Numerik Partieller Differentialgleichungen
WS 2014/2015

2. Übungsblatt: 18. November 2014

Aufgabe 1 (Programmieraufgabe):

Uberprüfen Sie numerisch, dass der zentral Differenzenquotient eine Approximation zweiter Ordnung für die erste Ableitung liefert. Vergleichen Sie, in einem logarithmishcen Plotten den zentral mit den Rückwärts und Vorwärts Differenzenquotienten. Benutzen Sie dafur das Gebiet $[-1, 1]$, die Funktion e^{-15x^2} und die diskreten L^1 und L^∞ Normen.

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe):

Wir betrachten das Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \text{ in } \Omega, \\ u &= 0, \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wo in

1d: $\Omega = (0, 1)$, $\Delta u = u_{xx}$ und $f(x) = x$,

2d: $\Omega = (0, 1)^2$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ und $f(x, y) = x + y$.

Diskretisieren Sie das Randwertproblem mit dem zentralen Differenzenquotienten für die zweite Ableitung und berechnen Sie die numerische Lösung als ein Vektor bzw eine Matrix.

Implementieren Sie die Verfahren, so das den Anzahl der Knoten in jeder Dimension als Parameter gewählt sein kann.

Berechnen und plotten Sie die zugehörige Approximation für $10, 100, 1000$ Knoten pro Dimension.

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe):

Wir betrachten die 1D Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad x \in [-1, 1], \ t > 0 \\ u_0(x) &= e^{-30x^2} \mathcal{X}_{[-0.99,0.99]}(x), \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

mit Randbedigungen:

$$\text{Dirichlet: } u(-1,t) = u(1,t) = 0$$
$$\text{Periodisch: } u(-1,t) = u(1,t)$$
$$\text{null Neumann: } u_x(-1,t) = u_x(1,t) = 0$$

Diskretisieren Sie im Raum über einem äquidistanten Gitter. Approximieren Sie die Zeitableitung mit dem Differenzenquotient $\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\Delta t}$ wo $\Delta t > 0$ die entsprechende Zeischrittweite bezeichnet. Benutzen Sie den zentralen Differenzenquotient für die räumlich Ableitung. Verwenden Sie das θ-Schema:

$$u_i^{k+1} + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}\right) = u_i^k - (1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i-1}^{k} - 2u_i^{k} + u_{i+1}^{k}\right)$$

wo $\theta \in [0,1]$ (Spezielle Verfahren: $\theta = 0$ Explizit, $\theta = 1$ Implizit, $\theta = 0.5$ Crank-Nicolson).

Tipp 1:
Benutzen Sie künstliche "Geist-Zellen" um die richtige Randbedigungen zu implementieren

Tipp 2:
Aus Stabilitätsgründen muß in expliziten Fall gelten $\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2}$

Tipp 3:
Schreiben Sie das θ-Verfahren as ein lineares Gleichungssystem.