Delta Theorem Ist $\underset{k\times 1}{(z-\mu)} \sim N(0,\Sigma)$ und $\underset{r\times 1}{h = h(z)}$, $r<k$, dann ist

$$(h(z)-h(\mu)) \overset{a}{\sim} N(0, D\Sigma D')$$

$$D = \nabla h(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial z_k} \\ \frac{\partial h_r}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial z_k} \end{bmatrix}, \quad D_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial z_j}$$

Aufgabe 1

Aus Theorem oben gilt ~~folgt für jeden geschätzten Eigenwert l_j, d.h. für jeden Eigenwert der Matrix S (da $S \sim (n-1)^{-1} W_p(\Sigma, n-1)$)~~

$$\sqrt{n-1}\,(\hat{l}_j - \lambda_j) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 2\lambda_j^2), \quad j = 1,\dots,p.$$

Da die asymptotische Varianz vom wahren Eigenwert λ_j abhängt, bietet sich eine Transformation $f(\hat{l}_j) = \log(\hat{l}_j)$ an, die in Verbindung mit der Delta-Methode ~~(Theorem 4.14)~~ die asymptotische Varianz unabhängig von λ_j macht:

$$\sqrt{n-1}\,(\log(\hat{l}_j) - \log(\lambda_j)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{\partial f(\lambda_j)}{\partial \lambda_j}\, 2\lambda_j^2\, \frac{\partial f(\lambda_j)}{\partial \lambda_j}\right)$$

d.h.

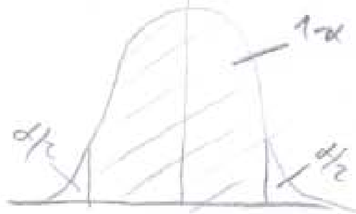
$$\frac{\partial f(\lambda_j)}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j}$$

$$\sqrt{n-1}\,(\log(\hat{l}_j) - \log(\lambda_j)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,2)$$

$Var(aX) = a^2 Var(X)$

bzw.

$$\sqrt{(n-1)/2}\,(\log(\hat{l}_j) - \log(\lambda_j)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1).$$



Es folgt das Konfidenzintervall für λ_j:

Quantil der Standardnormalverteilung

$$P\left(z_{\alpha/2} \le \sqrt{(n-1)/2}\,(\log(\hat{l}_j) - \log(\lambda_j)) \le -z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\exp\left[\log(\hat{l}_j) - z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{2}{n-1}}\right] \le \lambda_j \le \exp\left[\log(\hat{l}_j) + z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{2}{n-1}}\right]\right) \approx 1-\alpha$$

$1-\alpha$ Konfidenzintervall für λ_j

Das durch $\hat{\lambda}_j$ bestimmte Intervall überdeckt den wahren Parameter λ_j mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\alpha$