Leopold von Thadden

Makroökonomie I

Vorlesung 11

Wintersemester 2013/2014

Wachstum: Das Solow-Modell

(Kapitel 11 und 12)

Gliederung:

Kapitel 11 und 12 setzen die Diskussion der langen Frist fort

11.1 Erklärungsbeitrag des Solow-Modells

11.2 Vorüberlegung: Das Modell bei konstanter Bevölkerung und ohne technischen Fortschritt

11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

Vorbemerkung

- Kapitel 11 beinhaltet grundlegende Vorüberlegungen aus der Wachstumstheorie zum Zusammenhang zwischen Produktion, Sparen und dem Aufbau von Kapital...
- ...und Kapitel 12, aufbauend auf diesen Überlegungen, widmet sich dem Thema Wachstum und technischer Fortschritt
- Im Mittelpunkt beider Kapitel steht das neoklassische Wachstumsmodell von Robert Solow (1956)
- Dieses Modell bietet bis heute den zentralen Bezugspunkt für Arbeiten auf dem Gebiet der Wachstumstheorie

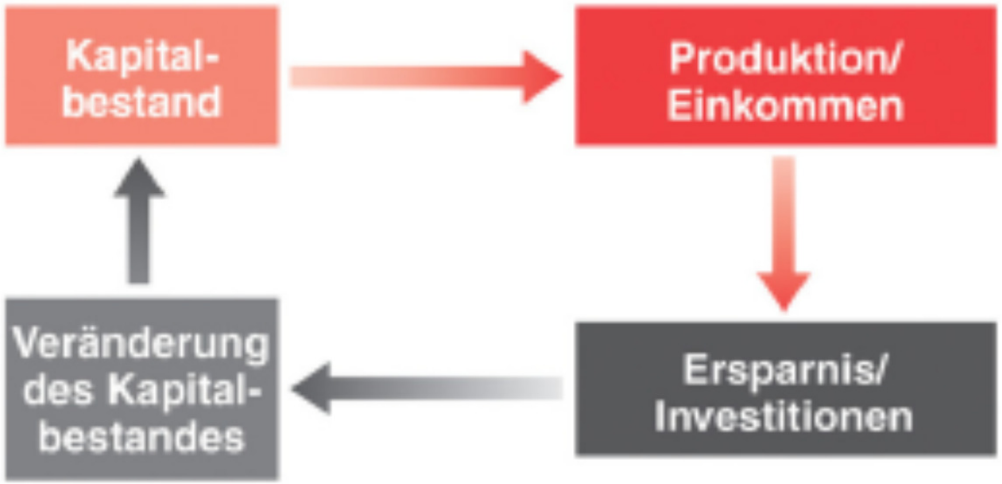
11.1 Erklärungsbeitrag des Solow-Modells

Das Solow-Modell prognostiziert, dass...

- ...in Ländern mit einer geringen Kapitalausstattung pro Kopf der Output pro Kopf vorübergehend höhere Wachstumsraten aufweist.
  Insofern ist das Modell hilfreich für das Verständnis erfolgreicher historischer Aufholprozesse (innerhalb der OECD; ausgewählte Schwellenländer).
- ...dauerhafte Veränderungen der Sparquote nur zu einem vorübergehenden, nicht aber zu einem dauerhaften Wachstumseffekt führen.
  Insofern illustriert das Modell, warum hohe Sparquoten keine Vorbedingung für dauerhaft hohe Wachstumsraten sind (Bsp.: traditionell niedrige Sparquote der USA).
- ...dauerhaftes Wachstum nicht ohne technischen Fortschritt denkbar ist.

11.2 Vorüberlegung: Das Modell bei konstanter Bevölkerung und ohne technischen Fortschritt

Kapital wird über die Zeit akkumuliert, d.h. es gibt Wechselwirkungen zwischen Produktion und Kapital:



11.2 Vorüberlegung: Das Modell bei konstanter Bevölkerung und ohne technischen Fortschritt

Vereinfachende Annahmen:

I) Bevölkerung und aggregierte Beschäftigung sind konstant:

$$N_t = N \qquad \forall\, t$$

II) Kein Technischer Fortschritt, d.h. das Niveau des technischen Wissens (A) ist konstant:

$$A_t = A = 1 \qquad \forall\, t$$

Weiterhin:

- Fiskalpolitik wird nicht betrachtet: $G=T=0$
- Rein realwirtschaftliche Analyse
- Geschlossene Volkswirtschaft

11.2 Vorüberlegung: Das Modell bei konstanter Bevölkerung und ohne technischen Fortschritt

3 Modellbausteine:

1) Wirkung von Kapital auf die Produktion:

$$Y_t = F(K_t,N) \qquad (1a)$$

Pro-Kopf Betrachtung (bei konstanten Skalenerträgen von (1a)):

$$Y_t/N = F(K_t/N,\, 1) \equiv f(K_t/N) \qquad (1b)$$

2) Produktion, Investition und Ersparnis:

Zentrale Verhaltensannahme des Solow-Modells: **konstante Sparquote** $s \in (0,1)$

$$S_t = s \cdot Y_t$$

Hinweis: anders als in der kurzen Frist, ist in der langen Frist autonomes Entsparen nicht plausibel

Kombination mit der IS-Gleichung, d.h.: $I_t = S_t$, ergibt für die Bruttoinvestitionen:

$$I_t = s \cdot Y_t \qquad (2)$$

11.2 Vorüberlegung: Das Modell bei konstanter Bevölkerung und ohne technischen Fortschritt

3) Investitionen und Kapitalakkumulation:

$$K_{t+1} = (1-\delta)\cdot K_t + I_t \qquad (3)$$

Vereinfachende Annahme: Konstanter Anteil $\delta \in (0,1)$ des Kapitalstocks wird jede Periode abgeschrieben

Kombination der 3 Bausteine ergibt die zentrale Bewegungsgleichung des Solow-Modells für die Entwicklung von Kapital und Produktion in...

...aggregierten Niveaus:

$$K_{t+1} - K_t = s\cdot F(K_t,N) - \delta\cdot K_t \qquad (4)$$

...pro Kopf Variablen (= intensive Form):

$$\frac{K_{t+1}}{N} - \frac{K_t}{N} = s\cdot f(K_t/N) - \delta\cdot\frac{K_t}{N} \qquad (5)$$

11.2 Vorüberlegung: Das Modell bei konstanter Bevölkerung und ohne technischen Fortschritt

Interpretation der zentralen Bewegungsgleichung (5) in intensiver Form:

$$\frac{K_{t+1}}{N} - \frac{K_t}{N} = s \cdot f(K_t/N) - \delta \cdot \frac{K_t}{N} \qquad (5)$$

Linke Seite: Veränderung der Kapitalintensität

Rechte Seite: Bruttoinvestitionen pro Kopf – Abschreibungen pro Kopf

Steady State – Gleichgewicht:

- Im Steady State ist die Kapitalintensität K_t/N konstant, so dass gilt:

$$s \cdot f(K^*/N) = \delta \cdot \frac{K^*}{N} \qquad (6)$$

- Sei $\frac{K^*}{N} > 0$: Dann gibt es i.A. einen eindeutigen Steady-State Wert, zu dem die Ökonomie langfristig konvergiert. Entsprechend: $\frac{Y^*}{N} = f(K^*/N)$.

  Hinweis: Steady States mit $\frac{K^*}{N} = 0$ sind ökonomisch uninteressant (und ohnehin nicht stabil)

11.2 Vorüberlegung: Das Modell bei konstanter Bevölkerung und ohne technischen Fortschritt

Stabilität des Steady State ($K^*/N > 0$):

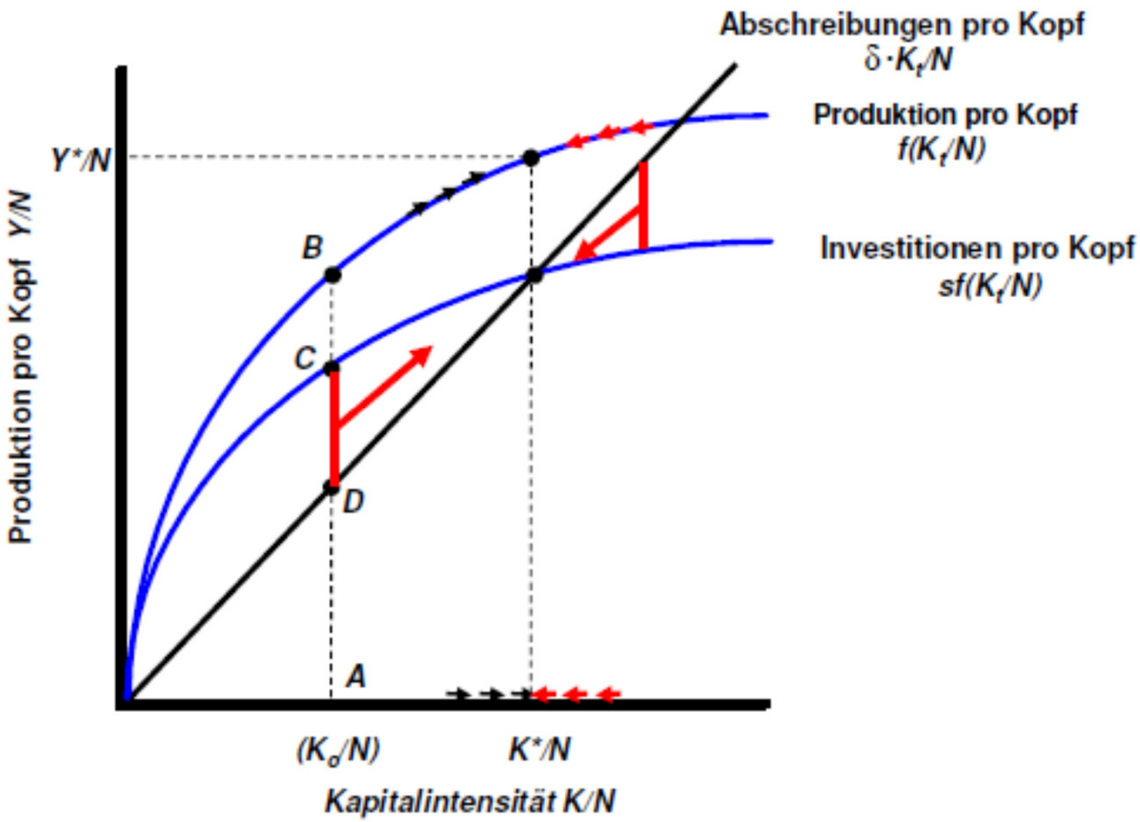
$$\frac{K_{t+1}}{N} - \frac{K_t}{N} = s \cdot f(K_t/N) - \delta \cdot \frac{K_t}{N} \qquad (5)$$

Ausgangspunkt in t=0:
$K_0/N < K^*/N$

Bruttoinvestitionen pro Kopf: AC
Abschreibungen pro Kopf: AD

Da AC > AD: Kapitalintensität steigt und konvergiert gegen den Steady-State Wert K^*/N

Analog: Stabile Dynamik für Ausgangssituation mit
$K_0/N > K^*/N$



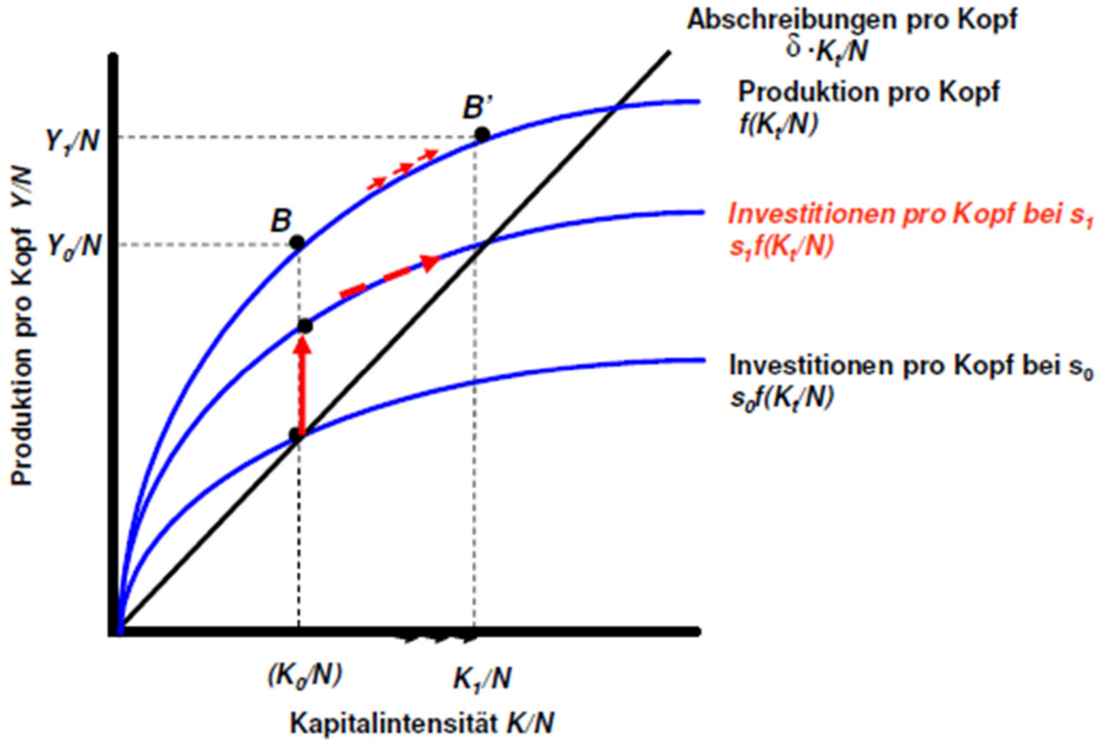
11.2 Vorüberlegung: Das Modell bei konstanter Bevölkerung und ohne technischen Fortschritt

Wie wirkt ein dauerhafter Anstieg der Sparquote von s_0 auf $s_1 > s_0$?

Ausgangspunkt: Steady State K_0/N (passend zu s_0)
Endpunkt: Steady State K_1/N (passend zu s_1)

Anstieg der Sparquote:
- (i) erhöht dauerhaft das Produktionsniveau pro Kopf (Y/N) *(Bewegung von B nach B‘)*
- (ii) führt vorübergehend, aber nicht dauerhaft zu einer höheren Wachstumsrate von Y/N

Hinweis: dauerhafte Wachstumsrate von Y/N ist Null.



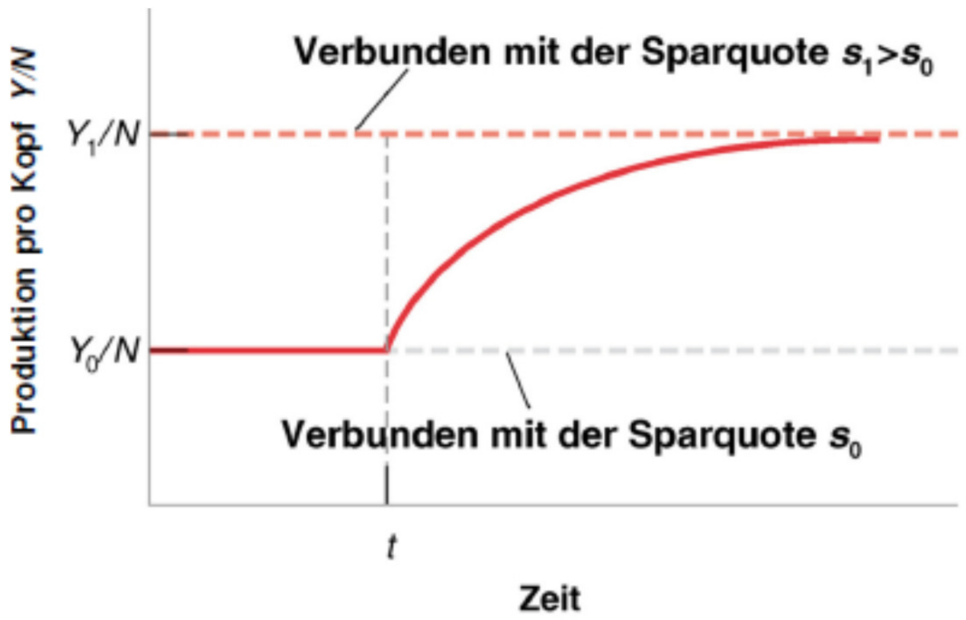
11.2 Vorüberlegung: Das Modell bei konstanter Bevölkerung und ohne technischen Fortschritt

Wie wirkt ein dauerhafter Anstieg der Sparquote von s_0 auf $s_1 > s_0$?

Anstieg der Sparquote:

- (i) erhöht dauerhaft das Produktionsniveau pro Kopf (Y/N)

- (ii) führt vorübergehend, aber nicht dauerhaft zu einer höheren Wachstumsrate von Y/N



11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

Verallgemeinerung der Annahmen I) und II):

I') Bevölkerung und aggregierte Beschäftigung wachsen mit konstanter Rate $g_N > 0$:

$$N_t = (1+g_N)\cdot N_{t-1} \qquad \forall\, t$$

II') Technischer Fortschritt, d.h. das Niveau des technischen Wissens (A_t) wächst mit konstanter Rate $g_A > 0$:

$$A_t = (1+g_A)\cdot A_{t-1} \qquad \forall\, t$$

Unveränderte Annahmen:

- Fiskalpolitik wird nicht betrachtet: $G=T=0$
- Rein realwirtschaftliche Analyse
- Geschlossene Volkswirtschaft

11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

Annahme: Technischer Fortschritt wird als **arbeitsmehrend (‚labour-augmenting‘)** angenommen

⇒ Verallgemeinerung der Produktionsfunktion (1a) ergibt:

$$Y_t = F(K_t, A_t \cdot N_t) \qquad (1a')$$

mit 2 Inputs: Kapital (K_t) und effektive Arbeit ($A_t \cdot N_t$)

Idee: Technischer Fortschritt erhöht die effektive Arbeit AN, d.h. ein Anstieg von A um x% wirkt so, als wenn sich die Beschäftigung N um x% erhöht hätte

11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

Ausgehend von der allgemeinen Produktionsfunktion:

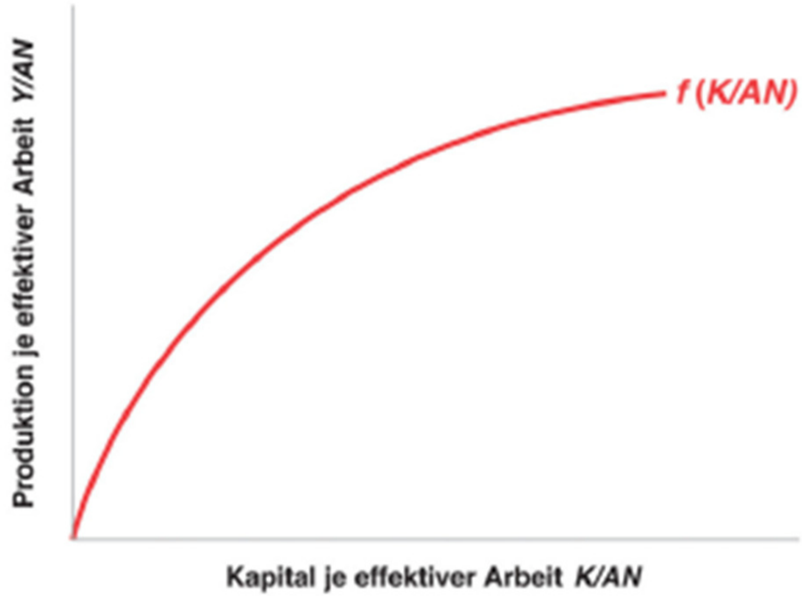
$$Y_t = F(K_t, A_t \cdot N_t) \qquad \text{(1a‘)}$$

→ Betrachtung des Outputs pro Einheit effektiver Arbeit

(unter Verwendung konstanter Skalenerträge von (1a‘))

$$\frac{Y_t}{A_t \cdot N_t} = F\left(\frac{K_t}{A_t \cdot Nt}, 1\right) \equiv f\left(\frac{K_t}{A_t \cdot Nt}\right) \qquad \text{(1b‘)}$$

Output pro Einheit effektiver Arbeit ($Y_t/(A_t \cdot N_t)$) mit abnehmendem Grenzprodukt in Bezug auf den Kapitalstock pro Einheit effektiver Arbeit ($K_t/(A_t \cdot N_t)$)



11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

3 Modellbausteine:

1) Wirkung von Kapital auf die Produktion:

$Y_t = F(K_t, A_t \cdot N_t)$ (1a') bzw. $\frac{Y_t}{A_t \cdot Nt} = f(\frac{K_t}{A_t \cdot Nt})$ (1b')

2) Produktion, Investition und Ersparnis:

$$I_t = s \cdot Y_t \qquad (2)$$

3) Investitionen und Kapitalakkumulation:

$$K_{t+1} = (1-\delta) \cdot K_t + I_t \qquad (3)$$

Kombination der 3 Bausteine ergibt zunächst die Bewegungsgleichung des Solow-Modells in aggregierten Niveaus:

$$K_{t+1} - K_t = s \cdot F(K_t, A_t \cdot N_t) - \delta \cdot K_t \qquad (4')$$

11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

Bewegungsgleichung: von der Niveaubetrachtung...

$$K_{t+1} - K_t = s \cdot F(K_t, A_t \cdot N_t) - \delta \cdot K_t \qquad (4')$$

...zur Betrachtung in Einheiten effektiver Arbeit:

$$\frac{K_{t+1}}{A_t \cdot Nt} - \frac{K_t}{A_t \cdot Nt} = s \cdot f\left(\frac{K_t}{A_t \cdot Nt}\right) - \delta \cdot \frac{K_t}{A_t \cdot Nt}$$

Hinweis: $\frac{K_{t+1}}{A_t \cdot N_t} = \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} \cdot N_{t+1}} \cdot \frac{A_{t+1} \cdot N_{t+1}}{A_t \cdot Nt} = \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} \cdot N_{t+1}} \cdot (1+g_A) \cdot (1+g_N) \approx \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} \cdot N_{t+1}} \cdot (1+g_A+g_N)$

$$\Rightarrow \quad \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} \cdot N_{t+1}} - \frac{K_t}{A_t \cdot N_t} = \frac{s \cdot f\left(\frac{K_t}{A_t \cdot N_t}\right) - (\delta+g_A+g_N) \cdot \frac{K_t}{A_t \cdot N_t}}{1+g_A+g_N} \qquad (5')$$

11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

Interpretation der zentralen Bewegungsgleichung (5‘):

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1} \cdot N_{t+1}} - \frac{K_t}{A_t \cdot N_t} = \frac{s \cdot f\left(\frac{K_t}{A_t \cdot N_t}\right) - (\delta + g_A + g_N) \cdot \frac{K_t}{A_t \cdot N_t}}{1 + g_A + g_N} \qquad (5')$$

Linke Seite: Veränderung des Kapitalstocks in Einheiten effektiver Arbeit

Rechte Seite (Zähler): Bruttoinvestitionen in Einheiten effektiver Arbeit – benötigte Investitionen in Einheiten effektiver Arbeit (um den Kapitalstock in Einheiten effektiver Arbeit konstant zu halten)

Rechte Seite (Nenner): ‚Korrekturfaktor‘ zwischen den Perioden

11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1} \cdot N_{t+1}} - \frac{K_t}{A_t \cdot N_t} = \frac{s \cdot f(\frac{K_t}{A_t \cdot N_t}) - (\delta + g_A + g_N) \cdot \frac{K_t}{A_t \cdot N_t}}{1 + g_A + g_N} \qquad (5')$$

Steady State – Gleichgewicht:

- Im Steady State ist der Kapitalstock in Einheiten effektiver Arbeit $K/(A \cdot N)$ konstant, so dass gilt:

$$s \cdot f((\frac{K}{AN})^*) = (\delta + g_A + g_N) \cdot (\frac{K}{AN})^* \qquad (6)$$

- Sei $(\frac{K}{AN})^* > 0$: Dann gibt es i.A. einen eindeutigen Steady-State Wert, zu dem die Ökonomie langfristig konvergiert.

  Entsprechend: $(\frac{Y}{AN})^* = f((\frac{K}{AN})^*)$

  Hinweis: Steady States mit $(\frac{K}{AN})^* = 0$ sind ökonomisch uninteressant (und ohnehin nicht stabil)

11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

Stabilität des Steady State $\left(\frac{K}{AN}\right)^*$:

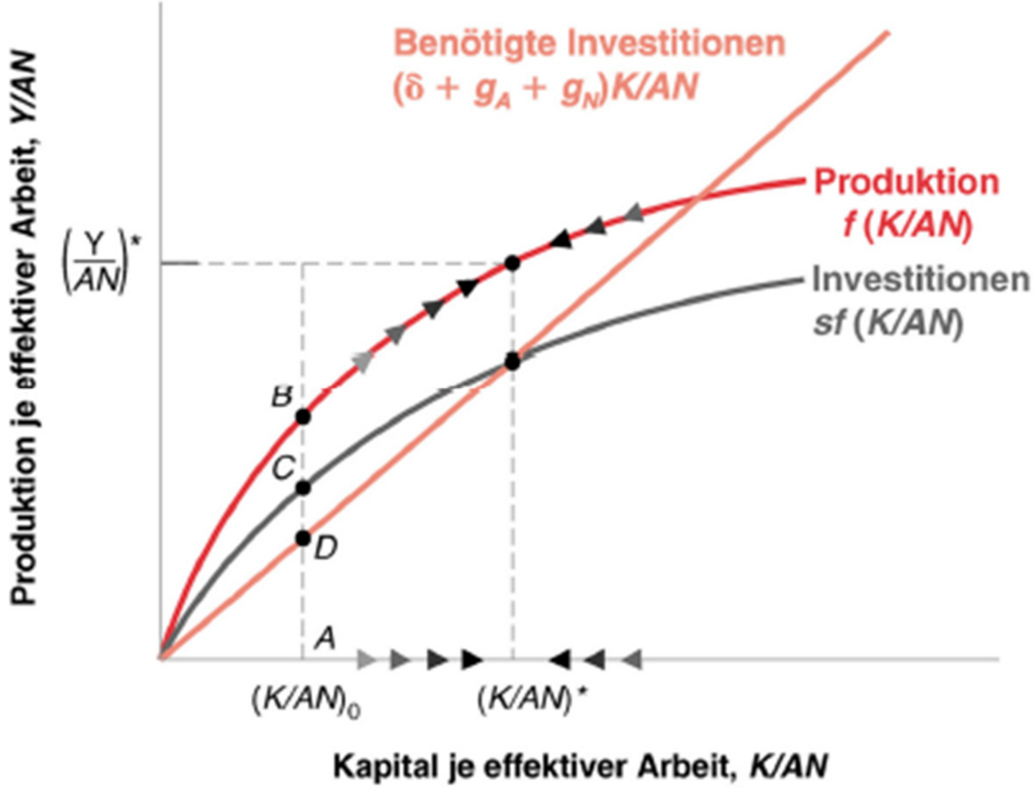
Ausgangspunkt in t=0:
$(K/AN)_0 < (K/AN)^*$

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}\cdot N_{t+1}} - \frac{K_t}{A_t\cdot N_t} = \frac{s\cdot f\left(\frac{K_t}{A_t\cdot N_t}\right) - (\delta + g_A + g_N)\cdot \frac{K_t}{A_t\cdot N_t}}{1+g_A+g_N} \qquad (5')$$

Bruttoinvestitionen in Einheiten effektiver Arbeit: **AC**
Benötigte Investitionen in Einheiten effektiver Arbeit: **AD**

Da AC > AD: Kapitalstock in Einheiten effektiver Arbeit **steigt und konvergiert gegen den Steady-State Wert (K/AN)***

Analog: Stabile Dynamik für Ausgangssituation mit $(K/AN)_0 > (K/AN)^*$



11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

Interpretation: Steady State – Gleichgewicht und **ausgewogener Wachstumspfad (‚*Balanced Growth Path*')**

- Im Steady State ist das Niveau des Kapitalstocks in Einheiten effektiver Arbeit konstant: $(K/AN)^*$
- Da A_t und N_t wachsen, wächst der aggregierte Kapitalstock (K_t) mit der Rate g_A+g_N
- Der Kapitalstock pro Kopf (K_t/N_t) wächst mit der Rate des technischen Fortschritts g_A

- Analog: (i) Aggregierter Output bzw. Konsum wachsen ebenfalls mit der Rate g_A+g_N.
  (ii): Output bzw. Konsum pro Kopf wachsen ebenfalls mit der Rate g_A.

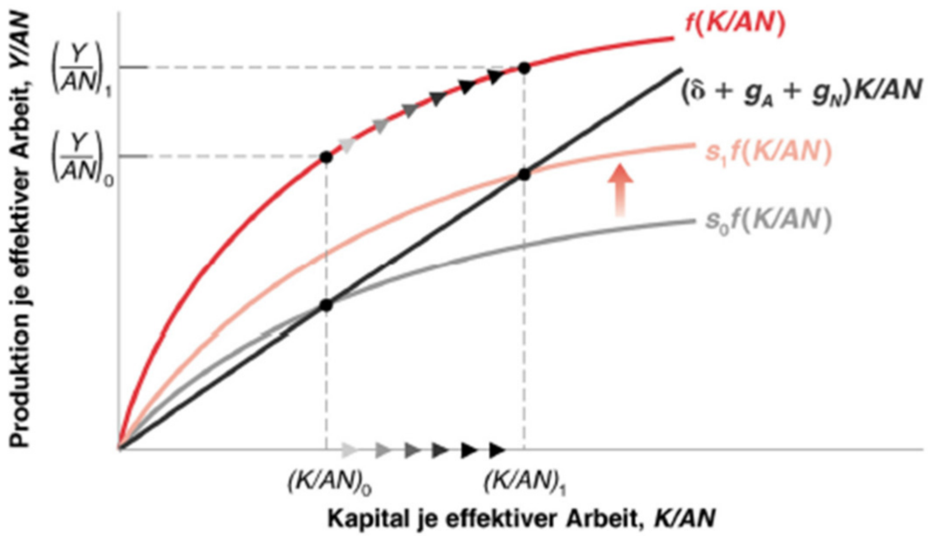
11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

Wie wirkt ein dauerhafter Anstieg der Sparquote von s_0 auf $s_1 > s_0$?

Betrachtung in Einheiten effektiver Arbeit:

Ausgangspunkt: Steady State **$(K/AN)_0$** (passend zu s_0)
Endpunkt: Steady State **$(K/AN)_1$** (passend zu s_1)

Anstieg der Sparquote:
(i) erhöht dauerhaft das Produktionsniveau in Einheiten effektiver Arbeit (Y/AN)
(ii) führt vorübergehend, aber nicht dauerhaft zu einer höheren Wachstumsrate von Y/AN



Hinweis: dauerhafte Wachstumsrate von Y/AN ist Null.

11.3 Das Modell bei wachsender Bevölkerung und mit technischem Fortschritt

Wie wirkt ein dauerhafter Anstieg der Sparquote von s_0 auf $s_1 > s_0$?

Betrachtung von pro Kopf Größen:

Anstieg der Sparquote:

(i) erhöht dauerhaft das pro Kopf Niveau Y/N

(ii) führt vorübergehend, aber nicht dauerhaft zu einer höheren Wachstumsrate von Y/N

Hinweis: dauerhafte Wachstumsrate von Y/N ist g_A.