Numerik Partieller Differentialgleichungen
WS 2011/2012

5. Übungsblatt: 21 Januar 2015

Aufgabe 1:

Betrachtet wird die skalare Erhaltungsgleichung in 1D:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{1}$$

mit Fluxfunction:

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2 - 3u \tag{2}$$

α) Finden Sie die Lösung von (1), (2), mit Anfangsdata:

$$u_l(x) = \begin{cases} u_l, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

für verschiedene $u_l \geq 0$.
Hinweis: 1) Mit Hilfe der die Methode der Charakteristiken, 2) Betrachten Sie verschiedene Fälle für u_l in Bezug auf die großere Nullstelle von f.

β) Finden Sie die Lösung von (1), (2), mit Anfangsdata:

$$u_l(x) = \begin{cases} u_l, & x \leq 0 \\ u_r, & x \geq 0 \end{cases},$$

mit $0 \leq u_l \leq 3 \leq u_r$.
Hinweis: 1) Mit Hilfe der die Methode der Charakteristiken, 2) Machen Sie die Annahme dass innerhalb der Verdünnungswelle die Lösung $u(x,t) = \psi(x/t)$ mit $\psi'(\cdot) \neq 0$ erfühlt. Setzen Sie ψ in die Erhaltungsgleichung ein und leiten Sie her dass $u(x,t) = (f')^{-1}(x/t)$ für (x,t) innerhalb der Verdünnungswelle, 3) Vergessen Sie nicht die Fälle wo (x,t) nicht innerhalb den Verdünnungswelle liegt.

γ) Finden Sie die Lösung von(1), (2), mit Anfangsdata:

$$u_l(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \tilde{u}, & 0 < x < 5 \\ 0, & x \geq 5 \end{cases},$$

mit $\tilde{u} \geq 6$, bis zu dem Zeitpunkt wo die Verdünnungswelle die Stoßwelle erreicht. Wann passiert das?
Hinweis: 1) Kombinieren Sie α), und β),

δ) Lösen Sie das Problem γ) numerisch.
Benutzen Sie:

- $\tilde{u} = 10$,

- Ein Gebiet $[x_l, x_r]$ und ein finalen Zeitpunkt, groß genug, dass Sie die Änderung der Stowellenrichtung beobachten knnen,
- Dirichlet Randbedigungen, konsistent mit die Anfangslösung, i.e $u(x_l,t) = u(x_r,t) = 0$,
- <u>Nicht-konstante</u> Zeitschritte Δt^n, so dass die CFL Bedingung erfüllt wird

$$\frac{\Delta t^n}{\Delta x} \max_i |\{f'(u_i^n\}| \leq 0.9,$$

- Das konservative numerisches Schema:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x}\left(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n\right),$$

  mit den folgenden numerischen Flußen:
  - Lax-Friedrichs:

$$F_{i+1/2}^{n,LxF} = \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta t^n}(u_{i+1}^n - u_i^n),$$

  - Richtmyer:

$$F_{i+1/2}^{n,Rhm} = f\left(\frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} - \frac{\Delta t^n}{2\Delta x}(f(u_i^n) - f(u_{i+1}^n))\right),$$

  - Superbee Flux-limiter:

$$\begin{aligned}
F_{i+1/2}^n &= F_{i+1/2}^{n,LxF} - \rho(r_i^n)\left(F_{i+1/2}^{n,LxF} - F_{i+1/2}^{n,Rhm}\right), && \text{(numerischer Fluss)}\\
r_i^n &= \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n},\\
\rho(r) &= \max\{0, \min\{2r,1\}, \min\{r,2\}\}, && \text{(fluxlimiter)}
\end{aligned}$$

Hinweis: Um Division durch Null zu vermeiden, in einem Bruch $\frac{a}{b}$ wo $b > 0$, benutzen Sie ein "kleines" $\varepsilon > 0$, und setzen Sie $\frac{a}{\max\{b,\varepsilon\}}$ anstelle von $\frac{a}{b}$.