Johannes-Gutenberg Universität Mainz
Bachelor of Science in Wirtschaftswissenschaften

Makroökonomik I

Wintersemester 2017/ 2018

Klaus Wälde (Vorlesung), Steffi Nagel und Tutoren (Tutorien)

www.macro.economics.uni-mainz.de
9. Oktober 2017

1 Einführung

1.1 Ein Überblick

Was Sie in den nächsten 25-26 Doppelstunden erwartet

- Die großen (makroökonomischen) Fragen der Welt
- Die ökonomische Analysen
- Die Antworten aus makroökonomischer Sicht

1.2 Themen und Analysen

Was die Welt bewegt	Die ökonomische Analyse	Teil
Wachstum und Entwicklung	Wirtschaftswachstum	I
	Fiskalpolitik und Budgetdefizits	VI
Ölpreisschocks, Wiedervereinigung, Immobilienmarkt- und Bankenkrise	Konjunkturzyklen	II
	Zentralbank und Geldpolitik	IV
Verteilungsgerechtigkeit, Gleichheit, Ungleichheit	Arbeitslosigkeit	III
	Ersparnis und Investition	VII
Globale Erwärmung	Umweltökonomik	V
	Ökonomik und Psychologie	VIII

– Kerngebiete der Makroökonomik vs. Mainzer Schmankerl –

1.3 Die Struktur der Vorlesung

... am Beispiel von Teil I: Wirtschaftswachstum

1. Die zentralen Fragestellungen
   1.1 Fakten zu Wirtschaftsleistung und Wirtschaftswachstum
   1.2 Die Fragen
2. Die ökonomische Analyse
   2.1 Armut und Reichtum
   2.2 Das Solow Wachstumsmodell
   2.3 ...
3. Die Antworten aus makroökonomischer Sicht

Ausnahmen bestätigen die Regel (z.B. Finanzmarktkrise)

1.4 Literatur

- Blanchard Illing – Makroökonomie
- Burda Wyplosz – Macroeconomics, A European Text
- Wälde – Wachstum und Entwicklung - Vorlesungsskript Würzburg http://www.macro.economics.uni-mainz.de/1249.php
- Wälde – Applied Intertemporal Optimization – www.waelde.com/KTAP
- Weitere Quellen im Laufe der Veranstaltung

Entscheidend zum Verständnis des Stoffes sind die Vorlesungsmitschriften und die Mitschriften der Tutorien. Die im Netz vorab bereitgestellten Foliensätze sind eher "Folienfetzen", d.h. die Texte sind nicht vollständig und werden in der Vorlesung ergänzt. Die ergänzten Folien werden nach der Vorlesung im JGU Reader stehen.

1.5 Variablendefinitionen

Variable	Bedeutung
α	Produktionselastizität von Kapital
β	Diskontierungsfaktor, Produktionselastizität von Öl
γ	Präferenzparameter
c	Konsum eines Indivduums / Haushalts
δ	Verschleiß-/Abschreibungsrate
e	Exponentialfunktion
$e(w)$	Anstrengung in Abhängigkeit vom Reallohn (”effort”)
ε	Preiselastizität der Nachfrage
g	Wachstumsrate des BIP / des Konsums
h	individuelle Produktivität bzw. individuelles Humankapital
l	Freizeit ("leisure")

Variable	**Bedeutung**
λ	Separationsrate (oder Lagrangeparameter)
μ	Matchingrate
p	Preis
p^I	Preis des Investitionsgutes
p^C	Preis des Konsumgutes
π	Inflationsrate, Gewinn
r	Zinssatz
ρ	Zeitpräferenzrate

Variable	**Bedeutung**
s	Sparquote
t	Zeitperiode t (heute)
τ	Steuersatz, Zeit, wobei $t < \tau$
u	Arbeitslosenrate, instantaner Nutzen
v	Preis einer Einheit Kapital
w	Lohn
w^K	Faktorentlohnung Kapital (real, außer in Teil III, dort nominal)
w^L	Faktorentlohnung Arbeit (real, außer in Teil III, dort nominal)
ϕ	Inflationsrate, Hauspreis
y	produzierte Menge einer Firma
θ	Wahrscheinlichkeit

Variable	Bedeutung
A	totale Faktorproduktivität, Technologie, Anteil der finanzierte Projekte
C	gleichgewichtiges Konsumniveau
G	Rechtssicherheit
I	Bruttoinvestition
K	gleichgewichtiger Kapitalbestand
K^*	Kapitalbestand im langfristigen Gleichgewicht
$\dot{K}$	Veränderung des Kapitalbestands, Abkürzung für $dK\left(t\right)/dt$
K^D	Kapitalnachfrage
K^S	Kapitalangebot

Variable	Bedeutung
L	gleichgewichtige Beschäftigung
L^S	Arbeitsangebot
L^D	Arbeitsnachfrage
N	Anzahl der Erwerbstätigen
N^U	Anzahl der arbeitslosen Arbeitnehmer
N^V	Anzahl der freien Stellen
P	Preisniveau
Π	Gewinn
R	nicht erneuerbare Ressourcen
S	Bestand an nicht erneuerbaren Ressourcen (”stock”)
T	gesamter Zeithorizont
U	intertemporaler Nutzen
Y	Produktion, BIP

Notation	Bedeutung
$f[x+y]$	Multiplikation
$f(x), f(x+y)$	Funktion

1.6 Organisatorisches

- Die Vorlesung ...
  - ... ist auf Deutsch – mit gelegentlichen Doppelstunden auf Englisch?
  - Abstimmung über EduVote
  - siehe http://www.macro.economics.uni-mainz.de → Teaching → Bachelor → Bachelor Winter Term → Makroökonomie I
  - siehe auch http://www.eduvote.de/downloads_students.html
  - bis nächste Doppelstunde
- Fragen stellen
  - immer, jederzeit, sofort, spontan
  - systematisch über → http://ask.fm/Macroeconomics_Mainz
  - Verwendung während der Vorlesung
- Infos zur Vorlesung
  - ebenfalls http://www.macro.economics.uni-mainz.de → Teaching → Bachelor → Bachelor Winter Term → Makroökonomie I
  - aktuelles zum Lehrstuhl: https://www.facebook.com/ChairInMacroeconomics

Johannes-Gutenberg Universität Mainz
Bachelor of Science in Wirtschaftswissenschaften

Makroökonomik I

Wintersemester 2016/ 17

Klaus Wälde (Vorlesung), Dennis Krieger und Tutoren (Tutorien)

www.macro.economics.uni-mainz.de
9. Oktober 2017

Teil I
Ökonomisches Wachstum

2 Die zentralen Fragestellungen

2.1 Fakten zu Wirtschaftsleistung und Wirtschaftswachstum

- Länder unterscheiden sich in ihrem Bruttonationaleinkommen pro Kopf
- Zur Abgrenzung von Bruttonationaleinkommen vom Bruttoinlandsprodukt (und anderen Größen) siehe destatis.de (in der pdf-Datei auf destatis klicken)

TABLE 1 *Key indicators of development*

	Population			Population age composition	Gross national income[a]		Gross national income, PPP[b]	
	Millions	Average annual growth, %	Density per sq. km	% ages 0–14	$ billions	$ per capita	$ billions	$ per capita
	2012	2000–12	2012	2012	2012	2012	2012	2012
Afghanistan	30	3.1	46	47	*16.6*	*570*	*40.7*[d]	*1,400*[d]
Albania	3	−0.4	115	21	12.9	4,090	29.7	9,390
Algeria	38	1.6	16	27	*155.1*	*4,110*	*285.0*[d]	*7,550*[d]
Angola	21	3.4	17	48	95.4	4,580	114.3	5,490
Argentina	41	0.9	15	24	..	..[e]	..	..
Armenia	3	−0.3	104	20	11.1	3,720	20.8	6,990
Australia	23	1.4	3	19	1,351.2	59,570	982.2	43,300
Austria	8	0.5	103	15	407.6	48,160	373.2	44,100
Azerbaijan	9	1.2	112	22	56.3	6,050	87.5	9,410
Bangladesh	155	1.3	1,188	31	129.2	840	319.9	2,070
Belarus	9	−0.5	47	15	61.8	6,530	143.9	15,210
Belgium	11	0.7	368	17	501.3	44,990	447.6	40,170
Benin	10	3.1	89	43	7.5	750	15.8	1,570
Bolivia	10	1.8	10	35	23.3	2,220	52.1	4,960
Bosnia and Herzegovina	4	0.0	75	16	17.8	4,650	36.0	9,380
Brazil	199	1.1	23	25	2,311.1	11,630	2,328.8	11,720
Bulgaria	7	−0.9	67	14	50.2	6,870	112.4	15,390
Burkina Faso	16	2.9	60	46	10.9	670	24.9	1,510
Burundi	10	3.2	384	44	2.4	240	5.5	560
Cambodia	15	1.6	84	31	13.0	880	35.1	2,360
Cameroon	22	2.6	46	43	25.4	1,170	50.3	2,320
Canada	35	1.0	4	16	1,777.9	50,970	1,483.6	42,530
Central African Republic	5	1.8	7	40	2.2	490	3.9	860
Chad	12	3.4	10	49	9.3	740	16.4	1,320

Tabelle 1 *Auszug aus dem Datenanhang des Weltentwicklungsberichts der Weltbank*

- Häufigkeitsverteilung des Bruttoinlandsprodukts pro Kopf

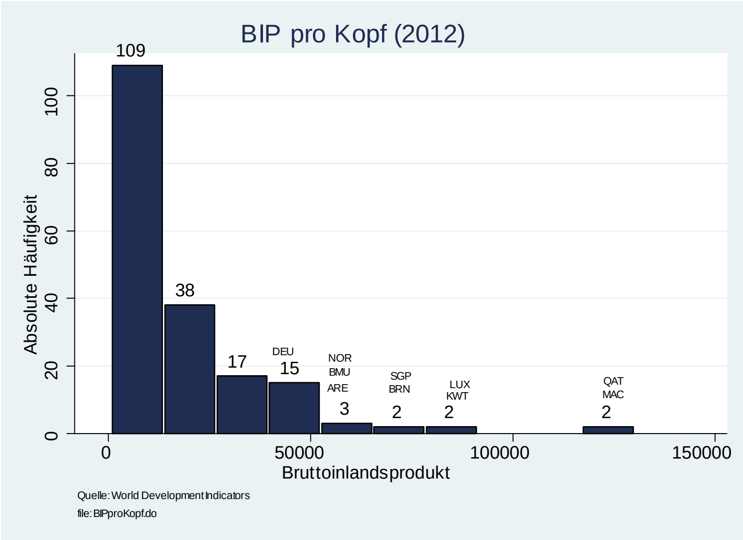

Abbildung 1 *Bruttoinlandsprodukt pro Kopf (Häufigkeiten nach 'World Development Indicators' der Weltbank)*
Legende: QAT Qatar, MAC Macao China, LUX Luxembourg, KWT Kuwait, SGP Singapore, BRN Brunei Darussalam, NOR Norway, BMU Bermuda, ARE United Arab Emirates, DEU Deutschland

- Wirtschaftlich arme und reiche Länder
  - Unterschied zwischen armen und reichen Ländern kann bis zu einem Faktor von
  - Länder werden aufgeteilt in
  - Alle G7 Länder (Deutschland, Frankreich, Großbritannien, Italien, Japan, Kanada, USA) gehören zur Gruppe
  - Siehe 'World development report' der Weltbank

- Wie entwickeln sich Länder über die Zeit, gibt es einen Aufholprozess?

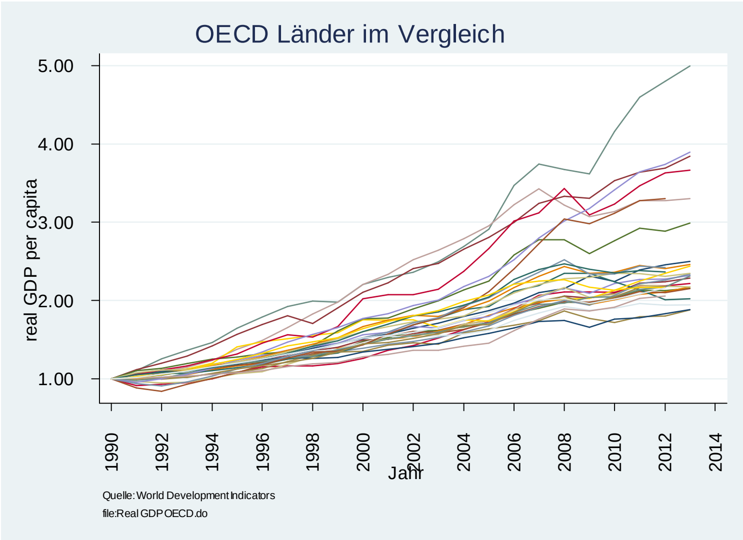

Abbildung 2 *Die Entwicklung des realen Bruttoinlandsprodukts pro Kopf in OECD Ländern (Organisation for Economic Co-operation and Development – www.oecd.org)*

- Gibt es eine Konvergenz im Einkommen pro Kopf, d.h. holen arme Länder auf?

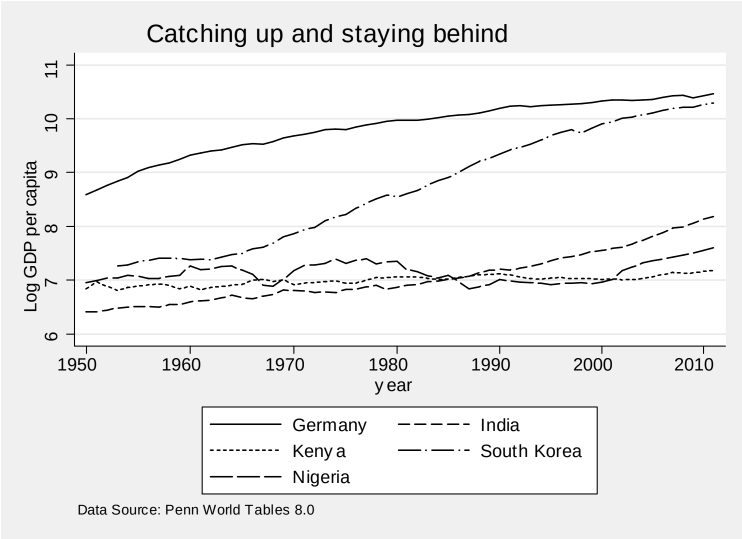

Abbildung 3 *BIP pro Kopf in ausgewählten Ländern von 1950 bis 2010 (logarithmische Skala - vgl. Tutorium, Aufgabe 4.4.2)*

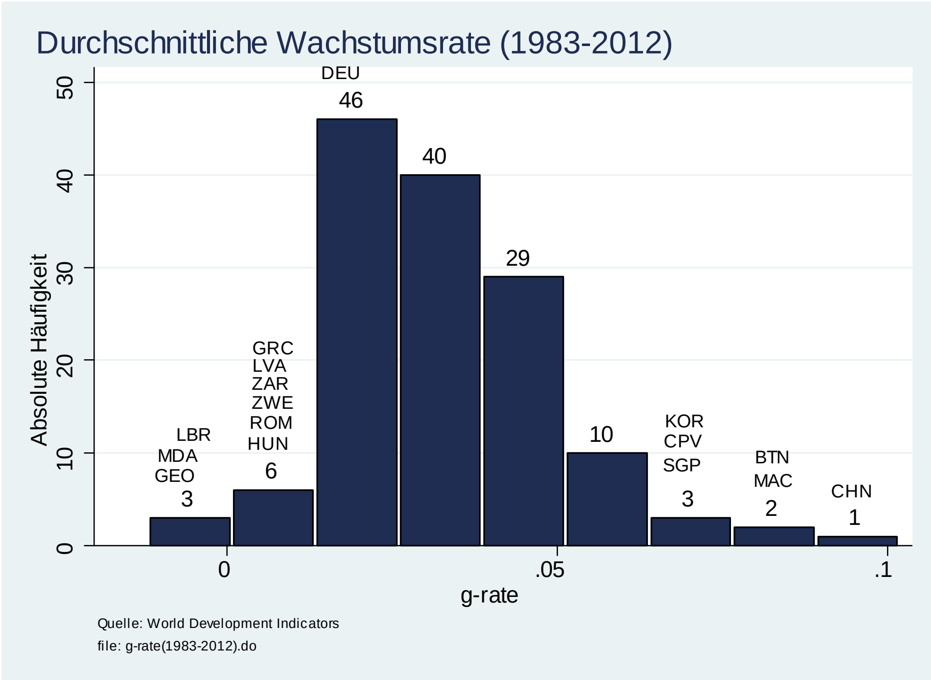

Abbildung 4 *Verteilung der durchschnittlichen Wachstumsraten (Länderabkürzungen siehe wits.worldbank.org/wits/WITS/WITSHELP/Content/Codes/Country_ Codes.htm)*

- Wachsen alle Länder mit positiven Wachstumsraten und findet Konvergenz der Länder statt, d.h. holen arme Länder auf?
  - Obige Abbildung 2 zeigt, dass OECD Länder
  - Wie Abbildung 4 zeigt, haben einige Länder mit geringem Einkommen ('low income countries') jedoch
  - Allgemeine Frage:
- Baumol (1986):
- Große Diskussion in der Literatur zur Konvergenzfrage (siehe Makro II im 6. Semester)

2.2 Die Fragen

Abbildungen illustrieren Fakten, aber wie können wir Fakten verstehen? Dabei stellen sich die folgenden Fragen:

-
-
-

Ein theoretisches Verständnis dieser Fragen erlaubt es, die obigen Fakten besser zu verstehen. Weiterhin können präzisere Fragen an Daten gestellt werden

2.3 Moment mal ...

Wieso ökonomisches Wachstum? Wieso nicht

- Wachstum des 'Human Development Index' (HDI)
  - HDI kombiniert (seit 1990)

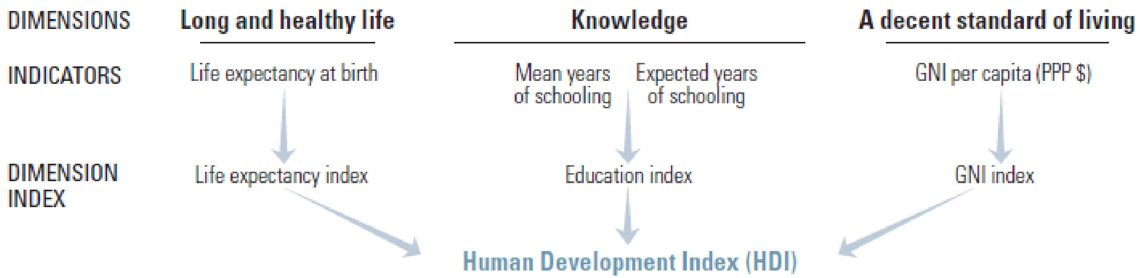

Abbildung 5 *Die Zusammensetzung des HDI.*
Quelle: http://hdr.undp.org/sites/default/files/hdr14_technical_notes.pdf

- Berechnung des HDI
  - Gewichtetes Produkt
$$\text{HDI} = I_{\text{health}}^{1/3} I_{\text{education}}^{1/3} I_{\text{income}}^{1/3}$$
  - Betonung anderer Größen als
  - Daten siehe http://hdr.undp.org/en/content/table-1-human-development-index-and-its-components
  - Warum diese Gewichtung, warum diese Faktoren? Warum nicht
  - Es gibt auch: Inequality-adjusted Human Development Index (IHDI), Gender Inequality Index (GII), Multidimensional Poverty Index (MPI) und Gender Development Index (GDI). Siehe http://hdr.undp.org
  - Siehe Sagar und Najam (1998) für

Wieso ökonomisches Wachstum? Wieso nicht

- Wachstum des subjektiven Glücksempfindens?
  - erste Untersuchung (in Wirtschaftswissenschaften):
  - aktuellere Arbeiten:
  - politischer Hintergrund:

- Politisch-/ gesellschaftliche Implikationen (Stiglitz, Sen and Fitoussi, 2008, p. 14): Well-being depends on
  - Material living standards (income, consumption and wealth)
  -
  -
  - Personal activities including work
  -
  -
  -
  -

Wieso ökonomisches Wachstum? Wieso nicht

- Persönlichkeitswachstum?
  - Was ist Persönlichkeit?
  - OCEAN:
  - Wie ändert sich Persönlichkeit? → Denissen (2014) European Journal of Personality
  - Hutteman, Nestler, Wagner, Egloff und Back (2014): Selbstachtung bzw. Selbstwertgefühl steigt durch
- Warum ist Persönlichkeit und Persönlichkeitsentwicklung wichtig?
  -
  - Holland und Roisman (2008):
- Fazit: Streben Sie nicht nur nach beruflichem Erfolg, sondern auch nach

3 Die ökonomische Analyse

3.1 Das grundsätzliche Argument

- Wirtschaftliche Armut und wirtschaftliches Reichtum sind eine Folge von
  - den zur Verfügung stehenden Ressourcen
  - der Effizienz, mit der diese benutzt werden
- Die zur Verfügung stehenden Ressourcen, wie zum Beispiel der Kapitalbestand
  - ändern sich über die Zeit
  - durch Konsum und Sparentscheidungen
- Langfristiges Wachstum wird primär durch technologischen Fortschritt (und Anhäufung von Wissen) getrieben
- (Nebeneffekte wie globale Erwärmung werden temporär ignoriert)

3.2 Armut und Reichtum I: Technologie und Ressourcenausstattung

- zum Nachlesen: z.B. Wälde (2007, Kap. 2.1)

3.2.1 Die Technologie und Ressourcenausstattung

- Die allgemeine Form

$$Y = Y(K, hL)$$

  - vg. Einführung VWL, Mikroökonomik
  - Produktionsfaktoren:
  -
  -

- Das Cobb-Douglas Beispiel

$$Y = AK^{\alpha}\,(hL)^{1-\alpha}$$

  - Das einfachste Beispiel für eine solche Produktionsfunktion ist die

  - Hier gibt der konstante Parameter $0 < \alpha < 1$ die

  - Wenn der Bestand an Kapital um 1 % steigt, dann

  - Weiter gibt die Konstante A die
  - Wenn sich diese um 1% erhöht, erhöht sich, bei gleichbleibendem Faktoreinsatz, die produzierte Menge um

3.2.2 Ergebnisse

- Das Bruttoinlandsprodukt (BIP) pro Arbeitnehmer erhalt man dann als

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}\left(hL\right)^{1-\alpha}}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} h^{1-\alpha} \tag{3.1}$$

  - Mit dem Hilfsmittel der Produktionsfunktion kann nun eine erste Antwort gegeben werden auf die Frage, wieso manche Länder reicher sind als andere
  - Ein Land hat *ceteris paribus* ein hohes BIP pro Kopf, sprich eine hohe Arbeitsproduktivität, wenn es über eine

- Das BIP pro Kopf

$$\frac{Y}{N} = A\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha} h^{1-\alpha}\left(\frac{L}{N}\right)^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha} h^{1-\alpha}(1-u)^{1-\alpha},$$

  - Betrachtet man das BIP pro Kopf, d.h. Anzahl N der Einwohner eines Landes, erhält man diese Gleichung, wobei
  - Dieses Maß wird häufiger als Entwicklungsmaß genommen, als das BIP pro Arbeitnehmer. Der Unterschied zwischen N und L liegt im wesentlichen in

  - Ergänzend zum Ausdruck (3.1) wird hier die Bedeutung der

- Stundenproduktivität, TFP und Arbeitsproduktivität(en)
  - Der Ausdruck Produktivität wurde bisher in verschiedenen Ausprägungen verwendet
  - Dies soll nun explizit aufgegriffen werden
  - In der wirtschaftspolitischen Diskussion wird das
  - Dies führt leicht zu Verwirrungen, da der Ausdruck Produktivität eigentlich für
  - Das Bruttoinlandsprodukt pro Arbeitnehmer gleicht der totalen Faktorproduktivität, die in diesem Fall auch als Arbeitsproduktivität bezeichnet werden kann, nur dann wenn
  - Wir werden im Folgenden

(i) individueller Produktivität h
(ii) totaler Faktorproduktivität A
(iii) Arbeitsproduktivität Y/L, mit L die Anzahl der Arbeitnehmer
(iv) Stundenproduktivität Y/L, mit L die gearbeiteten Stunden

3.3 Armut und Reichtum II: Ineffiziente Verwendung der Ressourcen (öffentliche Güter)

- zum Nachlesen: z.B. Wälde (2007, Kap. 2.2)

3.3.1 Definition öffentliches Gut

- vgl. Definition und Abgrenzung in "Einführung in die Volkswirtschaftslehre"
  - Ein öffentliches Gut ist gekennzeichnet durch die
  - Beispiele:
  - Definition (Pindyck und Rubinfeld, Mikroökonomie, 7. Auflage, Seite 794):
  - Ursprüngliche Analyse:

3.3.2 Der Analyserahmen

- Die Idee
  - Die zentrale Annahme liegt in der Existenz eines
  - Ein Beispiel ist
  - Die Bereitstellung erzeugt
  - Der Staat kann
  - Es gibt eine

- Das Modell
  - Gegeben sei die Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$Y = G^{\alpha} L_Y^{1-\alpha}$$

  - Dabei steht G für die Rechtssicherheit in einem Staat, L_Y ist die Anzahl der Arbeitnehmer im privaten Sektor und α ist die Produktionselastizität der Rechtssicherheit
  - Der Staat sorgt in diesem Modell für die Einhaltung der Rechtssicherheit

$$G = BL_G,$$

    indem er eine bestimmte Anzahl L_G von Arbeitnehmern im Justizsektor mit einer Produktivität B beschäftigt
  - Zur Finanzierung erhebt die Regierung einen pauschalen Steuersatz τ auf das Arbeitseinkommen w für alle Arbeitnehmer. Daraus ergibt sich die Budgetrestriktion des Staates,

$$\tau wL = wL_G$$

  - Es herrsche Vollbeschäftigung

$$L = L_G + L_Y$$

- Lösung des Modells
  - Die Budgetrestriktion des Staates, geschrieben als

$$L_G = \tau L$$

    bestimmt die Anzahl der Beamten durch die Festsetzung von τ
  - Mit L_G ergibt sich die Rechtssicherheit ebenfalls als Funktion von τ,

$$G = B\tau L$$

  - Berücksichtigt man die Markträumung auf dem Arbeitsmarkt, ergibt sich eine Anzahl von Arbeitnehmer im Privatsektor ebenfalls als (fallende) Funktion von τ,

$$L_Y = L - L_G = L - \tau L = (1 - \tau) L$$

  - Die produzierte Menge in der Ökonomie ist damit ebenfalls eine Funktion von τ

$$Y = [B\tau L]^{\alpha} [(1 - \tau) L]^{1-\alpha} = \tau^{\alpha} (1 - \tau)^{1-\alpha} B^{\alpha} L$$

3.3.3 Ergebnisse

- Graphische Darstellung

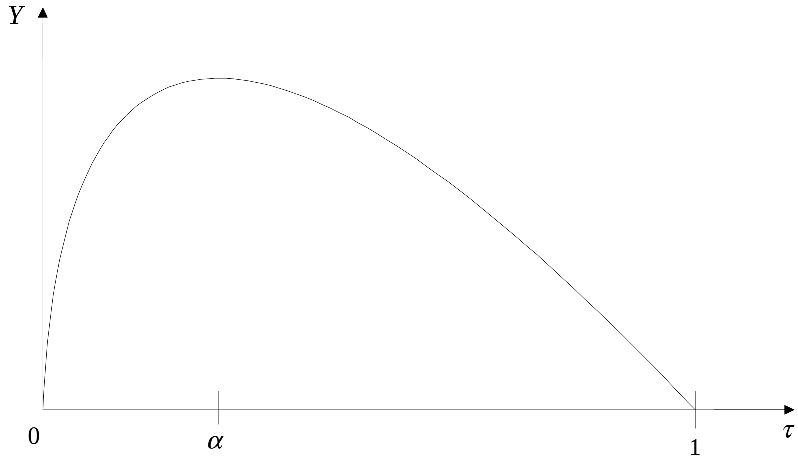

Abbildung 6 *Bruttoinlandsprodukt Y und steuerfinanzierte Rechtssicherheit*
Legende: Steuersatz τ, optimaler Steuersatz α

- Ergebnisse in Worten
  - Wenn der Steuersatz zu niedrig ist ($\tau < \alpha$), dann wird
  - Damit ist das Einkommen pro Kopf
  - Das Einkommen pro Kopf ist auch dann zu gering, wenn
  - Das Modell liefert ein Beispiel, wie durch schlechte Wirtschaftspolitik zur Verfügung stehende Ressourcen
  - Siehe zu unterstützenden empirischen Aspekten u.a.

3.4 Armut und Reichtum III: Ineffiziente Verwendung der Ressourcen (Marktmacht)

- zum Nachlesen: z.B. Wälde (2007, Kap. 2.3)

3.4.1 Das allgemeine Argument

- Betrachten wir zwei Märkte, auf dem einen herrscht vollständige Konkurrenz, auf dem anderen unvollständiger Wettbewerb (vgl. Mikroökonomik, Wohnungsmarkt), hier wenige Firmen

- Markt mit vollständiger Konkurrenz (z. B. die Landwirtschaft): Gleichheit von

- Oligopolistischer Markt mit Marktmacht der Anbieter: Preis liegt über

- Ergebnis: Verzerrter Relativpreis und verzerrte Nachfrage

- Faktorallokation nicht

- Effizienzsteigernden Intervention des Staates durch

- Beispiel: Monopolkommission (Bonn) – www.monopolkommission.de

3.4.2 Ein Modell mit Marktmacht

- Die Produktionsseite

  - Betrachtet wird eine Ökonomie mit

$$X = AL_X, \quad Y = BL_Y$$

  - Die Arbeitsproduktivität in Sektor X ist durch
  - Die Arbeitsproduktivität im Sektor Y wird mit
  - Da der Sektor X unter vollständigen Wettbewerb produziert, ist der Nominallohn gleich dem

$$w_X = p_X A.$$

    Dieser Zusammenhang folgt aus der Gewinnmaximierung der Unternehmen
  - Das zweite Gut Y wird von

– Wie das Tutorium, Aufgabe 4.4.5 für $n > 1$ zeigt, erfüllt der

$$p_Y = \frac{1}{1 - \frac{1}{n\varepsilon}} \frac{w_Y}{B} \tag{3.2}$$

– Dabei ist ε die

$$\varepsilon \equiv -\frac{dy}{dp}\frac{p}{y} > 0.$$

– Der gewinnmaximierenden Preis liegt

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{n\varepsilon}} > 1$$

– (Vergleiche "Monopolpreis und Preiselastizitat der Nachfrage" in Mikro I)

– Faktorallokation ist

$$p_y > w_y/B,$$

d.h. der Preis liegt über den Grenzkosten

– Staatseingriff im Prinzip wünschenswert, da

- Die Nachfrageseite
  - $$U\left(C_X, C_Y\right) = C_X^{\alpha} C_Y^{1-\alpha},$$
  - Optimale Konsumentscheidung gegeben eine Budgetrestriktion ergibt (siehe Tutorium, Aufgabe 4.4.6 oder Mikro)

- Der Arbeitsmarkt
  - Das Arbeitsangebot ist
  - Arbeitnehmer sind zwischen Sektoren
  - Damit ergibt sich ein
  - Da der Lohn flexibel ist, herrscht

$$L_X + L_Y = L$$

- Gütermarktgleichgewicht
  - Auf beiden Märkten gleicht das Angebot

$$C_X = X$$
$$C_Y = Y$$

  - Es stellen sich

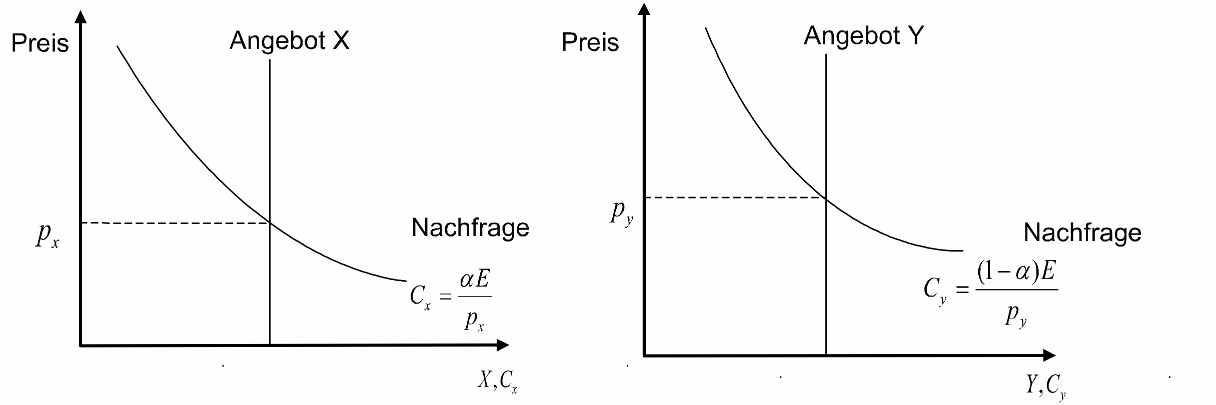

Abbildung 7 *Gütermarktgleichgewichte für das kompetitive Gut X und das oligopolistische Gut Y*

- Das allgemeine Gleichgewicht

  –
  $$L_X = \frac{1}{1-\frac{1-\alpha}{n}}\alpha L,$$
  $$L_Y = \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1-\alpha}{n}}\left(1-\alpha\right)L.$$

  – Beschäftigungsniveaus addieren sich

- Was passiert mit der Beschäftigung bei mehr Wettbewerb?

  – Mit steigender Konkurrenz im Sektor Y

  – Mit steigender Konkurrenz im Sektor Y

  – "Konkurrenz belebt das Geschäft" im Sektor Y

3.4.3 Ein zentraler Planer

- Das soziale Optimum
  - Das soziale Optimum ist per Definition gegeben durch
  - Gegeben identische Präferenzen aller Haushalte, ist diese identisch zu
  - Das Maximierungsproblems des

    $$\max_{L_X, L_Y} C_X^{\alpha} C_Y^{1-\alpha}$$

    gegeben die

    $$C_X = AL_X, \quad C_Y = BL_Y$$
    $$L_X + L_Y = L$$

  - $$L_X = \alpha L, \quad L_Y = (1-\alpha) L$$
  - siehe Tutorium, Aufgabe 4.4.7 für Zahlenbeispiel

- Die Marktunvollkommenheit
  - Erstbeste Faktorallokation verdeutlicht die verzerrende Wirkung des unvollständigen Wettbewerbs: zu niedrige Beschäftigung im
  - Oligopolisten verlangen einen höheren Preis als
  - Preis im Sektor mit vollständigem Wettbewerb entspricht den
  - Verschiebung der Nachfrage nach den Gütern aus dem Sektor mit
  - $$d\left(p_y/p_x\right)/dn < 0$$
  - Verschiebung der Nachfrage führt zu einem verstärkten Anstieg der Produktion
  - Oligopolisten beschäftigen zu
  - siehe Tutorium, Aufgabe 4.4.7 für ein Zahlenbeispiel

3.4.4 Ergebnisse

- Beseitigung der ineffizienten Faktorallokation
  - Marktzutritt
  - Preisobergrenzen

  - siehe fortgeschrittene Mikroökonomik oder Finanzwissenschaft

- Warum sind manche Länder arm?
  -
  -

3.5 Das Solow Wachstumsmodell

- Zum Nachlesen: z.B. Wälde (2007, Kap 3.1 und 3.3.1)

3.5.1 Das Modell

- Technologie
  - für $Y(t)$: Produktion zum Zeitpunkt t

$$Y(t) = AK(t)^{\alpha} L^{1-\alpha} \tag{3.3}$$

  - A:
  - $K(t)$: Kapitalbestand zum Zeitpunkt t
  - L: Anzahl an Arbeitnehmern (auch konstant)
  - α: Produktionselastizität von Kapital, $0 < \alpha < 1$

- Gütermarktgleichgewicht

$$Y(t) = I(t) + C(t)$$

  - Angebot $Y(t)$ gleicht der Nachfrage aus $I(t)$ und $C(t)$
  - $I(t)$:
  - $C(t)$:

- Präferenzen der Haushalte

$$I(t) = sY(t)$$

  - s:
  - Sparquote ist der Anteil an der insgesamt produzierten Menge, der

- Sparquoten in der Welt

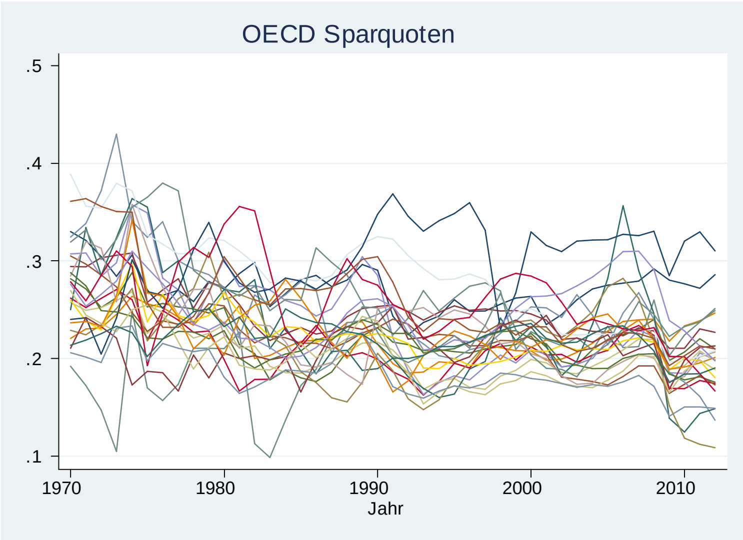

Abbildung 8 *Sparquoten in OECD Ländern ab 1970*

- Sparquoten in vier OECD Ländern

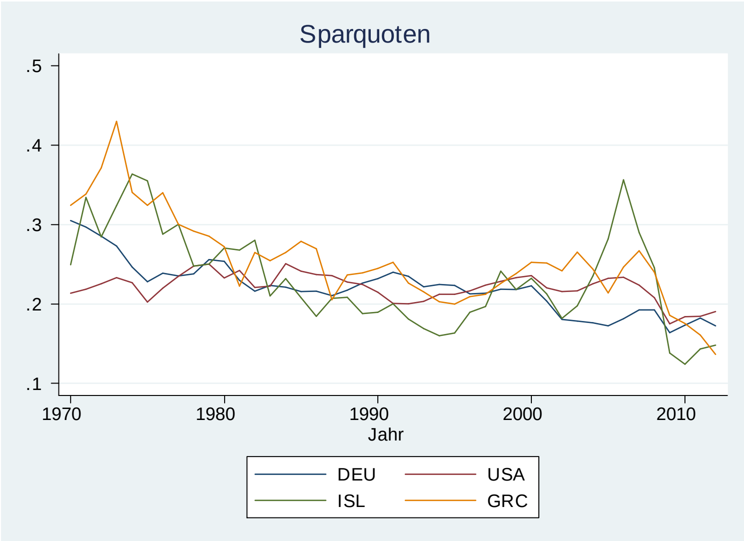

Abbildung 9 *Sparquoten in vier OECD Ländern ab 1970*

- Die Sparquote in Deutschland liegt bei ca. 20%. Vier von fünf produzierten Gütern in Deutschland werden

- Buchhalterische Identität

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$$

  - Die Änderung des Kapitalbestands wird durch

$$\frac{dK(t)}{dt} \equiv \dot{K}(t)$$

    d.h. durch die
  - Die Notation mit dem Punkt auf der Variablen ist eine abkürzende Schreibweise

- Ökonomische Idee
  - Kapitalbestand ändert sich
  - Die Nettoinvestition is gegeben durch
  - wobei mit δ die (konstante)
  - Unterscheidung notwendig zwischen
    - *
    - *
  - Der Paramter δ steht für

3.5.2 Die Analyse mit Hilfe eines Phasendiagramms

- Bewegungsgleichung für Kapital

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) = sAK(t)^{\alpha} L^{1-\alpha} - \delta K(t)$$

- Phasendiagramm

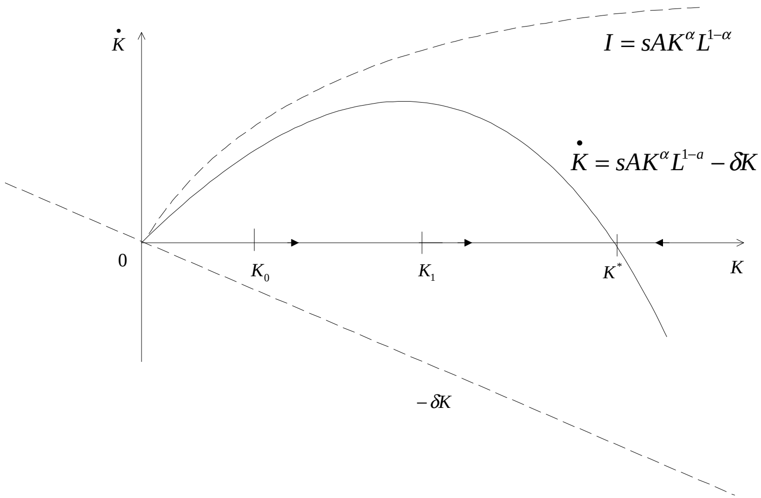

Abbildung 10 *Kapitalakkumulation im Solow Wachstumsmodell*

- Beschreibung des Phasendiagramms
  - Bruttoinvestitionen I sind konkav, d.h. sie sinken relativ zum Kapitalbestand K (wegen der abnehmenden Grenzproduktivität von K in der Produktion)
  - Verschleiß δK ist (immer) linear im Kapitalbestand K
  - Als Konsequenz ist die Nettoinvestition $\dot{K}$ irgendwann negativ (ab K^*)
  - Bei $K = 0$ ist Grenzproduktivität von Kapital unendlich, deswegen steigen Nettoinvestitionen bei $K = 0$ an
  - Aus den zwei letzten Punkten folgt, dass der Graph der Nettoinvestitionen $\dot{K}$ einem "umgekehrten U" folgt

- Die Dynamik des Kapitalbestandes

  - Ausgangspunkt ist ein Kapitalbestand K_0 zu einem anfänglichen Zeitpunkt 0 (z.B. nach dem 2. Weltkrieg 1945 oder nach der Wende/ Wiedervereinigung 1989/1990)
  - Bei K_0 sind die Bruttoinvestitionen

  - Also finden Nettoinvestitionen
  - Der Anstieg setzt sich
  - sinkt dann aber langsam auf Null und kommt bei K^*

- Dynamik der Bruttoinlandsproduktes

  - Dynamik des Kapitalbestandes spiegelt Dynamik des BIPs Y und des BIPs pro Kopf wieder
  - Dies folgt unmittelbar aus

- Das langfristige Gleichgewicht [allgemein]
  - Definition stationäres Gleichgewicht ("steady state" oder "stationary state"): alle Variablen sind
  - Definition Wachstumsgleichgewicht: einige Variablen
  - Übliches Vorgehen bei dynamischen Modellen:
    * erst Eigenschaften
    * dann
- Das langfristige Gleichgewicht [hier]
  - Die Bruttoinvestition sind identisch zum
  - In anderen Worten: die Nettoinvestitionen sind
  - Der Kapitalbestand ist also

3.5.3 Die Ergebnisse

- Holen Länder auf?

  -

  - Wachstumsrate eines ärmeren Landes (geringerer Kapitalbestand) ist (siehe Tutorium, Aufgabe 4.4.3)

  - Relativer Abstand

- Gibt es langfristige Unterschiede zwischen Ländern?

$$\frac{K^*}{L} = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

  - Nein, falls alle Länder
  - Ja, falls sich Länder
  - Länder mit höherem s und A haben
  - Länder mit höherem δ haben (siehe Tutorium, Aufgabe 4.4.8)

- Warum kommt Wachstum zu einem Ende?
  -
  -
  - Ab K^* ist linearer Verschleiß

- Wie wird langfristiges Wachstum erklärt (jenseits des obigen Modells)?
  - Durch exogenen
  - Die totale Faktorproduktivität A wächst über die Zeit aufgrund einer
  - Standardbeispiel (Solow, 1956) $A(t) = A_0 e^{gt}$ mit
  - Damit wächst auch das
  - Details siehe Makro II im 6. Semester

3.6 Optimales Sparen

- Wie bestimmt sich die Sparquote eines Landes?
- Sparen ist ein Einkommenstransfer zum Lösen des Zielkonflikts zwischen Konsum heute und Konsum in der Zukunft
- Formaler Hintergrund: siehe Wälde (2012) ch. 5.6.3

3.6.1 Das Modell eines zentralen Planers

- Die Zielfunktion

  - Der Nutzen zu einem Zeitpunkt τ (instantane Nutzen)

$$u(C) = \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}, \ \sigma \geq 0, \ \sigma \neq 1$$

  - Nutzenfunktion ist
  - $-1/\sigma$ ist die
  - (σ ist das Maß für die (konstante) relative Risikoaversion – CRRA Nutzenfunktion 'constant relative risk aversion')
  - logarithmische Nutzenfunktion $u(C) = \ln C$ ist

  - siehe Tutorium, Aufgabe 4.4.9

- Der intertemporale Nutzen $U(t)$ beschreibt den Gesamtnutzen als gewichtete "Summe" der instantanen Nutzen

$$U(t) = \int_t^T e^{-\rho[\tau - t]} u(C(\tau))\, d\tau$$

- t:
- T:
- ρ:
- $e^{-\rho[\tau - t]}$:

- Graphische Darstellung der Zielfunktion

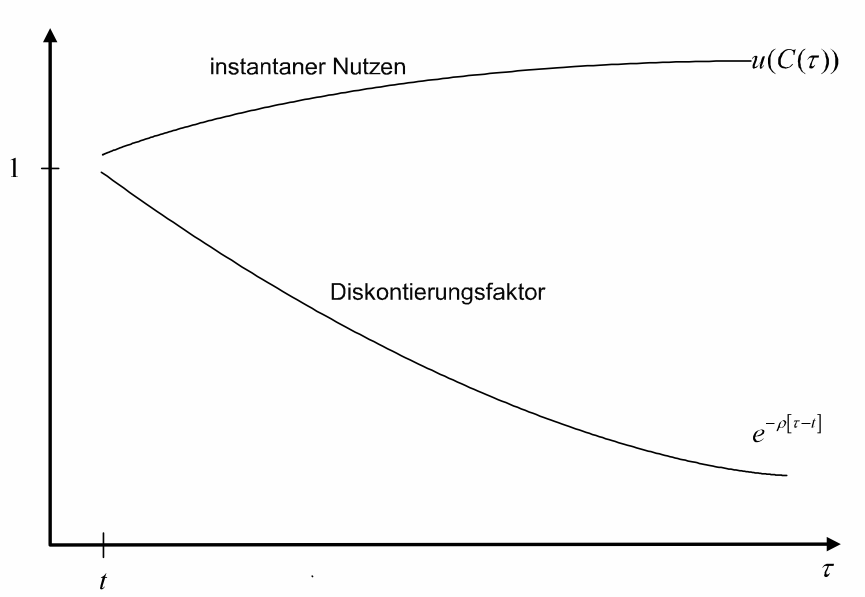

Abbildung 11 *Die Argumente der intertemporalen Zielfunktion*

- Durch den Diskontierungsfaktor bekommen Ereignisse in der Zukunft ein

- Graphische Darstellung der Zielfunktion

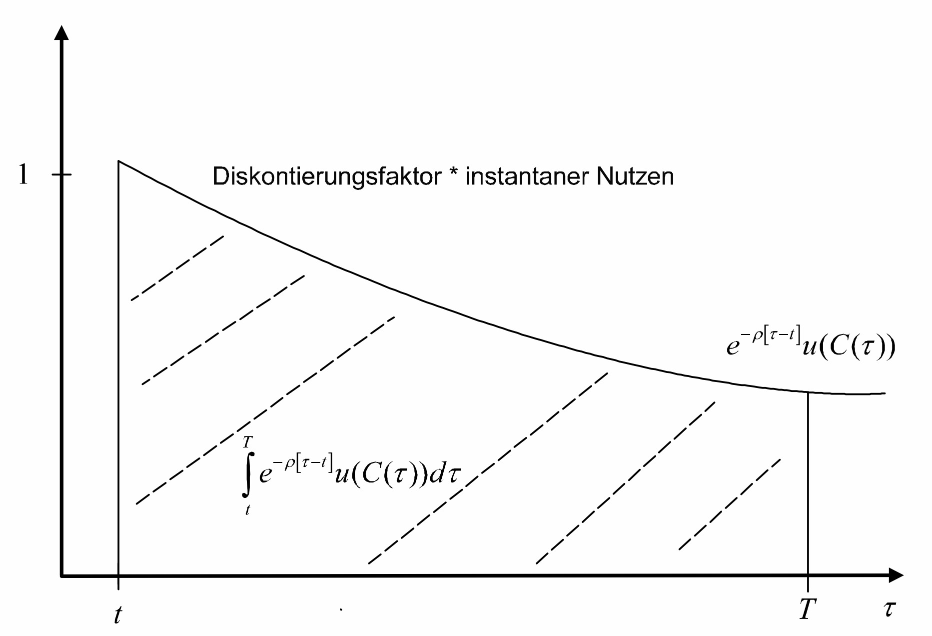

Abbildung 12 *Die intertemporale Zielfunktion*

- Erläuterungen zur Abbildung 12
  - Das Produkt aus Diskontierungsfaktor und instantaner Nutzen fällt über die Zeit ab, da Diskontierungsfaktor
  - Ziel des optimalen Verhaltens (technisch ausgedrückt): Maximiere die
- Häufige Wahl für Planungshorizont
  - Planungshorizont T ist
  - Formal: T wird gleich
  - Ersetzen von T in der Zielfunktion durch ∞, das Symbol für
  - Wird im Folgenden auch hier so gehandhabt

- Ressourcenbeschränkung

$$\dot{K}(t) = Y(K(t), L) - \delta K(t) - C(t)$$

  - vergleiche Modell mit exogener Sparquote: $\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$
  - offensichtlich gilt
  - Differenz aus Produktion und Konsum ist
  - Durch Wahl des Konsums $C(t)$ zu jedem Zeitpunkt t wird Investition (und damit Sparquote) bestimmt

- Maximierungsproblem

  - maximiere intertemporalen Nutzen $U(t) = \int_t^\infty e^{-\rho[\tau-t]} u(C(\tau))\, d\tau$
  - gegeben instantanen Nutzen $u(C(\tau)) = \frac{C(\tau)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ und
  - gegeben die Ressourcenbeschränkung durch die
  - Wahl des Konsumpfades $C(\tau)$ (die sogenannte Kontrollvariable)
  - Lösen über
  - siehe Tutorium, Aufgabe 4.4.10 und Wälde (2012, ch. 5.1)

- Optimalitätsbedingung als Ergebnis des Maximierungsproblems
  - Lösung ergibt Eulergleichung oder Keynes-Ramsey Regel

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{\frac{\partial Y(K,L)}{\partial K} - \delta - \rho}{\sigma} \tag{3.4}$$

  - $\partial Y / \partial K$ ist die
  - δ die
  - ρ die
  - $-1/\sigma$ ist die
  - Wachstumsrate von Konsum (auf linker Seite) ist positiv, wenn
  - Bruch ist positiv, wenn

- Intuitive Erklärung für Wachstum von Konsum
  - Als Erinnerung
$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{\frac{\partial Y(K,L)}{\partial K} - \delta - \rho}{\sigma}$$
  - Setze Grenzproduktivität von Kapital gleich
  - Dann gilt: Konsum wächst, wenn
  - Nettozins ist der
  - Zeitpräferenzrate erfasst
  - geduldige Menschen (niedriges ρ) werden
  - geduldige („sparsame") Menschen (d.h. niedriges ρ) konsumieren
  - Diese Gleichung ist eine *der* zentralen Gleichungen in der Volkswirtschaftslehre, wenn es um optimale intertemporale Entscheidungen geht
  - Optimale Sparquote wird also so gewählt, dass intertemporaler Nutzen $U(t)$

3.6.2 Das langfristige Gleichgewicht

- Zwei endogene Größen - Kapital und Konsum
  - Im langfristigen Gleichgewicht sind deren Änderung gleich Null

$$\dot{K}(t) = 0 \Leftrightarrow C = Y(K, L) - \delta K$$

$$\dot{C}(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Y(K, L)}{\partial K} = \delta + \rho$$

  - Die zweite Gleichung bestimmt den Kapitalbestand
  - Die erste Gleichung bestimmt den Konsum in Abhängigkeit des Kapitalbestandes

- Langfristiger Kapitalbestand pro Kopf ...
  - ... bei (siehe Tutorium, Aufgabe 4.4.10)

$$\frac{K^*}{L} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

  - ... mit

$$\frac{K^*}{L} = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

  - Frage: wie hoch ist

3.7 Weitergehende Fragen rund um Wachstumsprozesse

- Makroökonomik I gibt einen ersten Einblick
- Was sind weitergehende Fragen und Antworten?
  - Wieso gibt es überhaupt Wachstum? Industrielle Revolution
  - Der Einfluß von Geographie und Institutionen
  - Verträgt sich Wachstum mit der Umwelt?

3.7.1 Seit wann gibt es Wirtschaftswachstum?

.

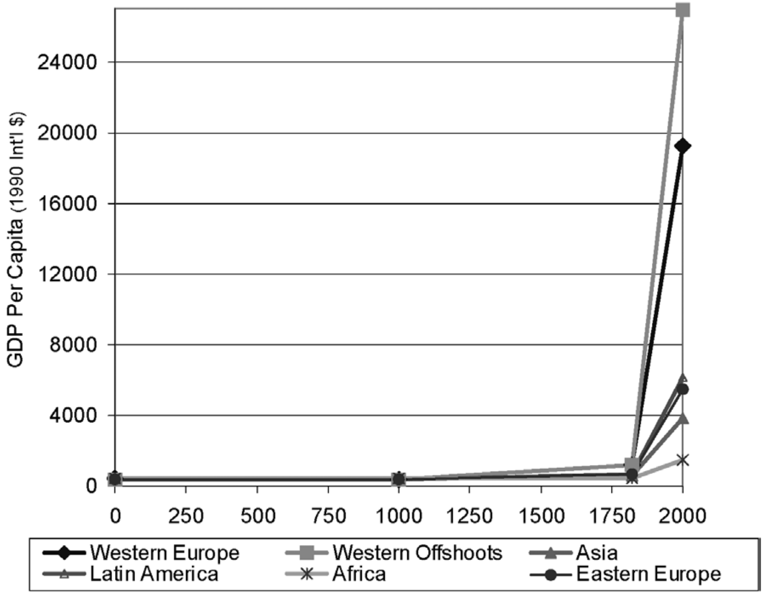

Abbildung 13 *Ökonomisches Wachstum aus langfristiger Perspektive (Quelle: Galor, 2005/ Maddison, 2003)*

- Frage: Warum kam es zur industriellen Revolution (in Europa) erst nach 1750?
- Erklärungsansatz über "unified growth theory" - siehe Galor (2005) und Makro II

3.7.2 Welche Rolle spielen Institutionen und Geographie?

- Empirische Untersuchungen zeigen einen positiven Zusammenhang zwischen Wachstum und
  - Politische Freiheiten
  - Korruption
  - gesellschaftliche Stabilität
  - (Bürger-) Kriege, etc
  - siehe Polity IV and Polity 5 unter http://www.systemicpeace.org
  - siehe Acemoglu und Robinson (2008, 2012)
- Starke geographische Einflüsse
  - Länder ohne Meereszugang ('landlocked countries') und
  - Länder nahe am Äquator
  - haben im Schnitt

- Erklärung durch

    -
    - siehe Gallup et al (1999) und Redding und Venables (2004)
    - Institutionen sind endogen, geographische Faktoren sind exogen - also alles

    - siehe weiterführende Veranstaltungen (z.B. Seminar MIEPP)

3.7.3 Verträgt sich Wachstum mit der Umwelt?

- siehe Abschnitt zu Umweltökonomik
- Im Prinzip ja ("grünes" Wachstum ist möglich ...), in der Praxis nicht (... findet aber nicht statt)
- Bitte noch 2 Monate Geduld ...

4 Die Antworten aus makroökonomischer Sicht

4.1 Warum sind manche Länder reich, wieso andere arm?

4.1.1 Wenige Ressourcen und Technologien mit einer geringen Produktivität

- Was heißt wenige Ressourcen?
  - geringes
  - geringes
  - (vergleiche Alphabetisierungsrate, Anzahl von Jahren in Schulausbildung, Gesundheit und Lebenserwartung)
- Wieso werden nicht-moderne Technologien mit geringer Produktivität verwendet?
  - geringe
  -
  - temporäres Investitionskalkül (neue Technologien

4.1.2 Ineffiziente Verwendung von Ressourcen

- Öffentliche Güter (Rechtssicherheit)
- Marktmacht (wenige Anbieter auf Gütermarkt)
- Armut resultiert aus

4.2 Wieso wachsen manche Länder schneller als andere?

- Modell von Solow:

- neue Wachstumstheorie (siehe z.B. Makro II im 6. Semester):
  -
  -

- "Institutionen" steht für
  -
  -
  -
  - siehe ebenfalls weiterführende Veranstaltung

4.3 Sind irgendwann alle Länder gleich reich?

- Ja

  - Modell von Solow beschreibt
  - Im Prinzip gibt es eine Tendenz zur
  - Empirisch (Sala-i-Martin, 2006) nimmt die absolute Armut (ein Dollar pro Tag verfügbares Einkommen) über die Zeit
  - ebenso der Ginikoeffizient, allerdings

- Aber

  - Viele Länder bzw. Regionen sind zu hohem Teil von
  - Manche Regionen mögen durch geographische Faktoren (Klima, Distanz zu Häfen)

4.4 Übungsaufgaben

4.4.1 Wachstumsmaße

Vergleichen Sie die üblichen Maße für das Wachstum eines Landes. Wie unterscheiden sich

a) Bruttoinlandsprodukt (BIP) und BIP pro Kopf,

b) Index für menschliche Entwicklung (HDI = Human development index),

c) Subjektives Glücksempfinden,

d) Persönlichkeitswachstum?

4.4.2 Wachstumsprozesse

Abbildung 14 zeigt links die Staatsverschuldung in den USA von 1940-2014 in Niveaus (ab 2015 geschätzt) an, während der rechte Teil dieser Abbildung die logarithmische Darstellung der Staatsverschuldung zeigt.[1] Interpretieren Sie die Abbildungen und veranschaulichen Sie sich den Unterschied zwischen einer Darstellung von Wachstumsprozessen in Niveaus und einer Darstellung in Logarithmen der Niveaus.

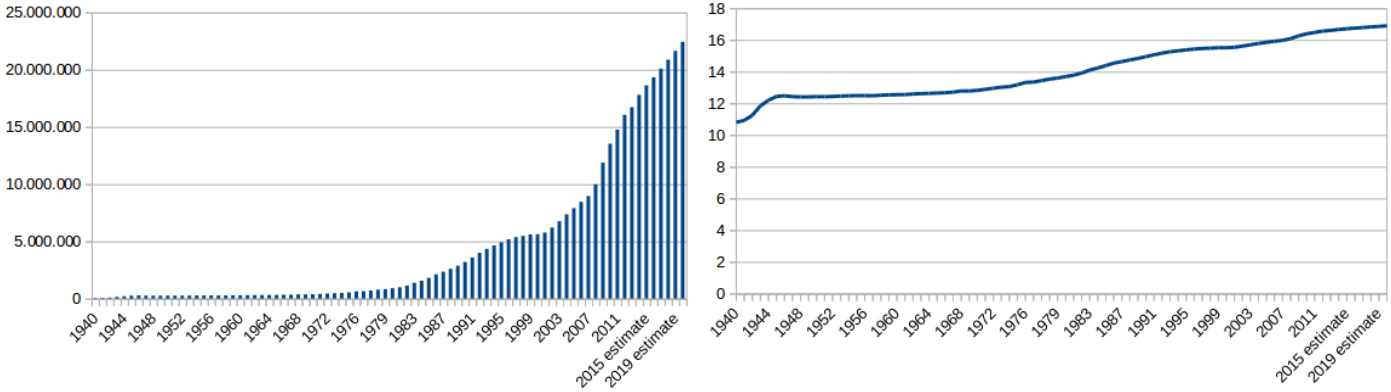

Abbildung 14 *Staatsverschuldung USA, 1940-2019, Niveaus (links) und Logs (rechts)*

[1] Daten abrufbar unter https://www.whitehouse.gov/sites/default/files/omb/budget/fy2016/assets/hist07z1.xls

4.4.3 Produktivitätswachstum

Öffnen Sie den Datensatz *'CELdata and empirical results for CEL and BHT.xls'* von (Caselli, Esquivel, and Lefort 1996).[2] Auf der ersten Seite der Datei finden Sie eine Erklärung zu den Daten, auf der zweiten Seite stehen die Rohdaten.

a) Berechnen Sie die durchschnittliche Wachstumsrate des BIPs pro Kopf von 1965 bis 1985 für die USA, Japan, Österreich, Frankreich, Deutschland, Italien, Schweden und England (Hinweis: Lösen Sie dazu die Gleichung $y(t) = e^{gt}y_0$ nach g). Erzeugen Sie eine Grafik ähnlich der Abbildung 15 (Verwenden Sie BIP/Kopf als Proxy für BIP/Arbeitsstunde).

b) Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit denen von (Baumol 1986)[3]. Wie hoch ist die Produktivitätswachstumsrate von Japan und den USA?

c) Erläutern Sie Abbildung 15. Welchen Zusammenhang zeigt die Grafik?

[2] Der Datensatz steht auf `http://www.macro.economics.uni-mainz.de/1256.php` zum Download bereit.

[3] `http://www.jstor.org/stable/1816469`

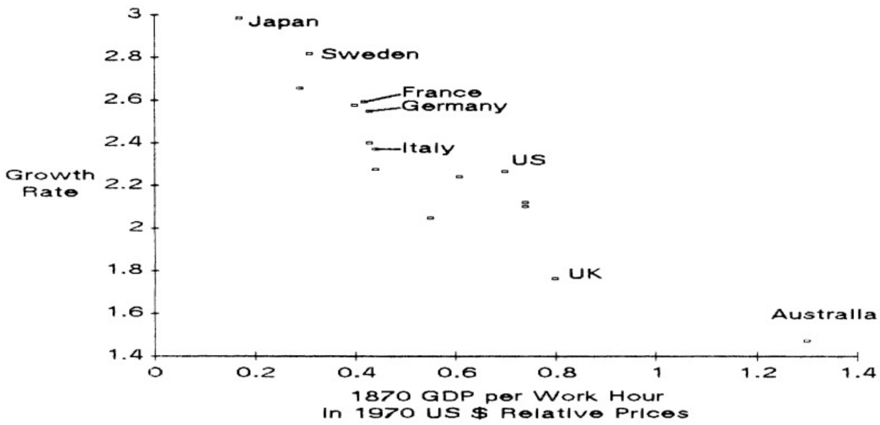

Abbildung 15 *Wachstumsrate des BIPs/Arbeitsstunde 1870-1979 vs. BIP/Arbeitsstunde in 1870. Quelle: Baumol (1986)*

d) Skizzieren Sie am Beispiel von Japan und den USA die Entwicklung der Produktivität über die Zeit. Auf welches Phänomen stoßen Sie dabei?

e) Erzeugen Sie nun eine zweite Grafik mit allen Ländern, die in dem Datensatz enthalten sind und vergleichen Sie diese mit Abbildung 16.

f) Erläutern Sie Abbildung 16. Welche Schlüsse ziehen Sie?

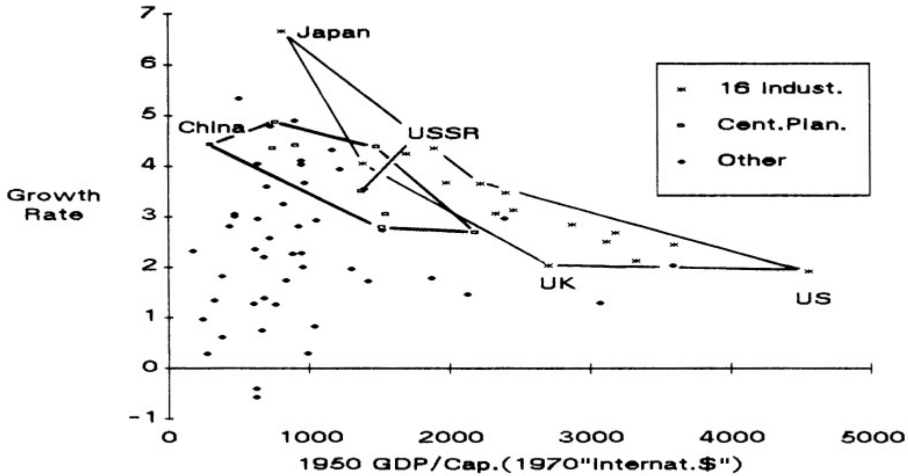

Abbildung 16 *Wachstumsrate des BIPs/Kopf 1950-80 vs. BIP/Kopf in 1950. Quelle: Baumol (1986)*

4.4.4 Produktivitätswachstum II

Nehmen Sie an, Ihnen liegen Niveaus Y_t des BIP vor und Niveaus N_t der Bevölkerungsgröße.

a) Berechnen Sie die jährlichen Wachstumsraten des BIP pro Kopf.

b) Nehmen Sie an, Ihnen liegen Wachstumsraten der zwei Größen vor.

c) Berechnen Sie nun die durchschnittliche Wachstumsrate von 0 bis t.

Siehe Seite 4.16 für Antworten.

4.4.5 Cournot-Wettbewerb

Betrachten Sie den Rahmen unvollständigen Wettbewerbs mit Marktmacht aus Kapitel 3.4.

a) Was sind die Grundannhmen oligopolistischen Wettbewerbs?

b) Was kennzeichnet Cournotwettbewerb?

c) Leiten Sie die Preissetzung im Cournot-Oligopol aus (3.2) her.

4.4.6 Die Haushaltsseite in einer dezentralen Ökonomie

Die Nutzenfunktion der Haushalte ist gegeben durch

$$U(c_X, c_Y) = c_X^{\alpha} c_Y^{1-\alpha}, \tag{4.1}$$

wobei $0 < \alpha < 1$. Die Nebenbedingung lautet

$$p_X c_X + p_y c_Y = E, \tag{4.2}$$

wobei p_X und p_Y die Preise einer Einheit des Konsumgutes c_X bzw. c_Y sind und E sind die Ausgaben eines Haushaltes für Konsum.

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem der Haushalte.

b) Bestimmen Sie die optimale Nachfrage nach den Gütern c_X und c_Y mit Hilfe des Lagrangeansatzes.

4.4.7 Ein zentraler Planer

a) Wie bestimmt der zentrale Planer das wohlfahrtsmaximierende Beschäftigungsniveau? Gehen Sie von dem Maximierungsproblem aus Kapitel 3.3.3 der Vorlesungsunterlagen aus und bestimmen Sie L_X und L_Y.

b) Ist die dezentrale Ökonomie optimal?

c) Ein Zahlenbeispiel: Gemäß den Zahlen des statistischen Bundestamtes (Destatis 2015)[4] gab es im Jahr 2013 in Deutschland ca. 42.281 Mio. Erwerbstätige, von denen ca. 25% im produzierenden Gewerbe (Sektor X) tätig waren und ca. 75% im Dienstleistungssektor Y (wir ignorieren zur Vereinfachung den primären Sektor). Um wieviel % ist die Beschäftigung in den jeweiligen Sektoren zu niedrig, wenn die Anzahl der Oligopolisten im Dienstleistungssektor $n = 5$ ist?

[4] https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/Indikatoren/LangeReihen/Arbeitsmarkt/lrerw013.html

4.4.8 Solow Wachstumsmodell

a) Die Veränderung des Kapitalbestandes folgt der Differentialgleichung

$$\dot{K} = sF(K) - \delta K, \tag{4.3}$$

wobei $K = K(t)$ den aggregierten Kapitalbestand bezeichnet, $F(K) = AK(t)^{\alpha}L^{1-\alpha}$ steht für die aggregierte Produktionsfunktion, $Y = F(K) = AK(t)^{\alpha}L^{1-\alpha}$ für die gesamte Produktion, s ist die exogene Sparquote, und δ ist die exogene Kapitalverschleißrate.

Erklären Sie die Differentialgleichung und zeichnen Sie mit Matlab das dazugehörige Phasendiagramm für die Parameterwerte

$$\begin{aligned} L &= 10 \\ A &= 1 \\ \alpha &= 0.33 \\ s &= 0.2 \\ \delta &= 0.1 \end{aligned}$$

b) Analysieren Sie die Dynamik des Kapitalbestandes K in der kurzen und in der langen Frist mit Hilfe der Abbildung 17.

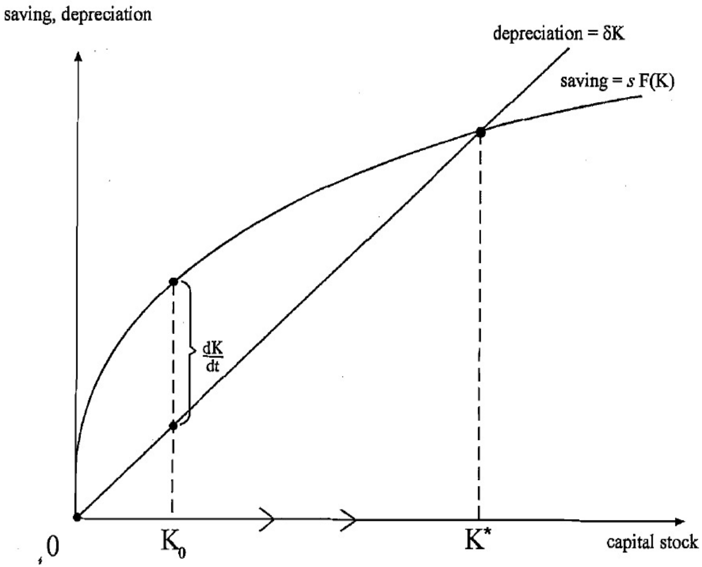

Abbildung 17 *Dynamik des Kapitalbestandes. Quelle: Aghion Howitt (1992)*

c) Was für eine ökonomische Logik steckt hinter dieser Dynamik?

4.4.9 Die CES-Nutzenfunktion

Die Präferenzen eines Haushaltes seien beschrieben durch die instantane Nutzenfunktion

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \tag{4.4}$$

a) Zeichnen Sie die Nutzenfunktion für $\sigma = [0, .2, .4, .6, .8, 1.2]$.

b) Zeigen Sie für $\sigma \rightarrow 1$, dass (4.4) zu $u(c) = \ln c$ wird.

Siehe Seite 4.19 für Antworten.

4.4.10 Optimales Sparverhalten

Die Wohlfahrt einer Gesellschaft sei beschrieben durch

$$\max_{\{C(\tau)\}} \int_t^{\infty} e^{-\rho[\tau-t]} u(C(\tau)) d\tau, \tag{4.5}$$

mit ρ als Zeitpräferenzrate, $C(\tau)$ steht für Konsum zum Zeitpunkt τ und die instantane Nutzenfunktion ist gegeben durch

$$u(C(\tau)) = \frac{[C(\tau)]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad \text{mit } \sigma > 0. \tag{4.6}$$

Eine Ressourcenbeschränkung verlangt, dass die Investitionen in Kapital gegeben sind durch die Differenz aus Output $Y(K(t), L)$, den Abschreibungen auf Kapital $\delta K(t)$ und Konsum $C(t)$,

$$\dot{K}(t) = Y(K(t), L) - \delta K(t) - C(t). \tag{4.7}$$

a) Leiten Sie die Keynes-Ramsey Regel

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{Y_K(K(t), L) - \delta - \rho}{\sigma} \tag{4.8}$$

her. Was besagt sie?

b) Berechnen sie die optimale Sparrate $s^* = \frac{Y^* - C^*}{Y^*}$ im steady state, gegeben die Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$Y = F(K, L) = L^{1-\alpha} K^{\alpha}, \ 0 < \alpha < 1. \tag{4.9}$$

4.4.11 Musterlösungen

Lösungsskizze zu Aufgabe 4.4.4 Produktivitätswachstum II

Definition: BIP pro Kopf $= Y_t/N_t$.

a) Damit ergibt sich die Wachstumsrate in t in diskreter Zeit als

$$g_t^{\text{BIP pro Kopf}} = \frac{Y_t/N_t - Y_{t-1}/N_{t-1}}{Y_{t-1}/N_{t-1}} \tag{4.10}$$

Wachstum in t ist also Wachstum von Periode $t-1$ zu t. Wären wir in kontinuierlicher Zeit, hätten wir

$$\begin{aligned} g_t^{\text{BIP pro Kopf}} &= \frac{\frac{d}{dt} Y_t/N_t}{Y_t/N_t} = \frac{d}{dt}\left[\ln\left(Y_t/N_t\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\ln Y_t - \ln N_t\right] \\ &= \frac{d}{dt}\ln Y_t - \frac{d}{dt}\ln N_t = \frac{\frac{d}{dt}Y_t}{Y_t} - \frac{\frac{d}{dt}N_t}{N_t}. \end{aligned}$$

Die Wachstumsrate eines Bruches ist also die Differenz der Wachstumsraten des Zählers und des Nenners.

b) Da wir jedoch in der diskreten Zeit sind, müssen wir folgenden "Trick" verwenden, um nur mit Wachstumsraten arbeiten zu können:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0\left[1+g_1^Y\right]\left[1+g_2^Y\right] \ldots \left[1+g_t^Y\right] \\ N_t &= N_0\left[1+g_1^N\right]\left[1+g_2^N\right] \ldots \left[1+g_t^N\right] \end{aligned}$$

Damit haben wir die Niveaus und setzen sie in die Definition (4.10) ein, die wir schreiben als

$$g_t^{\text{BIP pro Kopf}} = \frac{Y_t/N_t}{Y_{t-1}/N_{t-1}} - 1$$

Wir bekommen

$$g_t^{\text{BIP pro Kopf}} = \frac{Y_0\left[1+g_1^Y\right]\left[1+g_2^Y\right]...\left[1+g_t^Y\right]/\left\{N_0\left[1+g_1^N\right]\left[1+g_2^N\right]...\left[1+g_t^N\right]\right\}}{Y_0\left[1+g_1^Y\right]\left[1+g_2^Y\right]...\left[1+g_{t-1}^Y\right]/\left\{N_0\left[1+g_1^N\right]\left[1+g_2^N\right]...\left[1+g_{t-1}^N\right]\right\}} - 1$$

Wir sehen, dass die (empirisch unbekannten) Startwerte Y_0 und N_0 sich kürzen (und noch viele Wachstumsraten) und wir bekommen folgende Gleichung zum Berechnen der Wachstumsrate in diskreter Zeit

$$\begin{aligned} g_t^{\text{BIP pro Kopf}} &= \frac{\left[1+g_1^Y\right]\left[1+g_2^Y\right]...\left[1+g_t^Y\right]/\left\{\left[1+g_1^N\right]\left[1+g_2^N\right]...\left[1+g_t^N\right]\right\}}{\left[1+g_1^Y\right]\left[1+g_2^Y\right]...\left[1+g_{t-1}^Y\right]/\left\{\left[1+g_1^N\right]\left[1+g_2^N\right]...\left[1+g_{t-1}^N\right]\right\}} - 1 \\ &= \frac{\left[1+g_t^Y\right]/\left[1+g_t^N\right]}{1} - 1 = \frac{1+g_t^Y}{1+g_t^N} - 1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

c) Wenn wir die durchschnittliche Wachstumsrate von einem Zeitpunkt 0 bis t berechnen wollen, verwenden wir die Definition der Wachstumsrate von 0 bis t

$$g_{0,t}^{\text{BIP pro Kopf}} = \frac{Y_t/N_t - Y_0/N_0}{Y_0/N_0} = \frac{Y_t/N_t}{Y_0/N_0} - 1.$$

Diese berechnen wir mit dem selben “Trick” wie oben, als

$$\begin{aligned} g_{0,t}^{\text{BIP pro Kopf}} &= \frac{Y_0\left[1+g_1^Y\right]\left[1+g_2^Y\right]...\left[1+g_t^Y\right]/\left\{N_0\left[1+g_1^N\right]\left[1+g_2^N\right]...\left[1+g_t^N\right]\right\}}{Y_0/N_0} - 1 \\ &= \frac{\left[1+g_1^Y\right]\left[1+g_2^Y\right]...\left[1+g_t^Y\right]}{\left[1+g_1^N\right]\left[1+g_2^N\right]...\left[1+g_t^N\right]} - 1, \end{aligned}$$

wo sich im zweiten Schritt wieder die unbekannten Startwerte herauskürzen.

Wir definieren nun die durchschnittliche Wachstumsrate pro Kopf implizit als

$$\frac{Y_0}{N_0}\left[1+g_{0,t}^{av}\right]^t = \frac{Y_t}{N_t}.$$

Auflösen nach der durchschnittlichen Wachstumsrate ergibt

$$g_{0,t}^{av} = \left(\frac{Y_t}{N_t}/\frac{Y_0}{N_0}\right)^{1/t} - 1.$$

Falls nur Wachstumsraten zur Verfügung stehen, ergibt erneut der obige Trick

$$\begin{aligned} g_{0,t}^{av} &= \left(\frac{Y_0\left[1+g_1^Y\right]\left[1+g_2^Y\right]...\left[1+g_t^Y\right]}{N_0\left[1+g_1^N\right]\left[1+g_2^N\right]...\left[1+g_t^N\right]}/\frac{Y_0}{N_0}\right)^{1/t} - 1 \\ &= \left(\frac{\left[1+g_1^Y\right]\left[1+g_2^Y\right]...\left[1+g_t^Y\right]}{\left[1+g_1^N\right]\left[1+g_2^N\right]...\left[1+g_t^N\right]}\right)^{1/t} - 1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 4.4.9 Die CES-Nutzenfunktion

a) Die folgende Abbildung zeichnet die Nutzenfunktion (4.4) für verschiedene Werte des Paramters σ.

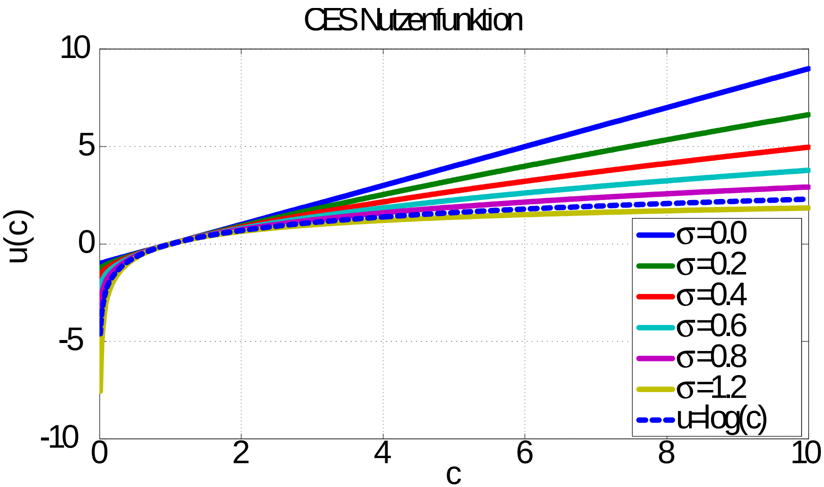

Abbildung 18 *Darstellung der CES-Nutzenfunktion*

Wofür steht überhaupt σ? Falls ein Modell mit Unsicherheit betrachtet wird, steht σ für die relative Risikoaversion. Diese ist definiert als

$$\mathrm{RRA} = \frac{u''(c)}{u'(c)}c = \frac{-\sigma c^{-\sigma-1}}{c^{-\sigma}}c = \sigma$$

und damit konstant ist. Deswegen wird die Nutzenfunktion auch als CRRA (constant relative risk aversion) Nutzenfunktion bezeichnet.

In einem Modell ohne Unsicherheit und mit mehreren Perioden wird σ über seinen Kehrwert interpretiert. Dabei wird dann $1/\sigma$ als die intertemporale Substitutionselastizität bezeichnet,

$$\varepsilon_{t,t+1} = \frac{u_{c_t}/u_{c_{t+1}}}{c_{t+1}/c_t} \frac{d\left(c_{t+1}/c_t\right)}{d\left(u_{c_t}/u_{c_{t+1}}\right)} = \frac{1}{\sigma}.$$

Diese ist ebenfalls konstant. Daher resultiert der Name CES (constant elasticity of substitution) Nutzenfunktion. (Siehe z.B. Wälde, 2012, Kap. 2.3.3 für mehr Hintergrund.)

b) Für $\sigma = 1$ ist die CES-Nutzenfunktion nicht definiert, da Zähler und Nenner null wären,

$$\lim_{\sigma \to 1} u(c_t) = \lim_{\sigma \to 1} \frac{\overbrace{c_t^{1-\sigma} - 1}^{\to 0}}{\underbrace{1-\sigma}_{\to 0}}.$$

Da Zähler und Nenner beide gegen Null gehen, können wir den Grenzwert nicht "normal" berechnen. Wir müssen hierzu L'Hôpital's Regel anwenden. Allgemein lautet sie

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wobei x mit σ und x_0 mit 1 ersetzt wird.

Bezogen auf die CES-Nutzenfunktion heißt das dann

$$\lim_{\sigma \to 1} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{\sigma \to 1} \frac{c_t^{1-\sigma} [-1] \ln c_t}{-1} = \ln c_t,$$

wobei wir für die Ableitung im Zähler die Ableitungsregel

$$f(x) = a^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = a^{g(x)} g'(x) \ln a.$$

verwendet haben. (Beweis: Die Funktion $f(x)$ lässt sich schreiben als $f(x) = a^{g(x)} = e^{\ln a^{g(x)}} = e^{g(x) \ln a}$. Damit ergibt sich als Ableitung $f'(x) = e^{g(x) \ln a} g'(x) \ln a = e^{\ln a^{g(x)}} g'(x) \ln a = a^{g(x)} g'(x) \ln a$.) Somit wurde gezeigt, dass die Log-Nutzenfunktion ein Grenzfall der CES-Nutzenfunktion ist, bei dem die Substitutionselastizität 1 ist.

4.5 Das Letzte