

1. Übungsblatt: 6. November 2014

Aufgabe 1:

Wir betrachten die folgende Randwertaufgabe für die Poisson Gleichung im Einheitsquadrat:

$$-\Delta u = -u_{xx} - u_{yy} = f \text{ in } \Omega = (0, 1)^2, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (1)$$

Wie bei gewöhnlichen DGLn werden bei der Diskretisierung von (1) mittels Differenzenverfahren Approximationen an die Lösung $u = u(x, y)$ in endlich vielen Gitterpunkten gesucht. Betrachten Sie für $h = 1/n$ das uniforme Gitter

$$\Omega_h = \{(x_i, y_i) = (ih, jh) : 0 \leq i, j \leq n\}$$

und diskretisieren Sie die zweiten Ableitungen mit dem zentralen Differenzenquotienten $D_h^2[u]$, einmal entlang der x -Achse und einmal entlang der y -Achse.

- Geben Sie an den $(n-1)^2$ inneren Knoten $\{(x_i, y_i) : 1 \leq i, j \leq n-1\}$ die Approximationen u_{ij} an und stellen Sie ein LGS $L_h u_h = f_h$ zu deren Berechnung auf. Verwenden Sie für den Lösungsvektor lexikographische Ordnung, d.h. $u_h = [U_1, \dots, U_{n-1}]^T$ mit $U_j = [u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}]^T \approx [u(x_1, y_j), \dots, u(x_n, y_j)]^T$, $j = 1, \dots, n-1$.
- Zeigen Sie: Das Spektrum von L_h besteht aus den reellen Werten

$$\lambda_{ij} = \frac{4}{h^2} \left[\sin^2 \left(\frac{i\pi h}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{j\pi h}{2} \right) \right], \quad i, j = 1, \dots, n-1$$

- Folgern Sie, dass L_h invertierbar ist mit $\|L_h^{-1}\|_2 \leq 1/8$.
- Beurteilen Sie die Eignung Ihnen bekannter direkter und iterativer Verfahren zur Lösung des diskretisierten Problems $L_h u_h = f_h$.

Aufgabe 2:

Die Temperaturentwicklung in einem Stab der Länge π , welcher an seinem Enden auf konstant 0° Celsius gekühlt wird, ist durch folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u : [0, \pi] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \rightarrow u(x, t)$ modelliert:

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

- Zeigen Sie, dass sich aus der Fourierentwicklung der Anfangswerte und folgendem Ansatz

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx), \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin(kx)$$

die Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

ergibt. Geben Sie einen Funktionenraum X an, in welchem der so definierte Lösungsoperator $u_0 \rightarrow u(\cdot, T)$ (für $T > 0$) stetig ist.

- Diskutieren Sie Abhängigkeits- und Einflußbereiche!
- Zeigen Sie, dass die Anfangsrandwertaufgabe in negativer Zeitrichtung schlecht gestellt ist. In welchen Frequenzen des Fourierspektrums manifestiert sich das Problem?

Aufgabe 3:

Zur Diskretisierung des Laplace-Operators $Lu = \Delta u$ wird ein $x_0 \in \Omega \in \mathbb{R}^2$ mit den Gitternachbarn $\{x_1, \dots, x_k\}$ betrachtet. Ferner sei (für $i = 1, \dots, k$) $h_i := x_i - x_0$ und $h := \max_{i=1, \dots, k} \|h_i\|_2$. Als Ansatz für L_h wird

$$(L_h u)(x_0) = \sum_{i=0}^k w_i u(x_i)$$

gewählt. Dabei seien die $w_i = \mathcal{O}(h^{-2})$. Leiten Sie aus der Konsistenzforderung

$$(L_h u - Lu)(x_0) = \mathcal{O}(h)$$

die Bedingungsgleichungen für die w_i her.

Aufgabe 4:

Sei $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und

$$g(x, y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)$$

wo (x, y) ist durch $x + iy = re^{i\phi} = z \in \Omega$ gegeben. Zeigen Sie dass

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$$

löst das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{auf } \Omega \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$



Abgabe: Dienstag, 18 November 2014

Prof. Dr. M. Lukacova - Dr. N. Sfakianakis

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 55099 Mainz
<http://www.mathematik.uni-mainz.de/arbeitsgruppen/numerik>