
Reduktionsmodelle zur Kreditderivatebewertung

Markus O. Starck und Siegfried Trautmann

CoFaR Center of Finance and Risk Management,
Johannes Gutenberg-Universität Mainz,
D-55099 Mainz
starck@finance.uni-mainz.de
traut@finance.uni-mainz.de

Gliederung

1	Einleitung	474
2	Kernelemente eines Reduktionsmodells	475
2.1	Deterministische Ausfallwahrscheinlichkeiten	475
2.2	Stochastische Ausfallwahrscheinlichkeiten	477
2.3	Wiedergewinnungsmodelle	479
3	Risikoneutrale Bewertung	481
3.1	Wertdarstellungen für Kreditderivate	481
3.2	Alternative Wertdarstellungen für Anleihen	484
3.3	Kalibrierung des Hazardprozesses	485
3.4	Bewertung mittels Monte Carlo-Simulation	485
4	Fallstudie	486
4.1	Datengrundlage und Kalibrierung der Modelle	486
4.2	Vergleich von berechneten und marktgegebenen CDS-Prämien ...	489
5	Zusammenfassung	491
	Literaturverzeichnis	492

1 Einleitung

Ein Kreditderivat verbrieft einen Anspruch auf Zahlungen, deren Höhen sich aus Eigenschaften eines oder mehrerer Kredite ableiten. Je nach Vereinbarung können Zahlungen durch so genannte *Kreditereignisse* wie z. B. Ratingänderungen, Verzug der Zins- oder Tilgungszahlungen, Insolvenz oder Schuldenrestrukturierung ausgelöst werden. Des Weiteren können Marktpreise von an Börsen gehandelten Anleihen, Zinsspannen (Credit Spreads) oder, bei Ausfall, die Ausfallhöhe herangezogen werden. Diese Merkmale beziehen sich auf die Messung der Kreditqualität bzw. auf deren Änderungen. Mit Hilfe von Kreditderivaten lassen sich somit verschiedene Kreditrisiken eines oder mehrerer Kreditengagements isolieren und an Dritte übertragen, ohne dass die jeweiligen Schuldner davon erfahren müssen. Kreditderivate werden daher oft zur Absicherung gegen Änderungen der Kreditqualität eingesetzt. Sie dienen aber auch dem Risikoverkauf von Einzelpositionen, zur Diversifikation von Risikokonzentrationen oder dem bewussten Eingehen von Risiken zwecks Renditesteigerung. Sie ermöglichen ein aktives Management der Risiken eines Kreditportfolios.

Das am häufigsten gehandelte Kreditderivat ist der *Credit Default Swap* (CDS). Der Sicherungsgeber (Risikokäufer) erhält während einer festgelegten Laufzeit regelmäßig eine Prämie und verpflichtet sich im Gegenzug, dem Sicherungsnehmer (Risikoverkäufer) bei Ausfall eines Referenztitels eine Ausgleichszahlung zu leisten. Die International Swaps and Derivatives Association (ISDA) entwickelt Rahmenverträge für Kreditderivate, um deren Handel zu standardisieren und zu vereinfachen. Für die Bewertung sind geeignete Modelle zu entwickeln, welche die Wertentwicklung der zugrunde liegenden Anleihen und die damit verbundenen Kreditrisiken berücksichtigen.

Für die Modellierung von Kreditrisiken lassen sich zwei Ansätze nennen. *Firmenwertmodelle* (structural models) folgen der Idee *Black/Scholes'* (1973) und *Merton's* (1974), eine ausfallrisikobehaftete Anleihe mit Hilfe einer Option auf den Unternehmenswert zu bewerten. Der Wert einer ausfallrisikobehafteten Null-Kuponanleihe entspricht dabei dem Wert einer sicheren Anlage in Höhe des Nennwertes abzüglich des Wertes eines Puts auf den Firmenwert. Der Wert und die Verbindlichkeiten einer Unternehmung sind allerdings nicht direkt beobachtbar und deren Schätzung ist meist schwierig. Der vorliegende Artikel behandelt die zweite Modellklasse, die einen Ausfall losgelöst von fundamentalen Unternehmensdaten beschreibt und daher *Reduktionsmodelle* (reduced-form models) genannt wird. Einen wichtigen Spezialfall der Reduktionsmodelle stellen die *Intensitätsmodelle* von *Jarrow/Turnbull* (1995), *Jarrow/Lando/Turnbull* (1997) und *Lando* (1998) dar. Zentraler Bestandteil eines Reduktionsmodells ist die Modellierung der stochastischen Ausfallzeit, deren mögliche Varianten im Folgenden beschrieben und anhand eines Fallbeispiels kalibriert werden sollen.

2 Kernelemente eines Reduktionsmodells

Zentraler Bestandteil eines Reduktionsmodells ist die Modellierung des Ausfallzeitpunktes. Tritt ein Ausfall einer Unternehmung vor Laufzeitende der Verbindlichkeit ein, so können die vertraglich vereinbarten Zahlungen nicht in vollem Umfang erfolgen. In einer sehr allgemeinen Formulierung definiert man, dass ein Kreditereignis zu demjenigen Zeitpunkt eintritt, in dem ein wachsender stochastischer Prozess eine exponentialverteilte Zufallsvariable überschreitet.¹

Definition 1. Sei $\Gamma \equiv \{\Gamma_t : 0 \leq t \leq T\}$ ein wachsender, rechtsstetiger Prozess, der in $\Gamma_0 = 0$ startet. Weiterhin sei eine positive Zufallsvariable η gegeben, die exponentialverteilt mit Parameter 1 ist ($\eta \sim \text{Exp}(1)$) und unabhängig von der Entwicklung von Γ . Der Ausfallzeitpunkt (kurz: die Ausfallzeit) τ ist definiert durch

$$\tau \equiv \inf\{t \in (0, T) : \Gamma_t \geq \eta\}, \tag{1}$$

wobei die Vereinbarung $\inf \emptyset = +\infty$ gelte. Wegen $\Gamma_0 = 0 < \eta$ ist τ strikt positiv. Der Prozess Γ heißt Hazardprozess.

Das zugrundeliegende stochastische Modell² kann man sich so vorstellen, als würde hinter einem Vorhang genau einmal eine Zufallszahl η gezogen. Den Marktteilnehmern wird nur deren Verteilung, aber nicht die Realisation genannt. Es werden die Eigenschaften des Hazardprozesses und zusätzlich zu jedem Zeitpunkt t die Realisation des Hazardprozesses Γ_t sowie Eintritt oder Ausbleiben des Ausfalls für diesen Zeitpunkt bekannt gegeben. Basierend auf diesem Informationsstand bestimmen die Marktteilnehmer nun Ausfallwahrscheinlichkeiten; sie können aber den Ausfallzeitpunkt nicht vorhersagen, da sie die Realisation von η nicht kennen.

2.1 Deterministische Ausfallwahrscheinlichkeiten

Mit der Spezifikation des Hazardprozesses können nun gewünschte Eigenschaften der Ausfallzeit in einem Reduktionsmodell festgelegt werden. Für den Spezialfall, dass der Hazardprozess eine Funktion $\Gamma(t)$ und somit deterministisch ist, kann mit den Gleichungen

¹ Eine allgemeinere Definition der Ausfallzeit, die zusätzlich auch Firmenwertmodellen zugrunde gelegt werden kann, geben *Bélangier/Shreve/Wong* (2004).

² Der formale Modellrahmen ist durch eine stochastische Basis $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, Q)$ gegeben. Der Hazardprozess ist an eine Filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ adaptiert, die durch einen Sprungdiffusionprozess erzeugt wird. Hinzu kommt die Information über einen eventuellen Ausfall: $\mathbb{G} = \{\mathcal{G}_t : 0 \leq t \leq T\} \equiv \{\mathcal{F}_t \vee \sigma(\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}) : 0 \leq t \leq T\}$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q wird in Abschnitt 3 behandelt. Bei den noch folgenden Spezialisierungen wird die stochastische Basis nicht angegeben. Eine ausführlichere Beschreibung findet man z. B. in *Bielecki/Rutkowski* (2002).

$$\begin{aligned}
 F(t) &= Q(\tau \leq t) = Q(\eta \leq \Gamma(t)) = 1 - e^{-\Gamma(t)}, \\
 \Gamma(t) &= -\ln(1 - F(t))
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

jeweils von der *Hazardfunktion* $\Gamma(t)$ auf die Verteilungsfunktion F der Ausfallzeit und umgekehrt geschlossen werden. Abbildung 1 verdeutlicht die Hazardfunktionen der folgenden Modelle (M1) bis (M4):³

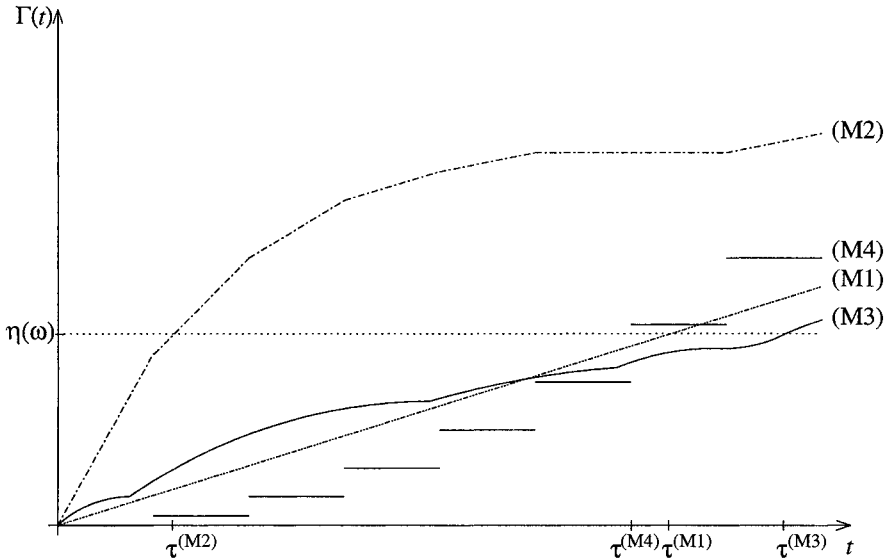


Abb. 1. Beispiele für Hazardfunktionen

Die Realisation $\eta(\omega)$ ist nicht bekannt. Daher ist der Ausfall bei stetiger Hazardfunktion nicht vorhersehbar.

(M1) Im einfachsten Fall gilt $\Gamma(t) = \lambda t$, wobei λ eine positive Konstante ist. Für die Ausfallwahrscheinlichkeit folgt

$$Q(\tau \leq t) = 1 - e^{-\Gamma(t)} = 1 - e^{-\lambda t},$$

und man sieht, dass die Ausfallzeit τ exponentialverteilt mit Parameter λ ist ($\tau \sim \text{Exp}(\lambda)$). Diese Verteilung besitzt auch der erste Sprungzeitpunkt eines *homogenen Poisson-Prozesses*.

(M2) Für eine Ausfallzeit mit Exponentialverteilung $\text{Exp}(\lambda_i)$ in der i -ten Periode $[t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \dots, N$, lautet die Hazardfunktion

³ Da der Ausfallzeitpunkt oft auch als erster Sprungzeitpunkt eines Poisson-Prozesses modelliert wird, geben wir teilweise auch dessen jeweilige Bezeichnung an.

$$\Gamma(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{t_{i-1} \leq t < t_i\}} \lambda_i(t - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{t \geq t_i\}} \lambda_i(t_i - t_{i-1}),$$

wobei $t_0 = 0$ gesetzt wird. Die Konstanten λ_i werden dabei auch als Ausfallintensitäten, Ausfallraten oder Hazardraten bezeichnet.

(M3) Ändert sich die Ausfallintensität in einem Reduktionsmodell kontinuierlich mit der Zeit, so spezifiziert man eine so genannte Intensitätsfunktion $\lambda(t) \geq 0$. Die Ausfallzeit τ mit Hazardfunktion $\Gamma(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ stimmt dann mit der Definition des ersten Sprungzeitpunktes eines *inhomogenen Poisson-Prozesses* überein.

(M4) Eine eventuelle Zahlungsunfähigkeit einer Unternehmung offenbart sich oft bei Fälligkeit der Anleihen. Bei der Kalibrierung des Hazardprozesses kann man dies durch Einbau von größeren Sprüngen zu den Fälligkeitsterminen berücksichtigen. Sollen Ausfälle nur zu vorgegebenen Zeitpunkten stattfinden wie z. B. in zeitdiskreten Modellen, so wählt man eine stückweise konstante Hazardfunktion mit Sprüngen zu den vorgegebenen Zeitpunkten. Für Zeitpunkte $t_i, i = 1, \dots, N$, erfüllt dies die Treppenfunktion

$$\Gamma(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{t \geq t_i\}} \lambda_i(t_i - t_{i-1})$$

mit $t_0 = 0$. In diesem Fall gilt $Q(\tau \leq t_k) = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^k \lambda_i(t_i - t_{i-1})\right)$ oder einfacher $Q(\tau \leq t_k) = 1 - \exp\left(-\Delta t \sum_{i=1}^k \lambda_i\right)$, $\Delta t = t_1 - t_0$, falls die Zeitpunkte $t_i, i = 0, \dots, N$, äquidistant sind. Ein solches zeitdiskretes Modell ist Ausgangspunkt der Modellierungen von *Jarrow/Turnbull* (1995, S. 56–70).

2.2 Stochastische Ausfallwahrscheinlichkeiten

Ein Reduktionsmodell, in dem die Höhe der Ausfallwahrscheinlichkeiten oder die Höhe der Ausfallintensität unsicher ist, ist durch einen stochastischen Hazardprozess gekennzeichnet. Die Ausfallwahrscheinlichkeit lässt sich mit der Technik der *iterierten Erwartungswertbildung*

$$\begin{aligned} Q(\tau \leq T) &= E_Q[\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}] = E_Q[E_Q[\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} | \mathcal{F}_T]] = E_Q[Q(\tau \leq T | \mathcal{F}_T)] \\ &= E_Q[Q(\eta \leq T_T | \mathcal{F}_T)] = E_Q[1 - e^{-\Gamma_T}] \end{aligned}$$

als Erwartungswert einer Funktion des Hazardprozesses bestimmen.

Wir unterscheiden nun die folgenden Modellierungen für den Hazardprozess:

(M5) Für $\Gamma_t = \lambda t$, wobei λ eine positive Zufallszahl ist, ist die Ausfallzeit bei gegebener Realisation $\lambda(\omega)$ eine $\text{Exp}(\lambda(\omega))$ -verteilte Zufallsvariable. Da jedoch die Realisationen von λ und η nicht bekannt sind, ist die Verteilungsfunktion der Ausfallzeit stochastisch. Die Ausfallzeit kann hier als erster

Sprungzeitpunkt eines *zeithomogenen, bedingten Poisson-Prozesses* aufgefasst werden.

(M6) Eine Verallgemeinerung stellen stochastische Intensitäten für einzelne Perioden dar. Der Hazardprozess lautet dann ähnlich wie im Modell (M2)

$$\Gamma_t = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{t \geq t_i\}} \lambda_i(\omega_i) (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{t_{i-1} \leq t < t_i\}} \lambda_i(\omega_i) (t - t_{i-1}).$$

Jährliche Ratingänderungen können z. B. durch Markovketten mit diskretem Zustandsraum $\{\lambda_{AAA}, \dots, \lambda_C\}$ für die Ausfallintensität modelliert werden.

(M7) *Intensitätsmodelle* stellen einen wichtigen Spezialfall der Reduktionsmodelle dar. Diese sind durch einen absolut stetigen Hazardprozess $\Gamma_t = \int_0^t \lambda_u du$, $t \in [0, T]$, gekennzeichnet, wobei der *Intensitätsprozess* λ progressiv messbar bzgl. einer Filtrierung \mathbb{F} ist. Positive Ausfallwahrscheinlichkeiten für einen festen Zeitpunkt sind hier nicht möglich. Dies ist z. B. bei den Intensitätsmodellen von *Jarrow/Lando/Turnbull* (1997, S. 494 ff.) und *Lando* (1998) mit zustandsdiskreter und zustandskontinuierlicher Intensität der Fall. Die Wahrscheinlichkeit

$$Q(\tau \leq T) = E_Q \left[1 - e^{-\int_0^T \lambda_u du} \right]$$

für einen Ausfall vor T ist identisch mit der Wahrscheinlichkeit, dass ein \mathbb{F} -bedingter Poisson-Prozess mit Intensitätsprozess λ im Intervall $[0, T]$ mindestens einmal springt.

(M8) Unterstellt man, dass ein Ausfall nur zu fest vorgegebenen Zeitpunkten mit zufälliger Wahrscheinlichkeit stattfinden kann, so wählt man einen stückweise konstanten Hazardprozess Γ mit nichtnegativen stochastischen Sprunghöhen zu den vorgegebenen Zeitpunkten.

(M9) Generell können alle wachsenden Prozesse als Hazardprozess verwendet werden. Besonders interessant sind dabei Hazardprozesse, die nicht absolut stetig sind, die also nicht mit Hilfe eines Intensitätsprozesses angegeben werden können. Nimmt man z. B. einen wachsenden Lévy-Prozess mit unendlicher oder endlicher Aktivität, so führt dies zu unendlich vielen Sprüngen der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit in einem Zeitintervall bzw. zu endlich vielen Sprüngen zu zufälligen Zeitpunkten.

Als Beispiel für ein Reduktionsmodell der Klasse (M9), das kein Intensitätsmodell ist, kann ein Gamma-Prozess als Hazardprozess angegeben werden. Ein Gamma-Prozess G mit Wachstumsrate μ und Varianz ν hat Gammaverteilte unabhängige Inkremente. Das Inkrement $g = G_{t+h} - G_t$ über einen Zeitraum h hat Erwartungswert μh , Varianz νh und Dichte

$$f_h(g) = \frac{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{\mu^2 h}{\nu}}}{\Gamma\left(\frac{\mu^2 h}{\nu}\right)} g^{\frac{\mu^2 h}{\nu} - 1} \exp\left(-\frac{\mu}{\nu} g\right), \quad g > 0,$$

wobei $\bar{\Gamma}$ die aus der Analysis bekannte Gammafunktion bezeichnet. Verwendet man den Gamma-Prozess als Hazardprozess, so erhält man die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} Q(\tau \leq T) &= E[1 - e^{-G_T}] = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-g} \frac{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{\mu^2 T}{\nu}}}{\bar{\Gamma}\left(\frac{\mu^2 T}{\nu}\right)} g^{\frac{\mu^2 T}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{\mu}{\nu}g\right) dg \\ &= 1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \nu}\right)^{\frac{\mu^2 T}{\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\mu^2 T}{\nu}}}{\bar{\Gamma}\left(\frac{\mu^2 T}{\nu}\right)} x^{\frac{\mu^2 T}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{1}{\nu}x\right) dx \\ &= 1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \nu}\right)^{\frac{\mu^2 T}{\nu}}, \end{aligned}$$

wobei die Substitution $x = (\mu + \nu)g$ angewandt wird. Diese Ausfallwahrscheinlichkeit erhält man auch für das Modell (M1) mit $\lambda = -\frac{\mu^2}{\nu} \ln\left(\frac{\mu}{\mu + \nu}\right)$. Die Entwicklung der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit $Q(\tau \leq T | \mathcal{F}_t)$ im Zeitablauf ist im Modell (M9) allerdings stochastisch und weist im Falle des Gamma-Prozesses unendlich viele Sprünge in einem Zeitintervall auf.

2.3 Wiedergewinnungsmodelle

Ein wichtiger Bestandteil eines Kreditderivatemodells ist die Modellierung der Ausfallhöhe im Falle eines Ausfalls. Im Folgenden wird für die Modellierung des Wiedergewinnungswertes Z , der annahmegemäß direkt nach einem Ausfall zur Verfügung stehen soll, eine *Wiedergewinnungsquote* $\delta \in [0, 1]$ und eine der drei Bezugsgrößen Nennwert der Anleihe, Wert einer ausfallrisikolosen und sonst identischen Anleihe und Marktwert der Anleihe unmittelbar vor Ausfall eingeführt:⁴

- Totalverlust: $Z_t \equiv 0,$
- nennwertbasierte Wiedergewinnung: $Z_t^{NW} \equiv \delta \cdot 1,$
- äquivalente Wiedergewinnung: $Z_t^{\ddot{A}W} \equiv \delta \cdot B_t(T),$
- marktwertbasierte Wiedergewinnung: $Z_t^{MW} \equiv \delta \cdot \tilde{B}_t^{MW}(T).$

Dabei bezeichnet $B_t(T)$ den Wert einer Anleihe mit der gleichen Ausstattung, die aber ausfallrisikolos ist. $\tilde{B}_t^{MW}(T)$ bezeichnet den Preis der ausfallrisikobehafteten Anleihe unmittelbar vor Ausfall.

⁴ An Stelle einer konstanten Wiedergewinnungsquote kann man auch eine stochastische Wiedergewinnungsquote, die unabhängig von Kassazinsrate und Hazardprozess ist, einführen. In den Formeln ist dann nur δ durch die erwartete Wiedergewinnungsquote zu ersetzen.

Für die Bewertung von Anleihen stellt sich immer die Frage, welches Wiedergewinnungsmodell den Zahlungsstrom im Falle eines Ausfalls möglichst realistisch abbildet. Dagegen ist diese Fragestellung für die Bewertung sonstiger Kreditderivate nicht immer relevant, da nur die für ein Kreditereignis vertraglich vereinbarten Ausgleichszahlungen zu bewerten sind. Letztere kann z. B. bei einem CDS eine im Voraus fest vereinbarte Zahlung oder auch eine verlust- und zeitabhängige Zahlung sein.

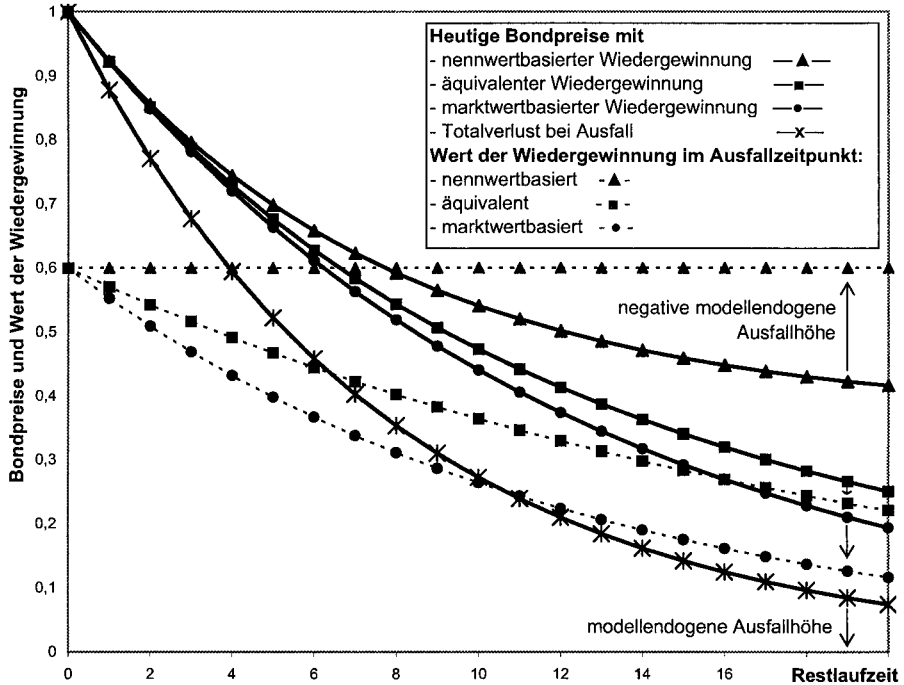


Abb. 2. Wert von Null-Kuponanleihen und deren Wiedergewinnungswert

Abbildung 2 veranschaulicht die Höhe der nennwertbasierten, äquivalenten und marktwertbasierten Wiedergewinnung (Δ , \square bzw. \bullet) einer Null-Kuponanleihe (NKA) mit Wiedergewinnungsquote $\delta = 0,6$ im Modell (M1) mit $\lambda = 0,08$, sowie $r = 0,05$ für Restlaufzeiten von $T = 0$ bis 20 Jahren. Im nennwertbasierten und äquivalenten Wiedergewinnungsmodell sind die absoluten Ausfallvolumina abhängig vom Nennwert bzw. Wert eines ausfallrisikolosen aber sonst gleichen Anspruchs. Im Falle nennwertbasierter Wiedergewinnung kann es insbesondere bei NKA mit langen Restlaufzeiten vorkommen, dass der Wert der Wiedergewinnung oberhalb des Marktwertes des ausfallrisikobehafteten Anspruchs liegt.

3 Risikoneutrale Bewertung

Die Bewertung einer Option im klassischen Modell von *Black/Scholes* (1973) und *Merton* (1974) beruht auf der Duplikation ihrer Auszahlung durch ein zeitkontinuierlich angepasstes Portfolio aus Aktie und Geldmarktkonto.⁵ Damit der Markt arbitragefrei ist, müssen der Wert des Portfolios und der Wert der Option übereinstimmen. Die Duplikation der Zahlungsströme einer ausfallrisikobehafteten Anleihe ist dagegen nicht möglich, da die Assets einer Unternehmung im Unterschied zu Aktien nicht am Markt gehandelt werden und deren Wert nicht ohne Weiteres feststellbar ist. Der Markt bzw. das Modell heißt dann auch *unvollständig*. Der Bewertungsansatz in Reduktionsmodellen besteht nun darin, die Parameter des Modells an gegebene Marktpreise von ausfallrisikolosen und ausfallrisikobehafteten Anleihen zu kalibrieren und anschließend die Zahlungsströme weiterer Kreditderivate mit diesem Modell zu bewerten. Der folgende Abschnitt beschreibt die Zahlungsprofile von häufig gehandelten Kreditderivaten und präsentiert die entsprechenden Bewertungsformeln.

3.1 Wertdarstellungen für Kreditderivate

Bei gegebenem Kassazinsratenprozess r lässt sich der Wert einer ausfallrisikolosen NKA mit Nennwert 1 und Laufzeit T durch

$$B_0(T) = E_Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \right]$$

darstellen. Der Wert einer unsicheren Zahlung einer Geldeinheit im Zeitpunkt T , die nur dann erfolgt, falls kein Ausfall im Zeitraum $[0, T]$ stattfindet, entspricht dem Wert einer *ausfallrisikobehafteten Null-Kuponanleihe* mit Laufzeit T und Totalverlust bei Ausfall. Dieser Preis ist durch

$$\tilde{B}_0(T) \equiv E_Q \left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} e^{-\int_0^T r_s ds} \right]$$

definiert. Da wir im Folgenden Unabhängigkeit zwischen Zins- und Ausfallrisiken unterstellen, kann man diesen Wert wegen

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0(T) &= E_Q \left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right] E_Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \right] = Q(\tau > T) B_0(T) \\ &= E_Q \left[e^{-\Gamma T} \right] B_0(T) \end{aligned} \tag{3}$$

auch als Produkt aus risikoneutraler Überlebenswahrscheinlichkeit und Kurs einer ausfallrisikolosen NKA angeben. In allgemeinsten Form ist der Preis eines Kreditderivats mit *kumulativem Cash Flow-Prozess* C und mit *Ausgleichszahlung* Z (bzw. mit *Wiedergewinnung* Z bei Anleihen) im Ausfallzeitpunkt durch

⁵ Zur klassischen Theorie der arbitragefreien Bewertung vgl. *Wilhelm* (1985).

$$E_Q \left[\int_{(t,T]} \mathbf{1}_{\{\tau > u\}} e^{-\int_t^u r_s ds} dC_u + \int_{(t,T]} e^{-\int_t^u r_s ds} Z_u d\mathbf{1}_{\{\tau \leq u\}} \middle| \mathcal{G}_t \right] \quad (4)$$

gegeben.

Bielecki/Rutkowski (2002, S. 230) zeigen, dass für den heutigen Wert der Wiedergewinnung bzw. Ausgleichszahlung

$$\begin{aligned} E_Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B_0(\tau) Z_\tau] &= E_Q \left[\int_{]0,T]} e^{-\int_0^u r_s ds} Z_u d\mathbf{1}_{\{\tau \leq u\}} \right] \\ &= E_Q \left[\int_{]0,T]} e^{-\int_0^u r_s ds} Z_u d(-e^{-\Gamma_u}) \right] \end{aligned}$$

gilt. Im Falle eines absolut stetigen Hazardprozesses $\Gamma_t = \int_0^t \lambda_s ds$ kann dieser Wert wegen

$$d(-e^{-\Gamma_u}) = e^{-\Gamma_u} d\Gamma_u = e^{-\Gamma_u} \lambda_u du$$

vereinfacht werden zu

$$E_Q [\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B_0(\tau) Z_\tau] = E_Q \left[\int_{]0,T]} e^{-\int_0^u r_s + \lambda_s ds} \lambda_u Z_u du \right]. \quad (5)$$

Sind dagegen t_1, \dots, t_n die einzig möglichen Ausfallzeitpunkte, so ist der Wert durch

$$\sum_{i=1}^n Q(\tau = t_i) B_0(t_i) E_Q [Z_{t_i}]$$

gegeben.

Eine *ausfallrisikobehaftete Kuponanleihe* mit Kupon k ist spezifiziert durch den kumulativen Cash Flow-Prozess

$$C_t = \sum_{u=1}^T \mathbf{1}_{\{t \geq u\}} k + \mathbf{1}_{\{t \geq T\}}$$

und eine Wiedergewinnung in Höhe von Z . Im Falle äquivalenter oder markt-wertbasierter Wiedergewinnung gehen wir von entsprechender Wiedergewinnung der Kupons aus und bewerten die Anleihe als Portfolio aus NKA mit Nennwerten $k, k, \dots, k, 1$ und den Kupontermenin als Laufzeiten:

$$\tilde{B}_0^{k, \text{ÄW}}(T) \equiv k \sum_{i=1}^n \tilde{B}_0^{\text{ÄW}}(t_i) + \tilde{B}_0^{\text{ÄW}}(T),$$

$$\tilde{B}_0^{k, \text{MW}}(T) \equiv k \sum_{i=1}^n \tilde{B}_0^{\text{MW}}(t_i) + \tilde{B}_0^{\text{MW}}(T).$$

Ein *Digital Credit Default Put* (DCDP) verbrieft die Auszahlung $C = 0$ und die Ausgleichszahlung $Z_t = 1$ im Ausfallzeitpunkt. Ist die Ausgleichszahlung erst bei Fälligkeit T der Referenzanleihe fällig, so kann die Bewertung mit $Z_t = e^{-\int_t^T r_s ds}$ erfolgen.

Die Prämienzahlungen des Sicherungskäufers eines CDS werden als „fixed leg“ bezeichnet

$$C_t = c\alpha \sum_i \mathbf{1}_{\{t \geq t_i\}},$$

wobei wir im Folgenden von vierteljährlicher Zahlung der (annualisierten) CDS-Prämie c in $t_i = 1/4, 2/4, \dots, T$ ausgehen und (bei Nicht-Berücksichtigung einer Daycount-Convention) von $\alpha = 90/360 = 1/4$. Bei Eintritt eines Kreditereignisses zahlt der Sicherungsnehmer eine letzte anteilige Prämie für die Zeit nach der vorherigen Prämienzahlung und der Sicherungsgeber leistet die Ausgleichszahlung \bar{Z} . Bei Vertragsabschluss wird die Prämie c in Basispunkten per annum so festgelegt, dass der Wert des „fixed leg“ und des „floating leg“ übereinstimmen, also dass

$$E_Q \left[c\alpha \sum_i \mathbf{1}_{\{\tau > t_i\}} B_0(t_i) \right] = E_Q \left[\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B_0(\tau) Z_\tau \right]$$

gilt, wobei $Z_\tau = \bar{Z}_\tau - c \cdot \text{mod}(\tau, \alpha)$. Mit dem Rest bei der Division von τ durch α , also $\text{mod}(\tau, \alpha)$, berechnet man dabei den Bruchteil des Jahres seit der letzten Prämienzahlung. Für $\alpha = 1/4$ lautet die faire Prämie

$$c = \frac{E_Q \left[\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B_0(\tau) \bar{Z}_\tau \right]}{E_Q \left[\frac{1}{4} \sum_{t_i \in \{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots, T\}} \mathbf{1}_{\{\tau > t_i\}} B_0(t_i) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \text{mod}(\tau, 1/4) B_0(\tau) \right]}.$$

Versichert ein CDS die modellendogene Höhe des Ausfalls, so lautet – die Ergebnisse des nächsten Abschnitts vorwegnehmend – die Ausgleichszahlung im Ausfallzeitpunkt bei einer NKA mit

- nennwertbasierter Wiedergewinnung

$$\bar{Z}_t^{\text{NW}} = \max \left\{ \tilde{B}_{t-}^{\text{NW}}(T) - Z_t^{\text{NW}}, 0 \right\} = \max \left\{ \tilde{B}_{t-}^{\text{NW}}(T) - \delta, 0 \right\},$$

- äquivalenter Wiedergewinnung

$$\bar{Z}_t^{\text{ÄW}} = \tilde{B}_{t-}^{\text{ÄW}}(T) - Z_t^{\text{ÄW}} = (1 - \delta) \tilde{B}_{t-}(T),$$

- marktwertbasierter Wiedergewinnung bei existierender Intensität

$$\bar{Z}_t^{\text{MW}} = \tilde{B}_{t-}^{\text{MW}}(T) - Z_t^{\text{MW}} = (1 - \delta) E_Q \left[e^{-\int_t^T r_s + (1-\delta)\lambda_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

3.2 Alternative Wertdarstellungen für Anleihen

Ein Vorteil der Annahme der äquivalenten Wiedergewinnung ist, dass die Bewertung einer ausfallrisikobehafteten Zahlung zerlegt werden kann in die Bewertung einer ausfallrisikolosen Zahlung und einer ausfallrisikobehafteten Zahlung mit Totalverlust. So entspricht z. B. der Wert einer ausfallrisikobehafteten Null-Kuponanleihe $\tilde{B}_0^{\text{ÄW}}$ mit äquivalenter Wiedergewinnung und Wiedergewinnungsquote δ wegen

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^{\text{ÄW}}(T) &\equiv E_Q \left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} B_0(T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B_0(\tau) Z_\tau^{\text{ÄW}} \right] \\ &= E_Q \left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} B_0(T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \delta B_0(T) \right] \\ &= E_Q \left[\delta B_0(T) + \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} (1 - \delta) B_0(T) \right] \\ &= (\delta + (1 - \delta)Q(\tau > T)) B_0(T) \\ &= \delta B_0(T) + (1 - \delta) \tilde{B}_0(T) \end{aligned} \tag{6}$$

dem Wert eines Portfolios bestehend aus δ ausfallrisikolosen NKA und $(1 - \delta)$ ausfallrisikobehafteten NKA mit Totalverlust bei Ausfall.

Für die Bewertung einer NKA mit äquivalenter Wiedergewinnung ist nur die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall innerhalb der Laufzeit von Bedeutung, während die genaue Verteilung der Ausfallzeit irrelevant ist, da ein Ausfall immer zu einem sicheren Wert δ zu Laufzeitende führt. Dagegen erkennt man am Wert $\tilde{B}_0^{\text{NW}}(T)$ einer NKA mit nennwertbasierter Wiedergewinnung

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^{\text{NW}}(T) &\equiv E_Q \left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} B_0(T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B_0(\tau) Z_\tau^{\text{NW}} \right] \\ &= E_Q \left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} B_0(T) + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \delta B_0(\tau) \right] \\ &= \tilde{B}_0(T) + \delta E_Q \left[\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} B_0(\tau) \right], \end{aligned}$$

dass die Eigenschaften der Ausfallzeit für die Bewertung relevant sind.

Für die in Abschnitt 2.2 vorgestellten Intensitätsmodelle (M7) mit Hazardprozess $\Gamma_t = \int_0^t \lambda_s ds$ lässt sich analog zum ausfallrisikolosen Fall eine besonders elegante Darstellung des Preises herleiten. *Duffie/Singleton* (1999) zeigen, dass der Wert einer NKA mit marktwertbasierter Wiedergewinnung sich durch

$$\tilde{B}_t^{\text{MW}}(T) = \mathbf{1}_{\{\tau \geq t\}} E_Q \left[e^{-\int_t^T r_s + (1-\delta)\lambda_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \tag{7}$$

als Erwartungswert der mit der *ausfallquoteadjustierten* Kassazinsrate $r_s + (1 - \delta)\lambda_s$ diskontierten versprochenen Zahlung darstellen lässt. Bei Totalverlust ist der Preis einer NKA

$$\tilde{B}_t(T) = \mathbf{1}_{\{\tau \geq t\}} E_Q \left[e^{-\int_t^T r_s + \lambda_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

ein Erwartungswert der mit der *ausfallrisikoadjustierten* Kassazinsrate $r_s + \lambda_s$ diskontierten Zahlung.

3.3 Kalibrierung des Hazardprozesses

Zur Kalibrierung eines Reduktionsmodells werden zunächst diejenigen *risikoneutralen* Ausfallwahrscheinlichkeiten $Q(\tau \leq t_i)$ benötigt, unter denen das Modell gerade die gegebenen Kurse von ausfallrisikobehafteten Anleihen $\tilde{B}_0(t_i)$, $i = 1, \dots, N$, liefert. Diese Ausfallwahrscheinlichkeiten werden durch vorgegebene Kurse und Modellannahmen über die Höhe der Wiedergewinnung impliziert und sie ergeben sich je nach Wiedergewinnungsmodell für die Anleihe aus den Gleichungen (6), (7) und (3) wie folgt:

- bei Totalverlust: $Q(\tau \leq T) = 1 - \frac{\tilde{B}_0(T)}{B_0(T)}$,
- bei äquivalenter Wiedergewinnung: $Q(\tau \leq T) = \frac{B_0(T) - \tilde{B}_0^{\text{ÄW}}(T)}{B_0(T)(1-\delta)}$,
- bei marktwertbasierter Wiedergewinnung:

$$Q(\tau \leq T) = 1 - \exp\left(\frac{1}{1-\delta} \ln \frac{\tilde{B}_0^{\text{MW}}(T)}{B_0(T)}\right).$$

Anschließend sind die Parameter der Hazardfunktion bzw. des Hazardprozesses so anzupassen, dass $Q(\tau \leq t_i) = E_Q[1 - e^{-\Gamma t_i}]$ an den Stellen t_i erfüllt ist. In den seltensten Fällen hat eine Unternehmung jedoch ausschließlich NKA emittiert. Die gesuchten Parameter des Hazardprozesses können dann so ermittelt werden, dass die Summe der quadrierten Abweichungen zwischen Marktpreisen und Modellwerten minimiert wird.⁶

3.4 Bewertung mittels Monte Carlo-Simulation

Der Wert eines Kreditderivats wird mit numerischen Verfahren bestimmt, wenn keine geschlossene Formel vorliegt. Ein nahe liegender Ansatz ist, Ausfallzeiten zu erzeugen und den Wert des Derivats als arithmetisches Mittel der diskontierten Auszahlungen zu bestimmen.

Wir stellen nun eine Monte Carlo-Simulation ohne Simulation der Ausfallzeiten vor. Sie basiert darauf, dass unter dem Erwartungswert die Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{\{\tau > t_i\}}$ und $\mathbf{1}_{\{\tau = t_i\}}$ mit Hilfe der iterierten Erwartungswertbildung durch risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten ersetzt werden können; denn der Wert des Kreditderivats kann wegen $E_Q[\mathbf{1}_{\{\tau > t_i\}}] = E_Q[E_Q[\mathbf{1}_{\{\tau > t_i\}} | \mathcal{F}_T]] = E_Q[e^{-\Gamma t_i}]$ und $\{\tau = t_i\} = \{\tau \leq t_i\} \setminus \{\tau \leq t_{i-1}\}$ auch durch

⁶ *Wilhelm/Brüning* (1992) liefern im Zusammenhang mit der Schätzung der Zinsstruktur eine arbitrage-theoretische Begründung alternativer Abweichungsmaße. Neben der Summe der quadratischen Abweichungen wird noch die Summe der Absolutbeträge der Abweichungen und der Absolutbetrag der größten Abweichung diskutiert.

$$\begin{aligned}
& E_Q \left[\sum_{i=0}^n \mathbf{1}_{\{\tau > t_i\}} e^{-\sum_{k=0}^{i-1} r_{t_k} (t_{k+1} - t_k)} c_{t_i} + \sum_{i=0}^n \mathbf{1}_{\{\tau = t_i\}} e^{-\sum_{k=0}^{i-1} r_{t_k} (t_{k+1} - t_k)} Z_{t_i} \right] \\
&= E_Q \left[\sum_{i=0}^n e^{-\Gamma_{t_i}} e^{-\sum_{k=0}^{i-1} r_{t_k} (t_{k+1} - t_k)} c_{t_i} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^n \left(e^{-\Gamma_{t_{i-1}}} - e^{-\Gamma_{t_i}} \right) e^{-\sum_{k=0}^{i-1} r_{t_k} (t_{k+1} - t_k)} Z_{t_i} \right]
\end{aligned}$$

berechnet werden. Dabei bezeichnen $t_0, \dots, t_n, t_0 = 0, t_n = T$, die Zeitpunkte, in denen eine Zahlung c_{t_i} vor einem Ausfall oder ein Ausfall mit gleichzeitiger Wiedergewinnung bzw. Ausgleichszahlung stattfinden kann.

Der Algorithmus für die Bewertung lautet nun folgendermaßen:

1. Erzeuge m Pfade für die Entwicklung der Kassazinsraten, des Hazardprozesses, des Cash Flow-Prozesses und der Wiedergewinnung bzw. Ausgleichszahlung.
2. Berechne den Schätzer

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^n e^{-\Gamma_{t_i}(\omega_j)} e^{-\sum_{k=0}^{i-1} r_{t_k}(\omega_j)(t_{k+1} - t_k)} c_{t_i}(\omega_j) \\
& + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^n \left(e^{-\Gamma_{t_{i-1}}(\omega_j)} - e^{-\Gamma_{t_i}(\omega_j)} \right) e^{-\sum_{k=0}^{i-1} r_{t_k}(\omega_j)(t_{k+1} - t_k)} Z_{t_i}(\omega_j)
\end{aligned}$$

für den Wert des Kreditderivats.

4 Fallstudie

In der folgenden Fallstudie werden einige der vorgestellten Reduktionsmodelle an Kursdaten von Anleihen der Deutschen Telekom AG kalibriert und anschließend auf diese Anleihen referenzierte Credit Default Swaps bewertet. Ziel ist es, die oben vorgestellten Reduktionsmodelle auf ihre Praxistauglichkeit zu überprüfen. Die tägliche Kalibrierung dieser Modelle erfolgt auf der Basis der jeweiligen Schlussquotierung von Telekom-Anleihen an 664 Handeltagen. Anschließend werden Marktpreise und Modellwerte für Credit Default Swaps veranschaulicht und verglichen.

4.1 Datengrundlage und Kalibrierung der Modelle

Die Fallstudie basiert auf Rentendaten, um das Kreditrisiko direkt aus dem Underlying eines CDS zu ermitteln. Die Datenbasis besteht aus täglichen Schlussquotierungen von börsennotierten Euro-denominierten Anleihen der

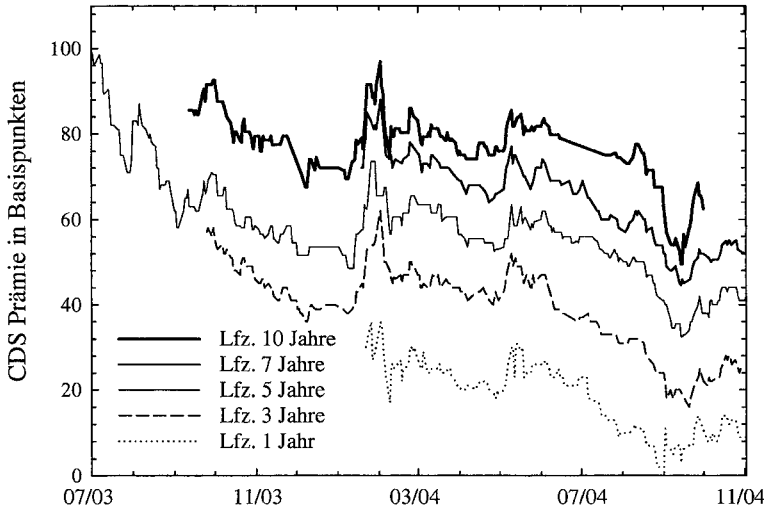


Abb. 3. CDS Prämie für Laufzeiten von 1, 3, 5, 7 und 10 Jahren

Deutschen Telekom AG für den Zeitraum 04.01.1999–02.11.2004.⁷ Schlusskurse von CDS-Prämien mit Laufzeit 5 Jahren liegen für den Zeitraum 03.09.2001–02.11.2004 vor. Als Referenzgröße für den risikolosen Zins dienen Kassazinsraten, die mit den von der Deutschen Bundesbank bereitgestellten Svensson-Parametern ermittelt werden.⁸ Der betrachtete Zeitraum umfasst sowohl die interessanten Jahre 2002 und 2003, in denen die Ausfallraten für die Telekommunikationsbranche besonders hoch eingeschätzt wurden, als auch die anschließend eher ruhige Zeit ab 2004. Die Entwicklung der CDS-Prämien veranschaulicht Abb. 3. Die Prämien steigen hier mit zunehmender Laufzeit an. Tabelle 1 gibt deskriptive Statistiken in Basispunkten nach Laufzeiten unterteilt an, wobei die Daten der besseren Vergleichbarkeit wegen für den fünfjährigen CDS ab 12.09.2003 (*) und 03.09.2001 (**) angegeben werden.

Wir stellen nun für die verwendeten Modelle die Kalibrierung des Hazardprozesses für Donnerstag, den 01. April 2004, vor. Um die in Abschnitt 3.2 vorgestellte Kalibrierung vorzunehmen, werden die erwarteten Hazardprozesswerte so kalibriert, dass sie die Summe der quadrierten Abweichungen zwischen Marktpreisen und Modellwerten von Anleihen minimieren. Die Kalibrierung erfolgt für die nennwertbasierte Wiedergewinnung mit Wiedergewinnungsquote $\delta = 0,4$. Für die Implementierung wird die Zeitachse monatlich an den

⁷ Wir schließen Kuponanleihen mit variabler Verzinsung wie Floating Rate Notes (5 Anleihen) und Step-up Bonds (10 Anleihen) sowie eine Pflichtwandelanleihe aus. Somit verbleiben in der Datenbasis Kursdaten zu 7 festverzinslichen Anleihen.

⁸ Siehe Svensson (1994) und www.bundesbank.de/statistik/statistik_zeitreihen.php.

Tabelle 1. Deskriptive Statistiken der CDS-Prämien

Laufzeit	1	3	5 *	7	10	5 **
Beobachtungsbeginn	22.01.04	25.09.03	12.09.03	19.01.04	12.09.03	03.09.01
Anzahl Beobachtungen	197	224	290	138	239	664
Mittelwert	18,56	40,42	54,65	64,23	76,9	138,8
Standardabweichung	7,981	9,86	8,646	10,23	8,261	98,4
Schiefe	-0,2485	-0,6016	-0,5716	-0,05464	-0,898	0,7454
Kurtosis	2,027	2,735	3,071	2,087	4,527	2,169
Median	21	43	56	66	77,9	86,5
Maximum	36,04	62	73,5	88	96,9	410
Minimum	2	16	32,5	44,5	49,5	32,5
mittlerer Bid-Ask-Spread	6,274	8,005	2,655	4	4,184	7,604

Stellen 0, 1/12, 2/12, . . . , 5 unterteilt. Da später 1-, 3- und 5-jährige CDS bewertet werden, werden die Teilperioden [0,1), [1,3) und [3,5) unterschieden.

Für den 01. April 2004 erfolgt beispielhaft die Modellkalibrierung auf Basis der Preisdaten der folgenden sechs Anleihen der Deutschen Telekom:

Anleihe	1	2	3	4	5	6
Kupon	5,25	4,25	5,5	5,25	7,5	5,25
Fälligkeit	24.09.04	17.01.05	30.09.05	22.01.07	29.05.07	20.05.08
T_i	0,47539	0,7896	1,4891	2,7978	3,1448	4,1202
Kurs	101,40	101,52	104,39	105,64	112,63	106,56

Dies führt auf die folgenden alternativen Hazardfunktionen:

(M1) Für die Hazardfunktion $\Gamma(t) = \lambda t$ ist nur ein Parameter zu schätzen. Die Summe der quadrierten Preisabweichungen

$$\sum_{i=1}^6 (\tilde{B}_0^{k,NW}(T_i) - (\text{Kurs} + \text{Stückzinsen}))^2$$

wird mit einer Intensität $\lambda = 0,0067525$ minimiert.

(M2) Das Reduktionsmodell (M2) mit konstanten Ausfallintensitäten λ_1, λ_2 und λ_3 für die Perioden [0, 1), [1, 3) bzw. [3, 5) soll nun kalibriert werden. Die Kalibrierung ergibt $\Gamma(1) = 0,0057034$, $\Gamma(3) = 0,023019$ und $\Gamma(5) = 0,025639$ und damit $\lambda_1 = 0,0057034$, $\lambda_2 = 0,0076729$ und $\lambda_3 = 0,0051278$. Die Hazardfunktion lautet dann

$$\Gamma(t) = \mathbf{1}_{\{0 \leq t < 1\}} \lambda_1 t + \mathbf{1}_{\{1 \leq t < 3\}} \lambda_2 (t-1) + \mathbf{1}_{\{3 \leq t < 5\}} \lambda_3 (t-3) + \mathbf{1}_{\{t \geq 1\}} \lambda_1 \cdot 1 + \mathbf{1}_{\{t \geq 3\}} \lambda_2 \cdot 2 + \mathbf{1}_{\{t \geq 5\}} \lambda_3 \cdot 2.$$

(M3) Es soll eine kubische Hazardfunktion kalibriert werden. Um negative Intensitäten auszuschließen und einen wachsenden Hazardprozess zu gewährleisten, verwenden wir $\Gamma(t) = \max\{\lambda_1 s + \lambda_2 s^2 + \lambda_3 s^3 | s \leq t\}$ bei Kalibrierung und Bewertung und erhalten

$$\Gamma(t) = \max\{0, 0035827s + 0, 003347s^2 - 0, 00068649s^3 | s \leq t\}.$$

(M4) Mit der Treppenfunktion $\Gamma(t) = \mathbf{1}_{\{t \geq 1\}}0,017063 + \mathbf{1}_{\{t \geq 3\}}0,0041461 + \mathbf{1}_{\{t \geq 5\}}\lambda_3$ und beliebigem Parameter $\lambda_3 \geq 0$ ist das Modell an die Kurse kalibriert und Ausfälle können nur in $t = 1, 3, 5$ stattfinden. Will man Ausfälle jeweils genau einen Monat nach Abschluss bzw. Auslaufen einer CDS-Transaktion zulassen, so erhält man die Hazardfunktion $\Gamma(t) = \mathbf{1}_{\{t \geq 1/12\}}0,0040406 + \mathbf{1}_{\{t \geq 13/12\}}0,012669 + \mathbf{1}_{\{t \geq 37/12\}}0,004169$ und wir bezeichnen die Modellvariante mit (M4').

4.2 Vergleich von berechneten und marktgegebenen CDS-Prämien

Die Modelle werden nun an tägliche Schlussquotierungen von Anleihen kalibriert und jeder beobachteten CDS-Prämie werden sechs theoretische CDS-Prämien gegenübergestellt. Die beobachteten CDS-Prämien werden also nicht für die Modellkalibrierung herangezogen. Wir bewerten neben einem Digital CDS fünf Varianten eines CDS, die sich hinsichtlich der Ausgleichsleistung unterscheiden, für die Laufzeiten 1, 3 und 5 Jahre bei vierteljährlicher Prämienzahlung inkl. anteiliger Prämie bei Ausfall. Bei Ausfall leisten die CDS-Varianten entweder eine Ausgleichszahlung in Höhe von 1, den Anteil $1 - \delta$ des Nennwerts (in Höhe von EUR 1), das $(1 - \delta)$ -fache einer ausfallrisikolosen Kuponanleihe mit gleicher Restlaufzeit oder die mit den Modellen berechnete Verlusthöhe einer Anleihe mit nennwertbasierter, äquivalenter oder marktwertbasierter Wiedergewinnung. Tabelle 2 enthält die über alle Tage gemittelte CDS-Prämie, den mittleren Bewertungsfehler sowie den mittleren absoluten Bewertungsfehler. Negative bzw. positive Bewertungsfehler zeigen an, dass die Modellprämie im Mittel unter bzw. über der Marktprämie liegt.

Die Modelle liefern für die Laufzeit 5 Jahre im Mittel zu geringe CDS-Prämien. Die kleinsten Preisabweichungen weist dabei ein CDS mit Ausgleichszahlung $(1 - \delta)B_t^k(5)$ im Modell (M2) auf (siehe auch Abb. 4). Dagegen fallen die CDS-Prämien für die Laufzeiten 1 und 3 Jahre eher zu hoch aus. Nur die Modellierung von Sprüngen direkt nach Abschluss bzw. Auslaufen einer CDS-Transaktion in Modell (M4') bewirkt geringere CDS-Prämien für alle Laufzeiten und für den einjährigen CDS auch die kleinsten Preisfehler. Weil die durchschnittliche Prämie eher unterhalb der marktgegebenen Prämie liegt, liefert hier eine CDS-Bewertung mit Berücksichtigung der Zinsausfälle die besten Resultate.

In Abbildung 3 steigen die beobachteten CDS-Prämien mit zunehmender Laufzeit. Dieser Laufzeiteneffekt ist bei Modell (M1) wegen der konstanten Ausfallintensität fast nicht vorhanden. Für den Digital CDS werden sogar identische Prämien für alle Laufzeiten berechnet.

Als Gründe für die beobachteten Abweichungen zwischen Modellprämien und Marktprämien kommen Illiquiditätseffekte insbesondere bei Anleihen mit kurzer Laufzeit in Frage. Des Weiteren wurden nur Hazardfunktionen, aber nicht Hazardprozesse bei der Bewertung eingesetzt. Die Stochastik der

Tabelle 2. Bewertung von Credit Default Swaps mit den Reduktionsmodellen (M1) bis (M4')

Die Tabelle gibt die mit den Modellen berechneten durchschnittlichen CDS-Prämien (fett), Preisfehler und absolute Preisfehler in Basispunkten per annum an. Die CDS leisten eine Ausgleichszahlung in Höhe von $1 - \delta$, liefern eine ausfallrisikolose Kuponanleihe mit gleicher Restlaufzeit oder leisten die modellendogen berechnete Verlusthöhe bei nenwertbasierter, äquivalenter oder marktwerbster Wiedergewinnung des Nominalwerts und der Kupons.

CDS mit Auszahlung	T	(M1)	(M2)	(M3)	(M4)	(M4')										
Digital CDS	1	76,0	20,1	47,2	28,6	29,6	151,9	133,4	134,1	25,1	6,6	8,0				
	3	81,4	41,0	83,3	42,8	46,2	81,9	41,5	44,2	106,7	66,3	66,6	4,2	16,2		
	5	183,6	45,2	198,3	59,9	60,4	188,8	50,9	51,6	192,3	54,0	54,6	178,6	40,3	41,1	
$(1 - \delta)NW$	1	45,6	27,1	28,0	23,2	4,6	7,1	28,3	9,8	11,0	91,1	72,6	73,4	15,1	-3,5	4,4
	3	48,8	8,4	10,8	50,0	9,5	13,3	49,2	8,7	12,2	64,0	23,6	24,1	26,8	-13,7	14,9
$(1 - \delta)B_t^k(T)$	5	110,1	-28,2	30,0	119,0	-19,4	24,3	113,3	-24,6	28,8	115,4	-23,0	27,1	107,2	-31,2	32,4
	1	47,7	29,1	30,1	24,2	5,7	7,8	29,6	11,1	12,2	96,1	77,6	78,4	15,6	-3,0	4,2
	3	52,9	12,5	14,7	53,7	13,3	16,9	52,9	12,5	15,7	68,3	27,9	28,4	29,0	-11,5	13,4
Z_t^{NW}	5	118,0	-20,4	25,0	127,0	-11,3	21,2	121,2	-16,6	24,3	121,3	-17,1	24,2	112,6	-25,8	27,9
	1	48,8	30,3	31,2	24,9	6,3	8,2	30,5	11,9	13,0	99,5	80,9	81,7	15,9	-2,7	4,0
	3	55,0	14,6	16,6	55,5	15,1	18,6	55,0	14,6	17,7	70,8	30,3	30,8	30,0	-10,4	12,8
Z_t^{AW}	5	116,2	-22,2	27,8	123,9	-14,4	24,5	120,5	-17,3	26,3	118,6	-19,8	27,5	109,1	-29,2	31,3
	1	47,5	28,9	29,9	24,2	5,6	7,8	29,6	11,1	12,2	96,1	77,6	78,4	15,5	-3,0	4,2
	3	52,3	11,9	14,0	53,0	12,6	16,2	52,6	12,1	15,3	67,9	27,5	28,0	28,6	-11,9	13,6
Z_t^{MW}	5	111,2	-27,1	30,4	118,9	-19,4	26,3	115,4	-22,4	28,8	114,8	-23,5	29,4	105,7	-32,7	34,1
	1	47,6	29,0	30,0	24,2	5,6	7,8	29,6	11,1	12,2	96,1	77,6	78,4	15,5	-3,0	4,2
	3	52,5	12,1	14,3	53,3	12,9	16,5	52,7	12,3	15,5	68,1	27,7	28,2	28,7	-11,7	13,5
5	113,8	-24,5	28,3	122,0	-16,3	24,1	117,7	-20,2	27,0	117,4	-21,0	27,2	108,4	-29,9	31,6	

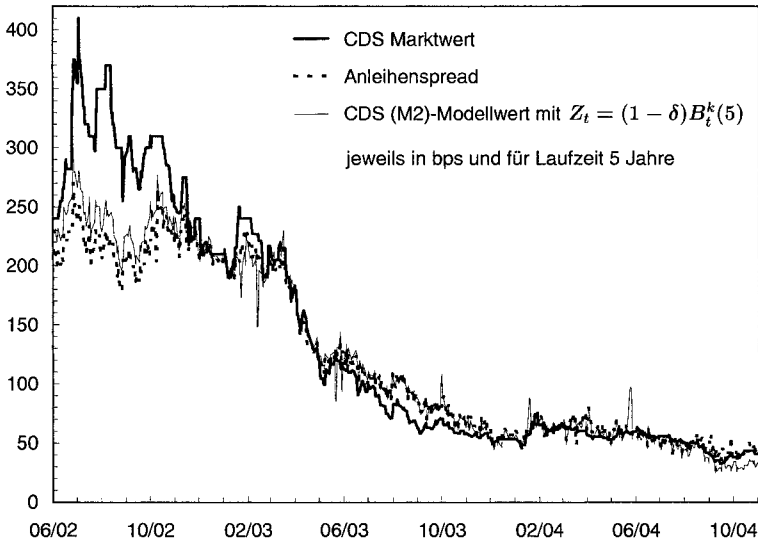


Abb. 4. CDS Prämie und Anleihenspread

Spreadentwicklung sowie eventuelle Abhängigkeiten zwischen Zins- und Intensitätsentwicklung bleiben daher unberücksichtigt. Wir verwenden eine Kassazinsstruktur, die auf (fast) ausfallrisikolosen Bundesanleihen basiert. *Houweling/Vorst* (2005) kalibrieren dagegen Reduktionsmodelle (vergleichbar mit (M1) und (M3)) mit der Swap-Kurve als Benchmark für den risikolosen Zins. Sie erhalten geringere Preisfehler als mit der Government-Kurve.

Eine weitere Abweichungsursache resultiert möglicherweise aus der Vernachlässigung der Lieferoption, die üblicherweise der Sicherungsnehmer für sich in Anspruch nehmen kann. Eine unterschiedliche Besicherung der Anleihen hat zur Folge, dass nach Eintritt einer Insolvenz die Anleihen aus der Insolvenzmasse verschieden bedient werden. Der Sicherungsnehmer hat möglicherweise mehrere Anleihen zur Auswahl, die er an den Sicherungsgeber des CDS liefern kann, wodurch für ihn eine Cheapest-to-Deliver-Option besteht.

5 Zusammenfassung

Reduktionsmodelle erklären Marktpreise von gehandelten Unternehmensanleihen und sonstigen Kreditderivaten ohne Bezugnahme auf fundamentale Unternehmensdaten. Die Modelle unterscheiden sich insbesondere hinsichtlich der Spezifikation des so genannten *Hazardprozesses*, auf dessen Basis der Ausfallzeitpunkt modelliert wird. Wir stellen in dieser Arbeit neun verschiedene Modellierungen für die Ausfallzeit dar, von denen vier auf Hazardfunktionen und fünf auf Hazardprozessen basieren. In einer Fallstudie wird untersucht,

wie sich Wahlmöglichkeiten bei der Spezifikation des Hazardprozesses und der Wiedergewinnungsmodelle auf die Bewertung von Credit Default Swaps auswirken.

Eine empirische Untersuchung könnte überprüfen, ob ein Ausfall oder eine Intensitätsänderung zu Zeitpunkten der Veröffentlichung von Bilanzen und Quartalsberichten bzw. an den Zeitpunkten planmäßiger Kuponzahlungen und Anleihentilgung wahrscheinlicher ist als an gewöhnlichen Handelstagen und ob sich dies auf die Bewertung von Kreditderivaten auswirkt. In diesem Fall wäre zu überprüfen, ob Reduktionsmodelle, die neben Ausfallintensitäten auch positive Ausfallwahrscheinlichkeiten für einzelne Tage zulassen, für die Bewertung besser geeignet sind als Intensitätsmodelle.

Literaturverzeichnis

1. Bélanger, A.; S. E. Shreve und D. Wong (2004): A General Framework for Pricing Credit Risk. *Mathematical Finance*, 14, S. 317–350.
2. Bielecki, T. R. und M. Rutkowski (2002): *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Springer-Verlag, Berlin.
3. Black, F.; E. Derman und W. Toy (1990): A One-Faktor Model of Interest Rates and its Applications to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal*, 46, S. 33–39.
4. Black, F. und M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81, S. 637–654.
5. Duffie, D. und K. J. Singleton (1999): Modeling Term Structures of Defaultable Bonds. *The Review of Financial Studies*, 12, S. 687–720.
6. Houweling, P. und T. Vorst (2005): Pricing Default Swaps: Empirical Evidence. Forthcoming in *Journal of International Money and Finance*.
7. Jarrow, R. A.; D. Lando und S. M. Turnbull (1997): A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads. *The Review of Financial Studies*, 10, S. 481–523.
8. Jarrow, R. A. und S. M. Turnbull (1995): Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk. *The Journal of Finance*, 50, S. 53–85.
9. Lando, D. (1998): On Cox Processes and Credit Risky Securities. *Review of Derivatives Research*, 2, S. 99–120.
10. Merton, R. C. (1974): On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*, 29, S. 449–470.
11. Svensson, L. E. O. (1994): Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–94. NBER Working Paper 4871.
12. Wilhelm, J. (1985): *Arbitrage Theory*. Springer-Verlag (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems), Berlin.
13. Wilhelm, J. und L. Brüning (1992): Die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze: Theoretisches Konstrukt und empirische Evaluierung – Untersuchung mit Daten des Kapitalmarktes der Bundesrepublik Deutschland. *Kredit und Kapital*, 25, S. 259–294.