JProf. Dr. Andrey Launov Johannes-Gutenberg-Universität Mainz

Multivariate Methoden: Übungsblatt 1

Erklärung 1 (Ein Eigenwertproblem)
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar, A eine quadratische Matrix, somit $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ für ein $p \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ein Vektor mit $\gamma \neq 0$. Existieren zu einer gegebenen Matrix A ein Vektor γ und ein Skalar λ, die die Gleichung

$$A\gamma = \lambda\gamma$$

erfüllen, dann nennt man γ und λ Eigenvektor bzw. Eigenwert der Matrix A.

Aufgabe 1 (Ein Eigenwertproblem)
Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Matrix A.

c) Sind die Eigenvektoren eindeutig?

Erklärung 2 (Jordan-Zerlegung einer symmetrischen Matrix)
Die Jordan-Zerlegung einer symmetrischen und quadratischen Matrix $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ hat die Form

$$B = \Gamma \Lambda \Gamma',$$

wobei $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten der Matrix B auf der Hauptdiagonalen ist und Γ die Matrix der entsprechenden Eigenvektoren.

Aufgabe 2 (Jordan-Zerlegung einer symmetrischen Matrix)
Berechnen Sie die Jordan-Zerlegung der quadratischen Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

a) Lösen Sie hierzu das Eigenwertproblem.

b) Demonstrieren Sie die Orthogonalität der Eigenvektoren.

c) Geben Sie nun die Jordan-Zerlegung der Matrix B an.

Erklärung 3 (Idempotente Matrix)

- Eine Matrix C ist genau dann idempotent, wenn gilt

$$C = CC.$$

- Die Spur $tr(C)$ einer Matrix $C \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ist die Summe ihrer Diagonalelemente

$$tr(C) = \sum_{i=1}^{p} c_{ii}$$

- Der Rang einer Matrix C ist die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spalten (Zeilen), wobei die Vektoren $c_j, j = 1, \dots, p$ linear unabhängig sind, wenn $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_j = 0$ nur für $c_j = 0 \ \forall j$ erfüllt ist.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass eine idempotent symmetrische Matrix C nur Eigenwerte $\lambda_i \in \{0, 1\}$ haben kann.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}(C) = \mathrm{rank}(C) =$ Anzahl der Eigenwerte ungleich Null für jede idempotent symmetrische Matrix C.

c) Gibt es eine idempotent symmetrische $(p \times p)$-Matrix mit vollem Rang? Wenn ja, geben Sie eine solche an. Zeigen Sie, dass diese eindeutig ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Matrizen $P = X(X^T X)^{-1} X^T$ und $Q = I - X(X^T X)^{-1} X^T$ idempotent symmetrisch sind.