**Numerik Partieller Differentialgleichungen**
**WS 2014/2015**

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

**3. Übungsblatt: 2 Dezember 2014**

## Aufgabe 1:

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $u(x) = \|x\|^a \in H^1(\Omega)$ für $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ?

(b) Zeigen Sie dass $u(x) = \log\log\left(\frac{2}{\|x\|}\right) \in H^1(\Omega)$ für $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

(c) Zeigen Sie: Für $u(x) = |x|$ gilt $u' \in L^2(\Omega)$, $u' \notin H^1(\Omega)$ für $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$.

## Aufgabe 2:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und die reellwertige Funktion $u$ sei durch

$$u : (\xi, \eta) \to u(\xi, \eta) = \mathrm{Re} f(\xi + i\eta), \quad \xi + i\eta \in \mathbb{C}$$

deniert. Zeigen Sie, dass dann $|\mathrm{grad}\ u(\xi, \eta)|^2 = |f'(\xi + i\eta)|^2$ gilt, und $u$ die Laplace-Gleichung $u = 0$ löst. Folgern Sie, dass $u_k(x) = r^k \cos k\theta$ und $v_k(x) = r^k \sin k\theta$ in der Polarkoordinatendarstellung $x = (r\cos\theta, r\ sin\theta)$ mit $r \geq 0$ und $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ebenfalls Lösungen der Laplace-Gleichung sind.

## Aufgabe 3:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und sei $\Gamma \subset \partial\Omega$ eine Menge mit nichtverschwindendem $(d-1)$-Maß. Betrachtet wird

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u|_\Gamma = \phi_1 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = \phi_2$$

Ferner sei ein $u_0 \in H^1(\Omega)$ gegeben, welches die Randbendigung erfüllt.

(a) Finden Sie eine geeignete schwache Formulierung.

(b) Zeigen Sie die folgende Poincare-Typ Ungleichung.
Es gibt ein $c > 0$, so dass

$$c\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq |u|^2_{H^1(\Omega)} + \left(\int_\gamma u d\sigma\right)^2$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$.

(c) Beweisen Sie die Elliptizität der Bilieneaform aus der schwachen Formulierung.

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 55099 Mainz
http://www.mathematik.uni-mainz.de/arbeitsgruppen/numerik