JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

4. Übungsblatt: 16. Dezember 2014

Aufgabe 1 (Programmieraufgabe):

(a) Wir betrachten die 1D Poisson Gleichung

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & , \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

wo $\Omega = [0,1]$ und $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ -1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.

Lösen Sie dieses Problem mit der Hilfe von stückweise linearen Finiten Elementen. Ihre numerische Lösung u_N soll von der Anzahl N der Gitterpunkte in Ω abhängig sein. Berechnen Sie auch die Konvergenzordnung des Verfahrens mit Hilfe des "Fehlers" $\|u_N - u_{2N}\|_2$, wo $\|\cdot\|_2$ die diskrete l^2 Norm bezeichnet.

(b) Lösen Sie, in der gleichen Weise wie oben, das 2D Poisson Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & , \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

wo $\Omega = [0,1]^2$ und $f(x,y) = x + y$, $\forall (x,y) \in \Omega$.

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe):

Betrachten Sie das 1D Anfangs-Randwert Problem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & , \quad x \in [0,1], t \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & , \quad t \in [0,1] \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & , \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

(a) Lösen sie dieses Problem mit der Hilfe von stückweise linearen Finiten Elementen (im Ort) und expliziter Zeitdiskretisierung. Ihre Funktion soll als Eingabeargument haben:

 (i) die Anzahl N von Gitterpunkten und

 (ii) eine Konstante "CFL", welche die Δt durch die Formel $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \mathrm{CFL}$ festlegt.

(b) Berechnen Sie die l^1, l^2, und l^∞ Fehler des Verfahrens als Funktionen von N. Stellen Sie die Fehler im doppellogarithmischen Koordinatensystem dar. Verwenden Sie hierfür die exakte Lösung $(u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x))$ des oberen Problems. Welche Konvergenzordnung scheint dieses Verfahren zu haben?

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 55099 Mainz
http://www.mathematik.uni-mainz.de/arbeitsgruppen/numerik