Angewandte intertemporale Optimierung I
Wintersemester 2009/10
Übung
Kapitel 3, Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Envelopment Theorem

geg.:

Nutzenfunktion:

$$U = U(C, L) \tag{1}$$

; mit

$$\frac{\partial U}{\partial C} > 0 \qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial L} < 0$$

Budgetrestriktion:

$$wL = C \tag{2}$$

Teilaufgabe (a)

ges.: Optimales Arbeitsangebot, optimaler Konsum, indirekte Nutzenfunktion

Nutzenmaximierung:

$$U(C, L) = U(wL, L)$$

$$\frac{dU}{dL} = \frac{dU}{dC} \cdot \frac{dwL}{dL} + \frac{dU}{dL} = 0$$

$$\frac{dU}{dL} = \frac{dU}{dC} \cdot w + \frac{dU}{dL} = 0$$

Da aus der BEO L^* und C^* hervorgehen und w die einzige exogene Variable ist, ergibt sich das optimale Arbeitsangebot bzw. der optimale Konsum als:

$$L^* = L^*(w) \tag{3}$$

$$C^* = C^*(w) \tag{4}$$

Zur Herleitung der indirekten Nutzenfunktion bzw. Optimalwertfunktion setzt man L^* (und C^*) in die Nutzenfunktion ein und erhält:

$$V(w) = \max_{C,L}[U(C, L)\ s.t.\ C - wL = 0] = U(C^*(w), L^*(w)) = U(wL^*, L^*) \tag{5}$$

Die indirekte Nutzenfunktion definiert also den maximalen Nutzen, unter Einhaltung der Budgetrestriktion, *für jedes exogen gegebene w.*

Teilaufgabe (b)

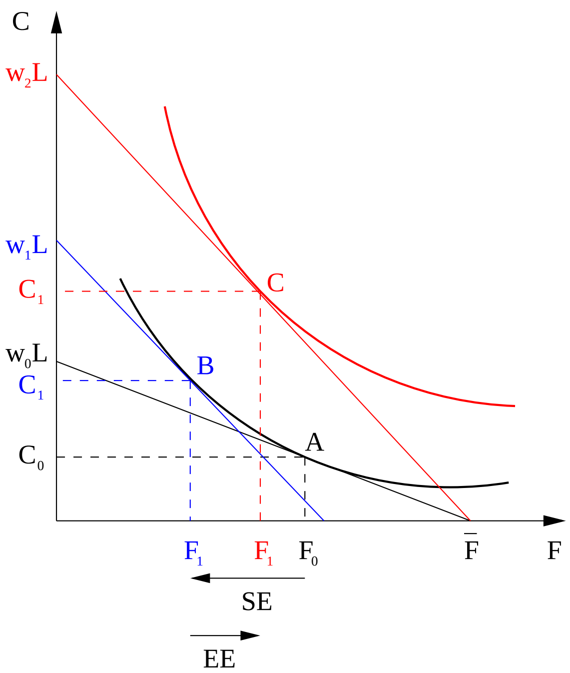
ges.: Unter welchen Bedingungen erhöht ein Individuum sein Arbeitsangebot L, wenn der Lohn w steigt?

Arbeits-Freizeit-Entscheidung:
Die Grenzrate der Substitution zwischen Konsum (Preis normiert auf 1) und Freizeit ($F = 1 - L$) entspricht im Optimum dem Preisverhältnis $\frac{w}{1}$. D.h. das Individuum ist bereit Konsum gegen Freizeit im Verhältnis $\frac{w}{1}$ zu tauschen. Unter welchen Bedingungen fragt das Individuum weniger Freizeit nach (bzw. erhöht sein Arbeitsangebot), wenn w steigt?
Gemäß der *Slutsky-Zerlegung* teilt man den Gesamteffekt infolge einer Erhöhung von w in zwei Teileffekte:

1. **Einkommenseffekt:** Wenn w steigt, steigt das Einkommen (wL). Das Individuum wird sowohl mehr Konsumgüter, als auch mehr Freizeit nachfragen bzw. **weniger Arbeit anbieten**.

2. **Substitutionseffekt:** Aufgrund des gestiegenen Lohns, ist Konsum relativ billiger und Freizeit relativ teurer geworden. Das Individuum wird dann mehr Konsumgüter und weniger Freizeit nachfragen bzw. **mehr Arbeit anbieten**.

Wenn der **Substitutionseffekt** den **Einkommenseffekt** dominiert, erhöht ein Individuum sein Arbeitsangebot L, wenn der Lohn w steigt. Grafischer Lösungsansatz:



Teilaufgabe (c)

geg.: Steigender Lohn führt zu höherem Arbeitsangebot (Ergenis aus Teilaufgabe (b))
ges.:

1. Überwiegt der negative Nutzeneffekt, der sich aus dem höheren Arbeitsangebot ergibt den positiven Nutzeneffekt, der mit dem höherem Konsumniveau einhergeht?

2. Ist unter o.g. Annahme der Nutzeneffekt positiv, wenn es keinen negativen Nutzeneffekt aus höherem Arbeitsangebot gibt?

Es soll die indirekte Nutzenfunktion (5) aus Teilaufgabe (a) verwendet werden und das **Envelopment-Theorem** im Zuge der Lösung bewiesen werden.

$$\begin{aligned}
\frac{dV(w)}{dw} &= \frac{dU(wL(w), L(w))}{dw} \\
&= \frac{dU}{dC}\frac{\mathbf{dwL(w)}}{\mathbf{dw}} + \frac{dU}{dL(w)}\frac{dL(w)}{dw} \mid \text{Produktregel anwenden} \\
&= \frac{dU}{dC}[\mathbf{1 \cdot L(w) + wL'(w)}] + \frac{dU}{dL(w)}L'(w) \\
&= \frac{dU}{dC}L(w) + \frac{dU}{dC}wL'(w) + \frac{dU}{dL(w)}L'(w) \\
&= \frac{dU}{dC}L(w) + L'(w)\left[\frac{dU}{dC}w + \frac{dU}{dL(w)}\right] \mid \text{Ausdruck in eckiger Klammer im Optimum null} \\
&= \frac{dU}{dC}L(w)
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{dV(w)}{dw} > 0$, da $\frac{dU}{dC} > 0$ (angenommene Eingeschaft der Nutzenfunktion) und $L(w) > 0$ (per Annahme: steigender Lohn führe zu höherem Arbeitsangebot). Somit ist der Nettonutzeneffekt positiv. Der positive Nutzeneffekt aufgrund des höheren Konsumniveaus überwiegt den negativen Nutzeneffekt aufgrund des höheren Arbeitsangebots.
Das **Envelopment-Theorem** besagt: *Untersucht man die Wirkung einer Änderung eines exogenen Parameters auf eine Optimalwertfunktion, so braucht man nur die direkten Effekte zu berücksichtigen. Die indirekten Effekte verschwinden, da man sich im Optimum befindet.*[1] Unter ausschließlicher Berücksichtigung der direkten Effekte kann man schreiben:

$$\frac{dV(w)}{dw} = \frac{dU}{dC}L(w)$$

Angenommen es gäbe keinen negativen Nutzeneffekt infolge eines höheren Arbeitsangebots und man schreibt $L(w)$ als $\frac{dwL}{dw}$, dann erhält man

$$\frac{dV(w)}{dw} = \frac{dU}{dC}\frac{dwL}{dw} = \frac{dU}{dC}\frac{dC}{dw}$$

Auch unter dieser Annahme ist der Gesamtnutzeneffekt positv.

[1](Breyer, 2005, S.50)