

Multivariate Methoden: Lösungsblatt 1

Aufgabe 1 (Ein Eigenwertproblem)

Eigenwertproblem. Eigenvektor - gestreckt, Richtung gleich. Bsp: Einheitsmatrix. 2*Einheitsmatrix

- a) Berechnung der Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Dafür berechnet man

$$\begin{aligned} |A - \lambda \mathbb{1}| &= (-3 - \lambda)(11 - \lambda) + 48 \\ &= \lambda^2 - 8\lambda - 33 + 48 \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 15 \end{aligned}$$

und bekommt mit der p-q-Formel

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} \Rightarrow \lambda_1 = 3 \text{ und } \lambda_2 = 5$$

- b) Berechnung der Eigenvektoren der Matrix A .

$$A\gamma = \lambda\gamma \Leftrightarrow (-3 - \lambda)\gamma_1 - 12\gamma_2 = 0 \text{ und } 4\gamma_1 + (11 - \lambda)\gamma_2 = 0$$

Für $\lambda_1 = 3$ folgt $\gamma = (2, -1)'$ und für $\lambda_2 = 5$ folgt $\gamma = (3, -2)'$.

- c) Die Eigenvektoren sind nicht eindeutig! Für $\lambda_1 = 3$ sind etwa alle Vektoren der Form $(2x, -x)'$ Eigenvektoren.

Aufgabe 2 (Jordan-Zerlegung einer symmetrischen Matrix)

Auf Normierung der EV hinweisen!

- a) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$$

sind die Eigenwerte gegeben durch $\lambda_1 = -5$ und $\lambda_2 = 20$ und die zugehörigen Eigenvektoren sind $\gamma = (4, -3)'$ bzw. $\gamma = (3, 4)'$.

- b) Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ergibt sind sie orthogonal zueinander.

- c) Für die Jordan-Zerlegung der Matrix B brauchen wir zum einen die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten, also $\Lambda = \text{diag}(-5, 20)$ und zum anderen die Matrix Γ mit den Eigenvektoren, die wir zuvor aber normieren müssen. Dann bekommen wir

$$A = \frac{1}{5^2} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Es gilt $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CBA)$, d.h. tr invariant unter zyklischen Vertauschungen. $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$. $\text{rank}(\mathbb{1}) = p$. $\Gamma\Gamma' = \mathbb{1}$, da EV normiert.

- a) Angenommen λ ist ein Eigenwert zur idempotenten und symmetrischen Matrix C , dann existiert ein Eigenvektor γ , so dass gilt

$$\lambda\gamma = C\gamma = CC\gamma = C\lambda\gamma = \lambda C\gamma = \lambda\lambda\gamma = \lambda^2\gamma.$$

Daher gilt mit $\gamma \neq 0$

$$(\lambda^2 - \lambda)\gamma = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - \lambda) = \lambda(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ oder } 0$$

- b)

$$\text{tr}(C) = \text{tr}(\Gamma\Lambda\Gamma') = \text{tr}(\Gamma'\Gamma\Lambda) = \text{tr}(\Lambda) = \text{Anzahl der } \lambda_i \neq 0$$

$$\text{rank}(C) = \text{rank}(\Gamma\Lambda\Gamma') = \text{rank}(\Lambda),$$

da Λ vollen Rang gilt $\text{rank}(\Lambda) = \text{Anzahl der } \lambda_i \neq 0$, da $\lambda_i \in \{0, 1\}$

- c)

$$\text{rank}(C) = p \Rightarrow \text{rank}(\Lambda) = p \Rightarrow \text{alle EW}=1$$

$$\Rightarrow \Lambda = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow C = \Gamma\Lambda\Gamma' = \Gamma\mathbb{1}\Gamma' = \Gamma\Gamma' = \mathbb{1}$$

d.h. die einzige idempotent symmetrische Matrix mit vollem rang ist die Einheitsmatrix.

Aufgabe 4

P symmetrisch $\Rightarrow P = P'$

P idempotent $\Rightarrow P = PP$

$$P' = (X(X'X)^{-1}X')' = X(X'X)^{-1'}X' = X(X'X)^{-1}X' = P$$

(die Inverse einer symmetrischen Matrix ist wieder symmetrisch)

$$P'P = PP = X(X'X)^{-1} \underbrace{X'X}_Z \underbrace{(X'X)^{-1}}_{Z^{-1}} X' = X(X'X)^{-1}X' = P$$

$$Q' = (\mathbb{1} - P)' = \mathbb{1}' - P' = \mathbb{1} - P = Q$$

$$Q'Q = QQ = (\mathbb{1} - P)(\mathbb{1} - P) = \mathbb{1} - P - P + PP = \mathbb{1} - P = Q$$