederholung

(6) $C_N^{(n)} = \binom{N+n-1}{n} = \frac{(N+n-1)!}{n!\,(N-1)!}$

Es gilt:

(7) $\binom{N}{N} = \binom{N}{0} = 1$

(8) $\binom{N}{1} = N$

(9) $(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^{N-n}\, b^n$

2 EINDIMENSIONALE ZUFALLSVARIABLEN UND IHRE VERTEILUNG

2.1 Begriff einer Zufallsvariablen

Def.: Eine (diskrete) Zufallsvariable X ist eine Größe, die den möglichen Ergebnissen eines Zufallsvorganges im Stichprobenraum S reelle Zahlen zuordnet.

2.2 Diskrete Zufallsvariablen

2.2.1 Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x_i) = f(x_i) = p_i$$

Es gilt : $f(x_i) \geq 0 \qquad \sum f(x_i) = 1$

2.2.2 Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

2.3 Stetige Zufallsvariablen

2.3.1 Wahrscheinlichkeitsdichte (Dichtefunktion)

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Es gilt: $f(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

2.3.2 Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Es gilt: $F'(x) = f(x)$

$$P(a < X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2.4 Parameter der Verteilung einer Zufallsvariablen

2.4.1 Erwartungswert

○ diskrete ZV: $E(X) = \mu = \sum x_i f(x_i) = \sum x_i p_i$

○ stetige ZV: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

○ Eigenschaften: $E(a) = a$

$E(aX) = aE(X)$

$E\left[(bX)^2\right] = b^2 E(X^2)$

$E(a + bX) = a + bE(X)$

$E\left[g(X)\right] = \sum g(x_i) f(x_i)$

2.4.2 Varianz

$$Var(X) = \sigma^2 = E\left[(X - \mu)^2\right]$$

○ diskrete ZV: $Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i)$

$Var(X) = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$

○ stetige ZV: $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$

○ Standardabweichung: $\sqrt{Var(X)} = \sigma_x$

○ Eigenschaften: $Var(a) = 0$

$Var(a + bX) = b^2 Var(X)$

2.4.3 Momente

○ Momente um Null (gewöhnliche Momente) m_r

$$m_r = E(X^r) = \sum x_i^r f(x_i) \qquad r = 1, 2, \ldots$$

r = 1: $m_1 = E(X) = \mu$ Erwartungswert

○ Momente um den Erwartungswert (zentrale Momente) μ_r

$$\mu_r = E\left[(X - \mu)^r\right] = \sum f(x_i)(x_i - \mu)^r$$

r = 2: $\mu_2 = E\left[(X - \mu)^2\right] = Var(X)$ Varianz

r = 3: $\mu_3 = E\left[(X - \mu)^3\right]$ Schiefe

r = 4: $\mu_4 = E\left[(X - \mu)^4\right]$ Wölbung

3 SPEZIELLE EINDIMENSIONALE WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN

3.1 Verteilungen diskreter Zufallsvariablen

3.1.1 Binomialverteilung

○ Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

n: Stichprobenumfang
k: Anzahl der "Erfolge"
π: "Erfolgswahrscheinlichkeit"
$1 - \pi$: "Mißerfolgswahrscheinlichkeit"

○ Verteilungsfunktion $\quad F(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, x$

○ Parameter $\quad E(X) = n \cdot \pi$

$$\mathrm{Var}(X) = n \cdot \pi \cdot (1-\pi)$$

3.1.2 Hypergeometrische Verteilung

○ Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n$$

N: Zahl der Elemente der Grundgesamtheit
M: Zahl der Elemente der Grundgesamtheit mit dem gewünschten Merkmalswert
n: Stichprobenumfang
m: Zahl der Elemente in der Stichprobe mit dem gewünschten Merkmalswert

○ Verteilungsfunktion $\quad F(x) = P(X \le x) = \sum_{m \le x} \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, x$

○ Parameter $\quad E(X) = n \cdot \left(\frac{M}{N}\right)$

$$\mathrm{Var}(X) = n \cdot \left(\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

○ Approximationsregel:

Für $\frac{n}{N} \le 0{,}05$ kann die Hypergeometrische Verteilung durch die Binomialverteilung approximiert werden.

3.1.3 Poissonverteilung

○ Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = k) = \frac{(n\,\pi)^k}{k!}\, e^{-n\,\pi} = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

n: Stichprobenumfang
π : „Erfolgswahrscheinlichkeit“
k: Anzahl der „Erfolge“

○ Verteilungsfunktion

$$F(X) = P(X \le x) = e^{-\lambda} \sum_{k \le x} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ x$$

○ Parameter

$$E(X) = \lambda = n \cdot \pi$$
$$Var(X) = \lambda = n \cdot \pi$$

○ Approximationsregel:

Für $n \ge 50$ und $\pi \le 0{,}1$ kann die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung approximiert werden.

3.2 Verteilungen stetiger Zufallsvariablen

3.2.1 Exponentialverteilung

○ Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda e^{-(\lambda x)} \quad \text{für } x \ge 0;\ 0 \text{ sonst}$$

○ Verteilungsfunktion

$$F(X) = P(X \le x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-(\lambda x)} \quad \text{für } x \ge 0;\ 0 \text{ sonst}$$

○ Parameter

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3.2.2 Normalverteilung

○ Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

Eigenschaften:

- Parameter μ, σ
- Maximum
- Symmetrie
- Wendepunkte
- Asymptot. Annäherung an x-Achse
- Veränderung von μ
- Veränderung von σ

○ Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dt$$

○ Standardisierung

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

○ Dichtefunktion

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

○ Verteilungsfunktion

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

$$= \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

○ Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

$$\frac{X - n\,\pi}{\sqrt{n\,\pi(1-\pi)}} \sim \text{NV } (0;1) \qquad \text{wenn } \; n\,\pi(1-\pi) \geq 9$$

- Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = k) = P(k - 0{,}5 \leq X \leq k + 0{,}5) \approx \phi\left(\frac{k + 0{,}5 - n\,\pi}{\sqrt{n\,\pi(1-\pi)}}\right) - \phi\left(\frac{k - 0{,}5 - n\,\pi}{\sqrt{n\,\pi(1-\pi)}}\right)$$

- Verteilungsfunktion

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0{,}5 \leq X \leq b + 0{,}5) \approx \phi\left(\frac{b + 0{,}5 - n\,\pi}{\sqrt{n\,\pi(1-\pi)}}\right) - \phi\left(\frac{a - 0{,}5 - n\,\pi}{\sqrt{n\,\pi(1-\pi)}}\right)$$

4 MEHRDIMENSIONALE ZUFALLSVARIABLEN UND IHRE VERTEILUNGEN

4.1 Diskrete zweidimensionale Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen

○ Tabelle

Y \ X	y_1	y_2	$\cdots$	y_c	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1c}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2c}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
x_r	p_{r1}	p_{r2}	$\cdots$	p_{rc}	$p_{r\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot c}$	

○ Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} p_{ij} \text{ für alle } x = x_i, y = y_j & i = 1, 2, .., r \\ 0 \text{ für alle übrigen } (x,y) & j = 1, 2, .., c \end{cases}$$

p_{ij}: gemeinsame Wahrscheinlichkeit

○ Verteilungsfunktion

$$P(X \le x, Y \le y) = F(x,y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} f(x_i, y_j)$$

4.2 Randverteilungen, Bedingte Verteilungen und Unabhängigkeit

○ Randverteilungen

$$f_x(x_i) = f(x_i, y_1) + f(x_i, y_2) + ... = p_{i.}$$

$$f_y(y_j) = f(x_1, y_j) + f(x_2, y_j) + ... = p_{.j}$$

○ Bedingte Verteilungen

von X bei gegebenem y_j: $P(X = x_i \mid Y = y_j) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \dfrac{p_{ij}}{p_{.j}}$

von Y bei gegebenem x_i: $P(Y = y_j \mid X = x_i) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \dfrac{p_{ij}}{p_{i.}}$

○ Unabhängigkeit

$f(x_i, y_j) = p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}$ (für alle i, j)

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{f_x(x_i) f_y(y_j)}{f_y(y_j)} = f_x(x_i)$$

4.3 Parameter zweidimensionaler Zufallsvariablen X und Y

○ Variablenverknüpfung

Additives Modell: $g(X,Y) = X + Y$

Multiplikatives Modell: $g(X,Y) = X \cdot Y$

○ Erwartungswert

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$

$$E(X \cdot Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}$$

$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ nur bei Unabhängigkeit

○ Varianz

$\mathrm{Var}(X+Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xy}$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \\ \mathrm{Var}(X-Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \end{aligned}\right\} \quad \text{nur bei Unabhängigkeit}$$

○ Kovarianz und Korrelationskoeffizient

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{xy} = E\left[\left(X-\mu_x\right)\left(Y-\mu_y\right)\right]$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j \left(x_i - \mu_x\right)\left(y_j - \mu_y\right) \cdot f\left(x_i, y_j\right)$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \cdot f\left(x_i, y_j\right) - \mu_x \mu_y$$

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \text{mit: } -1 \le \rho_{xy} \le +1$$

$$\hat{\rho} = r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

^: Geschätzter Wert

○ Beispiel zum Korrelationskoeffizienten

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x} = x_i'$	$y_i - \bar{y} = y_i'$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	4	4	–3	–4	9	16	12
2	4	5	–3	–3	9	9	9
3	5	6	–2	–2	4	4	4
4	6	6	–1	–2	1	4	2
5	8	8	1	0	1	0	0
6	8	10	1	2	1	4	2
7	10	12	3	4	9	16	12
8	11	13	4	5	16	25	20
	56	64	0	0	50	78	61

$$\bar{x} = \frac{56}{8} = 7 \qquad \bar{y} = \frac{64}{8} = 8$$

5 ELEMENTE DER STICHPROBENTHEORIE

5.1 Grundbegriffe

○ Unterscheidung:

- der Größen der Grundgesamtheit und der Stichprobe
- beim Ziehen der Stichproben von „mit Zurücklegen“ und „ohne Zurücklegen“
- der Schlussweisen „Inklusionsschluß“ und „Repräsentationsschluß“

○ Betrachtung eines Stichprobenwertes als Zufallsvariable

5.2 Stichprobenfunktion und Stichprobenverteilung

5.2.1 Stichprobenfunktion

$$\hat{\Theta} = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

5.2.2 Stichprobenmittel und seine Verteilung

$$E(\overline{X}) = \mu$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$ (Ziehen mit Zurücklegen)

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$ (Ziehen ohne Zurücklegen)

σ_X : Standardfehler von X
$\sigma_{\overline{X}}$: Standardfehler von $\overline{X}$
n : Stichprobenumfang
N : Grundgesamtheit

5.3 Zwei wichtige Sätze der Statistik

5.3.1 Gesetz der großen Zahlen (für das Stichprobenmittel)

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{X}_n - \mu| \leq \varepsilon) = 1$$

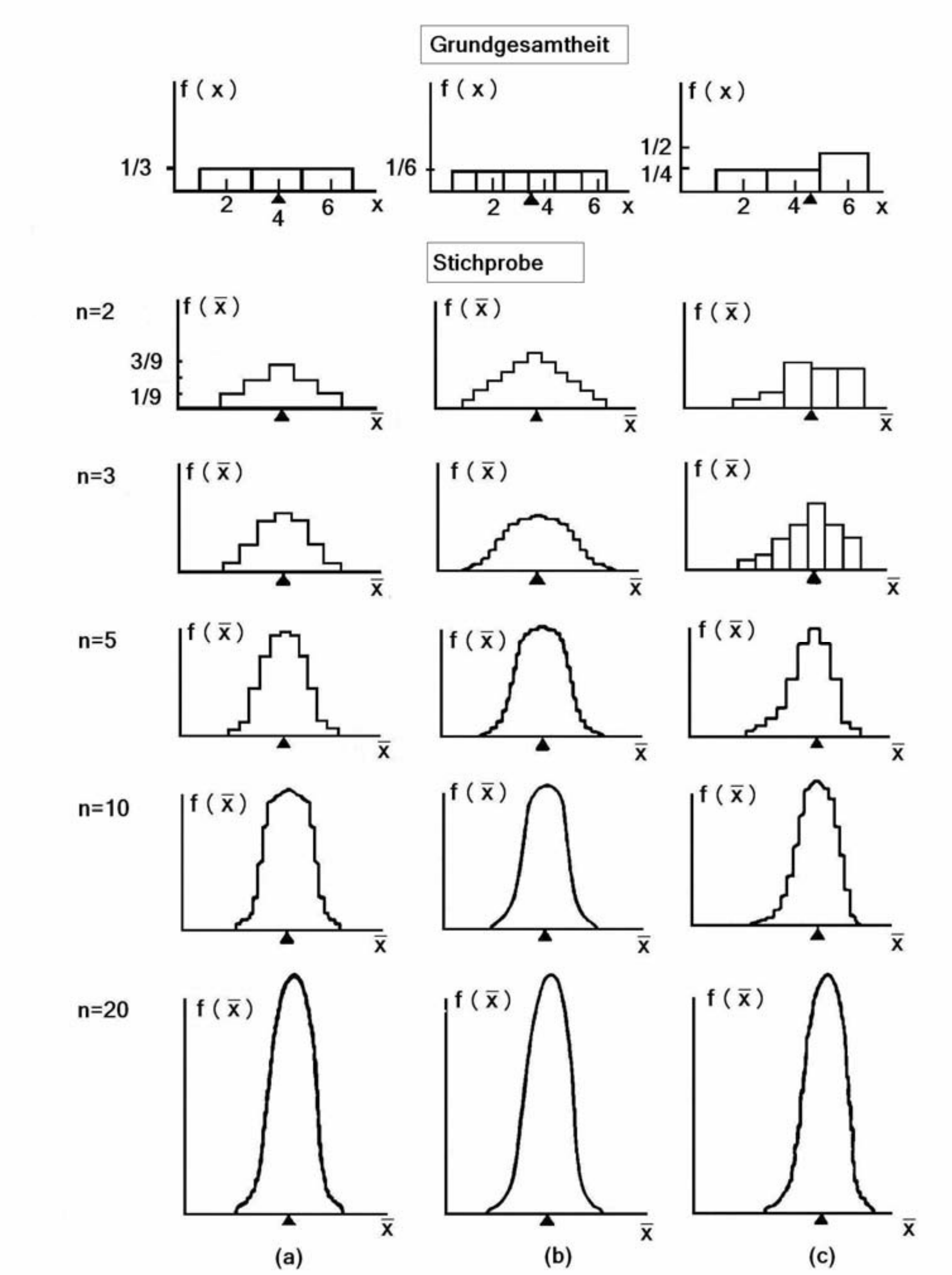
5.3.2 Zentraler Grenzwertsatz

○ Für Mittelwerte:

Wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Stichprobe mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$ ist, dann ist $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ bei großen n annähernd normalverteilt mit $\left(\mu; \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)$.

Es gilt dann: $$\overline{X}_n^* = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$

○ Illustration Zentraler Grenzwertsatz:
Verteilung des Stichprobenmittels bei steigendem Stichprobenumfang n



6 SCHÄTZMETHODIK

6.1 Punktschätzungen

6.1.1 Methoden

○ Momentenmethode

○ Methode der kleinsten Quadrate

○ Maximum Likelihood-Methode

Unbekannter Parameter der Grundgesamtheit Θ	Schätzparameter $\hat{\Theta}$	Konkrete Schätzung (Realisation)
Mittelwert μ	$\hat{\mu}$	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$
Varianz σ^2	$\hat{\sigma}^2$	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$
Anteilswert π	$\hat{\pi}$	$p = \frac{k}{n}$

6.1.2 Eigenschaften von Schätzfunktionen

○ Erwartungstreue

$$E(\hat{\Theta}) = \Theta$$

○ Konsistenz

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\hat{\Theta}_n - \Theta\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

○ Relative Effizienz

$$Var(\hat{\Theta}_1) < Var(\hat{\Theta}_2)$$

6.2 Intervallschätzungen

6.2.1 Konfidenzintervall für μ einer NV, σ bekannt

$$P\left(\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$1-\alpha$: Konfidenzniveau, Rückschlusswahrscheinlichkeit

6.2.2 Konfidenzintervall für μ einer NV, σ unbekannt, t-Verteilung

○ t-Verteilung

○ Konfidenzintervall

$$P\left(\bar{x} - t\, s_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + t\, s_{\bar{x}}\right) = 1 - \alpha \qquad \text{mit } s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

t-Wert der t-Verteilung bei $\frac{\alpha}{2}$ und (n – 1) Freiheitsgraden.

6.2.3 Konfidenzintervall für π einer Binomialverteilung

$$P\left(p - z\, s_p \le \pi \le p + z\, s_p\right) = 1 - \alpha \qquad \text{mit } s_p = \sqrt{\frac{pq}{n-1}}$$

6.3 Notwendiger Stichprobenumfang

$$n = \frac{(z\sigma)^2}{d^2}$$

z: Zuverlässigkeitskoeffizient

d: Genauigkeit

7 TESTVERFAHREN

7.1 Prinzip eines Tests

7.1.1 Einführungsbeispiel

Schlussfolgerungen

Wahrer Zustand \ Entscheidung	Annahme von H_0	Ablehnung von H_0
H_0 ist richtig	Richtige Entscheidung $P = 1 - \alpha$	Fehler 1. Art $P = \alpha$
H_0 ist falsch	Fehler 2. Art $P = \beta$	Richtige Entscheidung $P = 1 - \beta$

7.1.2 Testschema

1 Formulierung von H_0 und H_1

2 Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit / des Signifikanzniveaus

3 Festlegung des Prüfmaßes und der Testverteilung

4 Aufstellung der Entscheidungsregel

5 Durchführung der Berechnungen

6 Entscheidung fällen / Schlussfolgerung ziehen

7.2 Spezielle Tests

7.2.1 Parametertests

7.2.1.1 Einstichprobentests

- **Test über μ, σ bekannt**

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$$

- **Test über μ, σ unbekannt**

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$$ mit $\bar{n} = n - 1$ Freiheitsgraden

- **Test über σ^2, χ^2 - Verteilung**

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = \chi^2$$ mit n – 1 Freiheitsgraden

- **Test über π**

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sigma_P} \qquad \text{mit } \sigma_P = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

7.2.1.2 Zweistichprobentests

- **Test über $\mu_1 = \mu_2$, σ bekannt**

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

$$\text{mit } \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad \text{wenn } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

Der Index 1 bezieht sich jeweils auf die erste Stichprobe, der Index 2 auf die zweite Stichprobe.

- **Test über $\mu_1 = \mu_2$, σ unbekannt**

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \qquad \text{mit } \bar{n} = n_1 + n_2 - 2 \text{ Freiheitsgraden}$$

$$\text{mit } s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = s^* \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \qquad \text{und } s^* = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

- **Test über $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, F-Verteilung**

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \qquad \text{mit } \bar{m} = n_1 - 1, \bar{n} = n_2 - 1 \text{ Freiheitsgraden}$$

- **Test über $\pi_1 = \pi_2$**

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{s_{p_1 - p_2}} = \frac{p_1 - p_2}{s_{p_1 - p_2}}$$

$$\text{mit } s_{p_1 - p_2} = \sqrt{p^*\left(1 - p^*\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \qquad \text{und } p^* = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

7.2.2 Nichtparametrische Tests

7.2.2.1 Unabhängigkeitstest

Für 1 Stichprobe, 2 Zufallsvariablen

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left[f_{ij}^{(beob)} - f_{ij}^{(erw)}\right]^2}{f_{ij}^{(erw)}}$$

mit $(r-1)(c-1)$ Freiheitsgraden

und $f_{ij}^{(erw)} = \frac{f_{i.} \cdot f_{.j}}{n} = p_{i.} \cdot p_{.j} \cdot n$ $\quad$ ($p_{i.}$; $p_{.j}$: Werte der Randverteilungen)

7.2.2.2 Homogenitätstest

Für mehrere Stichproben, 1 Zufallsvariable

Formel siehe unter 7.2.2.1

8 REGRESSIONSANALYSE

8.1 Problemstellung

Quantitative Analyse funktionaler Abhängigkeiten wirtschaftlicher Größen

8.2 Lineare einfache Regression

8.2.1 Grundannahmen des Modells

○ Gleichungen

$$E(Y|X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

$$Y_i = E(Y|X_i) + \varepsilon_i$$

○ Modellannahmen

I $E(\varepsilon_i) = 0$

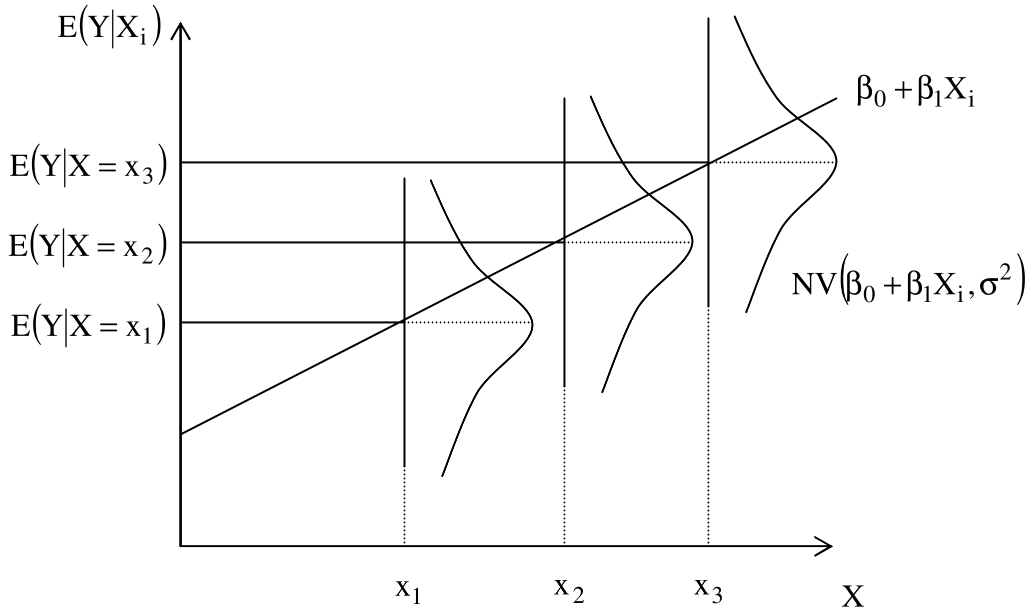
II $\text{Var}(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$ (Homoskedastie)

III $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$ (Nicht-Autokorrelation)

IV $\text{Cov}(\varepsilon_i, X_i) = 0$

V $\varepsilon_i \sim NV(0, \sigma^2)$

ε_i / ε_j: latente Variablen



8.2.2 Bestimmung der Schätzfunktion mit der KQ-Methode

○ Ansatz

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i = b_0 + b_1 x_i$$

$$y_i = \hat{y}_i + e_i$$

○ Normalgleichungen

$$b_0 n + b_1 \sum x_i = \sum y_i$$

$$b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

○ Regressionskoeffizienten

$$b_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$b_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

○ Koordinatentransformation

mit $y_i - \overline{y} = y_i'$ $\quad x_i - \overline{x} = x_i'$

$$b_1 = \frac{\sum y_i' x_i'}{\sum x_i'^2}$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x}$$

○ Beispiel 1: Nachfragefunktion

y_i (1)	x_i (2)	$x_i y_i$ (3)	x_i^2 (4)	y_i' (5)	x_i' (6)	$y_i' x_i'$ (7)	$x_i'^2$ (8)	$\hat{y}_i$ (9)	$y_i - \hat{y}_i = e_i$ (10)	e_i^2 (11)	$y_i'^2$ (12)
40	4	160	16	17,1	-15,6	-266,76	243,36	36,47	3,5	12,25	292,41
44	5	220	25	21,1	-14,6	-308,06	213,16	35,60	8,4	70,56	445,21
32	7	224	49	9,1	-12,6	-114,66	158,76	33,86	-1,9	3,61	82,81
25	12	300	144	2,1	-7,6	-15,96	57,76	29,51	-4,5	20,25	4,41
19	16	304	256	-3,9	-3,6	14,04	12,96	26,03	-7,0	49,00	15,21
22	20	440	400	-0,9	0,4	-0,36	0,16	22,55	-0,5	0,25	0,81
15	25	375	625	-7,9	5,4	-42,66	29,16	18,20	-3,2	10,24	62,41
13	30	390	900	-9,9	10,4	-102,96	108,16	13,86	-0,9	0,81	98,01
9	37	333	1369	-13,9	17,4	-241,86	302,76	7,76	1,2	1,44	193,21
10	40	400	1600	-12,9	20,4	-263,16	416,16	5,15	4,9	24,01	166,41
229	196	3146	5384	0	0	-1342,40	1542,40		0	192,42	1360,90

$n = 10$

$\bar{y} = 22{,}9$

$\bar{x} = 19{,}6$

8.2.3 Beurteilung der Güte der Schätzergebnisse

- **Standardfehler der Schätzung**

$$s_e^2 = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

- **Test und Konfidenzintervall für β_1**

$$\operatorname{Var}(b_1) = s_{b_1}^2 = \frac{s_e^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_e^2}{\sum x_i'^2}$$

○ Test

$$t = \frac{b_1 - \beta_1}{s_{b_1}} \qquad \text{mit } \bar{n} = n - 2 \text{ Freiheitsgraden}$$

○ Konfidenzintervall

$$P\left(b_1 - t \cdot s_{b_1} \le \beta_1 \le b_1 + t \cdot s_{b_1}\right) = 1 - \alpha$$

t-Wert für $\frac{\alpha}{2}$ und $\bar{n} = n - 2$ Freiheitsgrade

8.2.4 Determinationskoeffizient (Bestimmtheitsmaß) R^2

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = \frac{b_1^2 \sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

Beispiel 2: Excess Return-Modell

- Modell

(1) $r_{jt} - r_{ft} = \alpha_j + \beta_j (r_{Mt} - r_{ft}) + \varepsilon_{jt}$

r_{jt} : Rendite des WP_j $\quad r_{jt} = \dfrac{K_{jt} - K_{jt-1}}{K_{jt-1}}$

r_{Mt} : Marktrendite, gleiche Berechnung wie bei r_{jt}

r_{ft} : Zinssatz für risikolose Zinsanlage

- Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l}\text{j: ALLIANZ}\\ \text{f: EURIBOR}\\ \text{M: DAX}\end{array}\right\} \text{T = 184 wöchentliche Werte}$$

- Schätzung

Mit $y_{jt} = r_{jt} - r_{ft}$

$x_{Mt} = r_{Mt} - r_{ft}$

(2) $y_{jt} = \alpha_j + \beta_j x_{Mt} + \varepsilon_{jt}$

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable Y (Allianz)
Usable Observations  183  Degrees of Freedom  181
R**2   0.624846

   Variable        Coeff             Std Error    T-Stat      Signif
 ********************************************************************
 1. Constant     0.0060681103      0.0039843867    1.52297  0.12951087
 2. X            1.1933747488      0.0687315727   17.36283  0.00000000
```

8.3 Multiple und nichtlineare Regression

○ Multiple Regression

(1) $E(y|x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{mi}) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + ... + \beta_m x_{mi}$ $\quad$ $i = 1, 2, \ldots, n$

$k = 1, 2, \ldots, m$

(2) $y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + ... + b_m x_{mi} + e_i$

(3) $\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{e}$

(4) $\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}$

○ Nichtlineare Regression

- Nichtlinearität in den Variablen
  z. B. Parabolische Regression $\quad \hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2$

- Nichtlinearität in den Parametern
  z. B. Potenzfunktion $\quad \hat{y}_i = b_0 \, x_i^{b_1}$

○ Beispiel Multiple Regressionsanalyse

(1) Daten

NONAME00.TXT{o}

JAHR	BENZINV	EINKO	PBENZIN	PAUTO
1	129.7	6036	92.5	104.5
2	131.3	6113	91.4	104.5
3	137.1	6271	91.9	104.1
4	141.6	6378	91.8	103.5
5	148.8	6727	91.4	103.2
6	155.9	7027	94.9	100.9
7	164.9	7280	97.0	99.1
8	171.0	7513	100.0	100.0
9	183.4	7728	101.4	102.8
10	195.8	7891	104.7	104.4
11	207.4	8134	105.6	107.6
12	218.3	8322	106.3	112.0
13	226.8	8562	107.6	111.0
14	237.9	9042	118.1	111.1
15	225.8	8867	159.9	117.5
16	232.4	8944	170.8	127.6
17	241.7	9175	177.9	135.7
18	249.2	9381	188.2	142.9
19	261.3	9735	196.3	153.8
20	248.9	9829	265.6	166.0
21	226.8	9722	369.1	179.3
22	225.6	9769	410.9	190.2
23	228.8	9725	389.4	197.6
24	239.6	9930	376.4	202.6
25	244.7	10421	370.7	208.5
26	245.8	10563	373.8	215.2
27	269.4	10780	292.1	224.0

Variablen:

BENZINV	Y	Benzinverbrauch (nur für Autos) pro Kopf in Litern
EINKO	X_1	Reales verfügbares Pro-Kopf-Einkommen in €
PBENZIN	X_2	Preisindex für Benzin (Jahr 8 = 100)
PAUTO	X_3	Preisindex für neue Autos (Jahr 8 = 100)

Schätzgleichung:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1t} + \hat{\beta}_2 x_{2t} + \hat{\beta}_3 x_{3t}$$

(2) Ergebnisse

Deskriptive Statistiken:

NONAME00.TXT{o}

Series	Obs	Mean	Std Error	Minimum	Maximum
BENZINV	27	207.033333	43.798929	129.700000	269.400000
EINKO	27	8513.518519	1455.629031	6036.000000	10780.000000
PBENZIN	27	190.211111	116.790563	91.400000	410.900000
PAUTO	27	138.133333	42.797466	99.100000	224.000000

Korrelationen:

NONAME00.TXT{o}

Correlation Matrix

	BENZINV	EINKO	PBENZIN	PAUTO
BENZINV	1.000000000000	0.958797276997	0.636105743290	0.696304348348
EINKO	0.958797276997	1.000000000000	0.812161649756	0.851934874370
PBENZIN	0.636105743290	0.812161649756	1.000000000000	0.952468656464
PAUTO	0.696304348348	0.851934874370	0.952468656464	1.000000000000

Modellzusammenfassung und Koeffizienten:

NONAME00.TXT{o}

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable BENZINV
Usable Observations     27      Degrees of Freedom    23
Centered R**2      0.980757      R Bar **2    0.978247
Uncentered R**2    0.999205      T x R**2      26.979
Mean of Dependent Variable       207.03333333
Std Error of Dependent Variable   43.79892868
Standard Error of Estimate         6.45986308
Sum of Squared Residuals         959.78611457
Regression F(3,23)                   390.7454
Significance Level of F            0.00000000
Log Likelihood                      -86.51813
Durbin-Watson Statistic              0.640697

   Variable                     Coeff        Std Error      T-Stat     Signif
*******************************************************************************
1.  Constant               -91.62060198  10.53685347     -8.69525  0.00000001
2.  EINKO                    0.04014106   0.00166208     24.15115  0.00000000
3.  PBENZIN                 -0.11340476   0.03560830     -3.18478  0.00412589
4.  PAUTO                   -0.15576907   0.10826605     -1.43876  0.16368832
```

9 TABELLEN

Binomialverteilung

Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X=k)=\binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^{n-k}$

		π									
n	k	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0313
	1	.2036	.3281	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1563
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0005	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1563
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0313
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039

		π									
n	k	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.3293	.3835	.3248	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
	2	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.1998	.1395	.0887	.0513	.0269
	3	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
	4	.0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
	5	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1321	.1830	.2207	.2360	.2256
	6	.0000	.0003	.0023	.0097	.0268	.0566	.0985	.1471	.1931	.2256
	7	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
	8	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
	2	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
	3	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
	4	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
	5	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
	6	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.1766	.2124	.2256
	7	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
	8	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0048	.0125	.0277	.0537
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002

Poissonverteilung

Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

					λ					
k	.005	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0	.9950	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
1	.0050	.0099	.0196	.0291	.0384	.0476	.0565	.0653	.0738	.0823
2	.0000	.0000	.0002	.0004	.0008	.0012	.0017	.0023	.0030	.0037
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

					λ					
k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0003	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

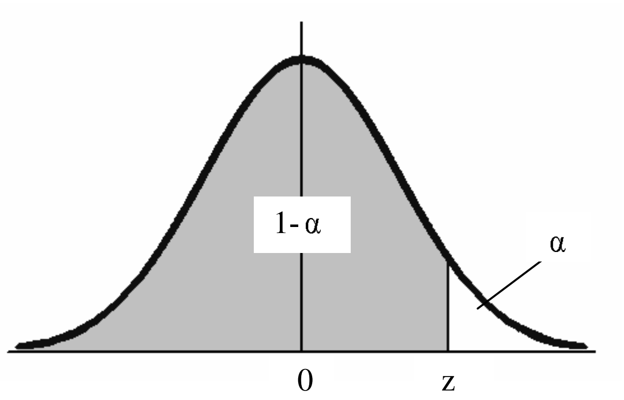
					λ					
k	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

					λ					
k	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

					λ					
k	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1733	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

					λ					
k	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0281	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

Standard-Normalverteilung

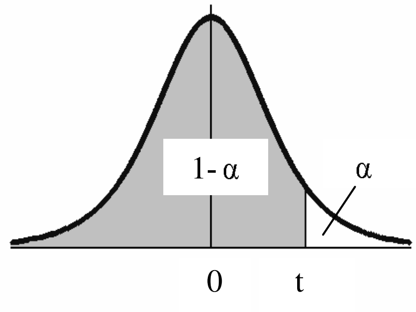


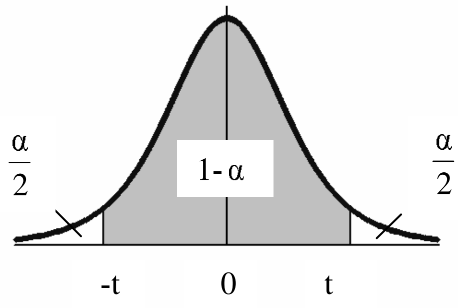
Werte der Verteilungsfunktion

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
–3.	.0013	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000
–2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
–2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
–2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
–2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
–2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
–2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
–2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
–2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
–2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
–2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
–1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
–1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
–1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
–1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
–1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
–1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
–1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
–1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
–1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
–1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
–.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
–.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
–.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
–.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
–.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
–.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
–.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
–.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
–.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
–.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3	.9987	.9990	.9993	.9995	.9997	.9998	.9998	.9999	.9999	1.0000

Quantile der t-Verteilung

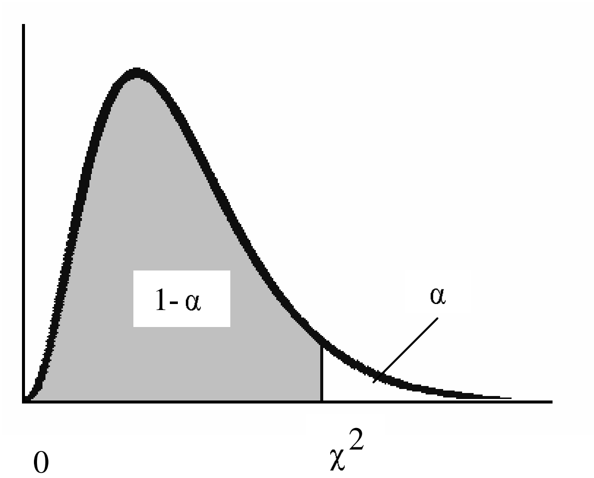




$\bar{n}$: Zahl der Freiheitsgrade   Hinweis: $t_{\bar{n},1-\alpha} = -t_{\bar{n},\alpha}$

$1-\alpha$ bzw. $1-\frac{\alpha}{2}$ / $\bar{n}$	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.677	.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Quantile der χ^2-Verteilung

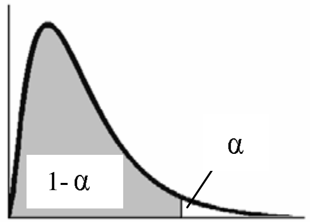


$1-\alpha$ / $\bar{n}$	0.005	0.010	0.025	0.050	0.950	0.975	0.990	0.995
1	.000	.000	.001	.004	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.010	.020	.051	.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	.072	.115	.216	.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	.207	.297	.484	.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	.412	.554	.831	1.145	11.070	12.833	15.086	16.750
6	.676	.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672

Quantile der F-Verteilung

$\overline{m}$ = Zahl der Freiheitsgrade der größten Varianz

$1 - \alpha = 0{,}95$ Hinweis: $F_{\overline{m},\overline{n},1-\alpha} = 1 / F_{\overline{n},\overline{m},\alpha}$



$\overline{n}$ \ $\overline{m}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Quantile der F-Verteilung

$1-\alpha = 0{,}99$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00