

Lösung zu Aufgabe 4

Aufgabe 4

P symmetrisch $\Rightarrow P = P'$

P idempotent $\Rightarrow P = PP$

$(AB)' = B'A'$

$(F^{-1})' = (F')^{-1}$

Zu zeigen: $P = X(X'X)^{-1}X'$ ist symmetrisch, also $P = P'$.

Beweis: Setzen wir $A = X(X'X)^{-1'}$ und $B = X'$, dann gilt

$$P' = (AB)' = B'A' = X(X(X'X)^{-1})'.$$

Setzen wir nun $C = X$ und $D = (X'X)^{-1}$ dann gilt

$$P' = X(CD)' = XD'C' = X(X'X)^{-1'}X'.$$

Nun setzen wir noch $F = X'X$ und bekommen

$$P' = X(F^{-1})'X' = X(F')^{-1}X'.$$

Setzen wir nun $G = X'$ und $H = X$, dann gilt $F = GH$ und $F' = H'G' = X'X$ und damit

$$P' = X(F^{-1})'X' = X(X'X)^{-1}X' = P.$$

Zu zeigen: $P = X(X'X)^{-1}X'$ ist idempotent, also $P = PP$.

Beweis: Es gilt

$$P'P = PP = X(X'X)^{-1} \underbrace{X'X}_Z \underbrace{(X'X)^{-1}}_{Z^{-1}} X' = X(X'X)^{-1}X' = P.$$

Zu zeigen: $Q = I - X(X'X)^{-1}X'$ ist idempotent, also $Q = Q'$.

Beweis: Es gilt

$$Q' = (\mathbb{1} - P)' = \mathbb{1}' - P' = \mathbb{1} - P = Q,$$

da P symmetrisch ist, somit $P = P'$.

Zu zeigen: $Q = I - X(X'X)^{-1}X'$ ist idempotent, also $Q = QQ$.

Beweis: Es gilt

$$QQ = (\mathbb{1} - P)(\mathbb{1} - P) = \mathbb{1} - P - P + PP = \mathbb{1} - P = Q,$$

da P idempotent ist, somit $PP = P$.