

---

# DIE BIEBERBACHSCHE VERMUTUNG

Hauptseminar

---

PROF. DR. M. HANKE-BOURGEOIS

Johannes Gutenberg-Universität

SS 2015



# Inhaltsverzeichnis

1	Der Satz von Bieberbach . . . . .	2
2	Der Verzerrungssatz von Koebe und die Abschätzung von Littlewood . . . . .	5
3	Sternförmige Funktionen . . . . .	7
4	Die Littlewood-Paley Vermutung . . . . .	12
5	Die Vermutungen von Robertson und Milin-Lebedev . . . . .	14
6	Der Konvergenzsatz von Carathéodory . . . . .	18
7	Die Loewner-Theorie . . . . .	24
8	Kugelflächenfunktionen . . . . .	26
9	Weinsteins Funktionen . . . . .	32
10	Der Beweis von de Branges . . . . .	36
	Literaturverzeichnis . . . . .	44

# 1. Der Satz von Bieberbach

Es bezeichne  $D$  immer die Einheitskreisscheibe und  $\mathcal{S}$  die Menge aller *schlichten* (d.h. injektiven holomorphen) Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = 1$ . Wir verwenden durchweg die Notation

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad |z| < 1. \quad (1.1)$$

**Definition und Satz 1.1** *Zu  $f \in \mathcal{S}$  existiert eine eindeutig definierte ungerade Quadratwurzeltransformierte  $g \in \mathcal{S}$ , definiert durch*

$$g(z) = (f(z^2))^{1/2} = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots, \quad |z| < 1. \quad (1.2)$$

*Ist umgekehrt  $g \in \mathcal{S}$  eine ungerade Funktion, so definiert (1.2) eine eindeutig bestimmte Funktion  $f \in \mathcal{S}$ .*

**Beispiel 1.2** Für die *Koebe-Funktion*  $k$  bzw. eine Rotation  $k_\theta$  der Koebe-Funktion

$$f(z) = k_\theta(z) = e^{-i\theta} k(e^{i\theta} z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}, \quad |z| < 1,$$

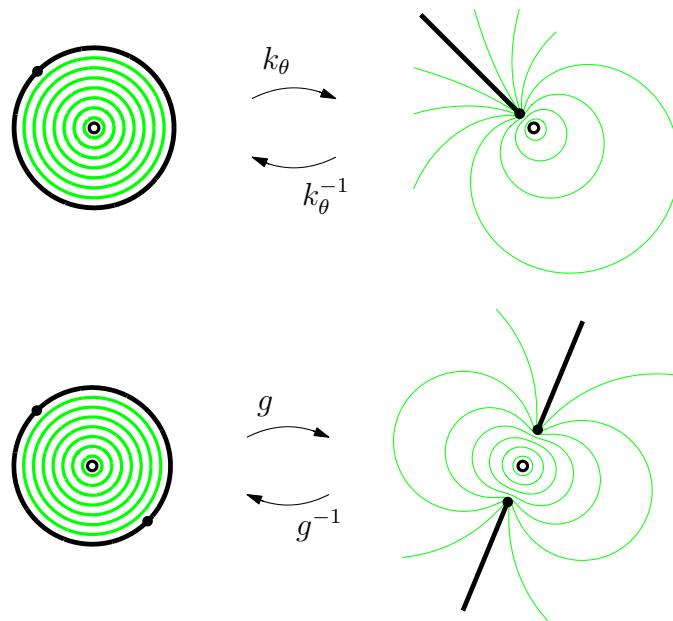
$0 \leq \theta < 2\pi$ , ist die Quadratwurzeltransformierte gegeben durch

$$g(z) = \left( \frac{z^2}{(1 - e^{i\theta} z^2)^2} \right)^{1/2} = \frac{z}{1 - e^{i\theta} z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta} z^{2n+1},$$

vgl. Abbildung 1.1. ◇

**Satz 1.3 (Bieberbach, 1916)** *Für  $f \in \mathcal{S}$  gemäß (1.1) gilt immer  $|a_2| \leq 2$ . Ist  $|a_2| = 2$ , so ist  $f$  eine Rotation der Koebe-Funktion.*

*Beweis.* vgl. Duren [3, S. 28 ff]. □



**Abb. 1.1.** Die Koebe-Funktion (oben) und ihre Quadratwurzeltransformierte;  $\theta = \pi/4$

Bieberbach stellt in derselben Arbeit fest, dass aufgrund der Verzerrungssätze von Koebe der  $n$ -te Taylorkoeffizient  $a_n$  für alle  $f \in \mathcal{S}$  durch eine universelle Schranke  $|a_n| \leq \alpha_n$  beschränkt ist (vgl. Korollar 2.2), und stellt in einer Fußnote die nach ihm benannte Vermutung auf, vgl. Abbildung 1.2. (Bieberbach verwendet die Bezeichnung  $k_n$  anstelle von  $\alpha_n$ .)

**Vermutung (Bieberbach, 1916)** Für beliebiges  $f \in \mathcal{S}$ , gegeben durch (1.1), gilt  $|a_n| \leq n$  für alle  $n = 2, 3, \dots$ . Liegt für ein  $n \geq 2$  Gleichheit vor, so ist  $f$  eine Rotation der Koebe-Funktion.

Der folgende Satz ist nach Koebe benannt, wurde aber vollständig erst in der bereits zitierten Arbeit von Bieberbach bewiesen. (Koebe hat nur die Existenz eines universellen Radius  $r_0 > 0$  nachgewiesen.)

**Satz 1.4 (Koebes 1/4-Satz)** Für jede Funktion  $f \in \mathcal{S}$  enthält  $f(D)$  eine offene Kreisscheibe  $B_r(0)$  um  $z = 0$  mit Radius  $r \geq r_0 = 1/4$ .

*Beweis.* vgl. Duren [3, Theorem 2.3].

□

haben damit nicht nur unseren Satz IV bewiesen, sondern darüber hinaus auch erkannt, daß die Zahl  $r_2$  des Satzes IV die 2 ist, und daß für  $a_2$  auch wirklich alle Werte dieses Kreises  $|a_2| \leq 2$  vorkommen. Wenn es mir auch nicht gelungen ist, für die andern Koeffizienten ein ähnlich abschließendes Resultat zu erreichen, so möchte ich doch noch zeigen, daß auch der Wertverrat jedes andern Koeffizienten gerade einen Kreis erfüllt. Das folgt einfach daraus, daß für  $|k| \leq 1$  mit  $f(z)$  stets auch  $\frac{1}{k}f(kz)$  für  $|z| < 1$  regulär und schlicht ist. Der  $n$ te Koeffizient dieser Funktion ist aber  $a_n k^{n-1}$ . Ist also  $a_n^{(0)}$   $n$ ter Koeffizient einer schlichten Abbildung, so auch alle  $a_n$  aus dem Kreis  $|a_n| \leq |a_n^{(0)}|$ . Darin liegt bekanntermaßen unsere Behauptung<sup>1</sup>. Man muß sich indessen hüten, dies Resultat in zu starkem Maße umzukehren. Es bildet ganz und gar nicht jede Funktion schlicht ab, deren Koeffizienten den gefundenen Kreisen angehören. Z. B. bildet schon die Funktion  $w = z + 2z^2$  den Kreis  $|z| \leq 1$  nicht auf einen schlichten Bereich ab, denn wir haben gesehen, daß  $\sum n z^n$  die einzige schlicht abbildende Funktion mit  $a_2 = 2$  ist<sup>2</sup>.

Wir ziehen noch eine Folgerung aus diesen Betrachtungen:

*Satz V.* Wenn  $|z| > 1$  durch  $w = F(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots$  schlicht abgebildet wird, so liegen alle Randpunkte des Bildbereiches im Kreise  $|w| \leq 2$ , und es finden sich auf diesem Kreise nur dann Randpunkte des Bildbereiches, wenn es sich um die durch die Funktion  $F(z) = z + \frac{1}{z}$  vermittelte Abbildung von  $|z| > 1$  auf die von  $-1$  bis  $+1$  aufgeschlitzte Ebene handelt, oder wenn die Abbildungsfunktionen  $\frac{1}{\rho^{i\phi}} F(\rho^{i\phi} z)$  vorliegen, die gleichfalls auf Schlitzbereiche abbilden, welche aus den oben genannten durch Drehung hervorgehen<sup>3,4</sup>.

<sup>1</sup> Daß  $k_n \geq n$  zeigt das Beispiel  $\sum n z^n$ . Vielleicht ist überhaupt  $k_n = n$ .

<sup>2</sup> Die hier gefundene Tatsache, daß 2 die genaue Schranke für  $|a_2|$  ist, erlaubt es, gewisse Untersuchungen über den KOEBESCHEN Verzerrungssatz zu Ende zu führen, welche schon Hr. PLEMELJ auf der Wiener Naturforscherversammlung vorgebracht hat, und die unabhängig davon kürzlich Hr. PICK angestellt und (Leipz. Ber. 1916) veröffentlicht hat.

<sup>3</sup> Man vgl. zu diesem Satz einen von KOEBE, Göttinger Nachrichten 1908, S. 348. Der hier bewiesene Satz V liefert zugleich den KOEBESCHEN und zeigt, daß der genaue Wert der Konstanten, deren Existenz dort bewiesen ist, die 4 ist, und daß diese Konstante nur bei Schlitzabbildungen erreicht wird.

<sup>4</sup> Der Satz ist ferner nahe verwandt mit dem Satz I, den ich auf S. 153 von Bd. 77 der Math. Ann. aufgestellt habe, besagt aber ersichtlich noch etwas mehr als dieser.

Abb. 1.2. Auszug aus dem Originalartikel von L. Bieberbach (1916)

## 2. Der Verzerrungssatz von Koebe und die Abschätzung von Littlewood

**Satz 2.1 (Verzerrungssatz von Koebe)** Für alle  $f \in \mathcal{S}$  gilt

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad \text{für } |z| = r < 1.$$

und

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad \text{für } |z| = r < 1,$$

mit Gleichheit für eine der vier Ungleichungen und ein  $z \neq 0$  genau dann, wenn  $f$  eine Rotation der Koebe-Funktion ist.

*Beweis.* vgl. Duren [3, p.32 ff]. □

**Korollar 2.2** Für beliebiges  $f \in \mathcal{S}$ ,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad z \in D,$$

gilt

$$|a_n| < (en)^2, \quad n = 2, 3, \dots$$

*Beweis.* Aus den Cauchyschen Integralformeln und dem Verzerrungssatz von Koebe erhält man für beliebiges  $0 < r < 1$

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{r^{1-n}}{(1-r)^2}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite kann nun bzgl.  $r$  minimiert werden. Das Minimum wird für  $r_n = (n-1)/(1+n)$  angenommen, so dass

$$\begin{aligned}
|a_n| &\leq \frac{r_n^{1-n}}{(1-r_n)^2} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1-n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 n^2 < e^2 n^2,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

**Satz 2.3 (Littlewood, 1925)** Für beliebiges  $f \in \mathcal{S}$ ,

$$f(z) = 1 + z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad z \in D,$$

gilt

$$|a_n| < en, \quad n = 2, 3, \dots \tag{2.1}$$

*Beweis.* vgl. Duren [3, p. 37 ff]. □

Der Vorfaktor  $e$  in der Abschätzung von Littlewood wurde in den Folgejahren sukzessive verbessert. Bazilevich war 1947 der erste, der diesen Faktor unter 2.0 drückte ( $|a_n| < 1.925 n$ ); als Louis de Branges die Bieberbach-Vermutung 1984 bewies, war das beste entsprechende Resultat von Horowitz aus dem Jahr 1977:

$$|a_n| < \left(\frac{1\,659\,164\,137}{681\,080\,400}\right)^{1/14} n \approx 1.0657 n.$$



### 3. Sternförmige Funktionen

**Definition 3.1** Mit  $\mathcal{S}^*$  wird die Menge aller sternförmigen Funktionen  $f \in \mathcal{S}$  bezeichnet, für die  $f(D)$  ein sternförmiges Gebiet mit Sternpunkt  $z^* = 0$  ist.

**Proposition 3.2** Ist  $f \in \mathcal{S}^*$ , so ist  $f(B_r(0))$  sternförmig mit Sternpunkt  $z^* = 0$  für jedes  $0 < r < 1$ .

*Beweis.* Sei  $0 < t < 1$  beliebig, aber fest. Da  $f \in \mathcal{S}^*$  ist

$$\omega_t(z) := f^{-1}(tf(z)), \quad z \in D, \quad (3.1)$$

eine wohldefinierte holomorphe Funktion, die die Einheitskreisscheibe in sich abbildet mit  $\omega_t(0) = 0$ . Nach dem Schwarzschen Lemma gilt daher

$$|\omega_t(z)| \leq |z|, \quad z \in D, \quad (3.2)$$

für jedes  $0 < t < 1$ .

Für ein festes  $0 < r < 1$  definieren wir nun die konforme Abbildung

$$g(z) := f(rz), \quad z \in D.$$

Offensichtlich ist  $g(D) = f(B_r(0))$  und es ist zu zeigen, dass  $g(D)$  ein sternförmiges Gebiet mit Sternpunkt  $z^* = 0$  ist, also dass mit  $g(z)$  auch  $tg(z)$  in  $g(D)$  liegt, für  $0 < t < 1$ . Nun ist aber nach (3.1) und (3.2)

$$tg(z) = tf(rz) = f(\omega_t(rz)) = g(z_t) \quad \text{mit} \quad z_t = \frac{\omega_t(rz)}{r} \in D.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

**Satz 3.3** Ist  $f \in \mathcal{S}^*$  holomorph in einer Umgebung der Einheitskreisscheibe, so gilt

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \varphi(t) dt, \quad z \in D, \quad (3.3)$$

für eine nichtnegative Funktion  $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 1.$$

*Beweis.* Unter den genannten Voraussetzungen ist  $f(e^{it})$  die Randkurve eines sternförmigen Gebiets mit Sternpunkt  $z^* = 0$ , d.h., es gilt

$$\partial_t \arg f(e^{it}) \geq 0.$$

Wegen

$$\partial_t \arg f(e^{it}) = \operatorname{Im} \partial_t \log f(e^{it}) = \operatorname{Im} \frac{ie^{it} f'(e^{it})}{f(e^{it})} = \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad z = e^{it},$$

bedeutet dies, dass die Randwerte des Realteils  $u$  der in einer Umgebung von  $D$  holomorphen Funktion  $F(z) = zf'(z)/f(z)$  nichtnegativ sind. Die Formel von Schwarz liefert dann die gewünschte Darstellung (3.3) mit  $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} u(e^{it})$ , da  $F(0) = 1$  verschwindenden Imaginärteil aufweist. Wegen der Mittelwerteigenschaft gilt schließlich

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt = u(0) = \operatorname{Re} F(0) = 1.$$

□

**Satz 3.4 (Nevanlinna, 1920)** *Für sternförmige Funktionen  $f \in \mathcal{S}^*$  ist die Bieberbach-Vermutung richtig; insbesondere kann (innerhalb der Menge der sternförmigen Funktionen) Gleichheit  $|a_n| = n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  nur für Rotationen der Koebe-Funktion auftreten.*

*Beweis.* 1. Wir betrachten zunächst sternförmige Funktionen  $f \in \mathcal{S}^*$ , die in eine Umgebung des Einheitskreises holomorph fortsetzbar sind. Auf eine solche Funktion ist Satz 3.3 anwendbar, d.h., es gilt

$$F(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \varphi(t) dt, \quad z \in D,$$

mit  $\varphi \geq 0$  und  $\int \varphi dt = 1$ . Wir entwickeln den Integranden in eine in  $D$  konvergente Potenzreihe,

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = (1 + e^{-it}z) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-int} z^n,$$

und erhalten daher

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} 2e^{-int} \varphi(t) dt z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$$

mit  $|\gamma_n| \leq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Somit ist

$$zf'(z) = f(z) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n \right).$$

Verwenden wir nun für  $f$  die übliche Potenzreihendarstellung mit Taylorkoeffizienten  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so ergibt sich hieraus durch Koeffizientenvergleich

$$na_n = a_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{n-\nu} \gamma_\nu, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

2. Nun betrachten wir eine allgemeine sternförmige Funktion  $f \in \mathcal{S}^*$ . Nach Proposition 3.2 bilden die Funktionen  $f_r(z) = f(rz)/r$ ,  $0 < r < 1$ , Elemente von  $\mathcal{S}^*$ , die die Voraussetzungen der obigen Herleitung erfüllen. Da sowohl  $f_r$  als auch  $F_r(z) = zf'_r(z)/f_r(z)$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  bzw.  $F(z) = zf'(z)/f(z)$  konvergieren, gelten die Relationen (3.4) mit (von  $f$  abhängigen Koeffizienten  $|\gamma_\nu| \leq 2$ ) daher sogar für allgemeine sternförmige Funktionen  $f \in \mathcal{S}^*$ .

3. Der Beweis geht nun induktiv auf der Grundlage von (3.4) weiter. Für den Induktionsschluss nehmen wir an, dass  $|a_\nu| \leq \nu$  für alle  $\nu \leq n-1$  und ein  $n \geq 2$  bereits bewiesen sei; für die Induktionsbasis bei  $n=2$  verwenden wir, dass  $a_1 = 1$  gilt. Mit der Induktionsannahme ergibt sich dann aus (3.4) und  $|\gamma_\nu| \leq 2$  die Ungleichung

$$(n-1)|a_n| \leq 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} |a_{n-\nu}| \leq 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu = (n-1)n, \quad (3.5)$$

also die Induktionsbehauptung  $|a_n| \leq n$ .

4. Nehmen wir abschließend noch an, dass  $f$  keine Rotation der Koebe-Funktion ist. Nach Satz 1.3 von Bieberbach ist dann  $|a_2| < 2$ , so daß ab  $n=3$  in der zweiten Ungleichung in (3.5) ein echtes Ungleichungszeichen steht. Also gilt  $|a_n| < n$  für alle  $n \geq 2$ .  $\square$

Eine interessante Untermenge der sternförmigen Funktionen sind die konvexen Funktionen  $f \in \mathcal{S}^*$ , für die  $f(D)$  konvex ist. (Die Koebe-Funktion gehört nicht in diese

Klasse!) Für konvexe Funktionen ergibt dieselbe Technik eine deutlich stärkere Aussage.

**Satz 3.5 (Loewner, 1917)** Ist  $f \in \mathcal{S}^*$  konvex,  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ , dann gilt

$$|a_n| \leq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Zunächst zeigen wir wieder, dass  $f(B_r(0))$  für jedes  $0 < r < 1$  konvex ist. Zu beliebigen  $z_1, z_2 \in B_r(0)$  mit  $z_1 \neq z_2$ ,  $|z_1| \leq |z_2| < r$  und  $0 < t < 1$  definiere man die in  $D$  holomorphe Funktion

$$g(z) = t f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1-t)f(z).$$

Der Wert  $g(z)$  liegt nach Konstruktion zwischen zwei Funktionswerten von  $f$ ; aufgrund der Konvexität von  $f$  ist daher  $g(D) \subset f(D)$ , und somit ist

$$h = f^{-1} \circ g$$

in  $D$  wohldefiniert. Zudem ist  $h(0) = g(0) = 0$ . Nach dem Lemma von Schwarz gilt  $|h(z)| \leq |z|$ , und für  $z = z_2$  erhalten wir

$$f(h(z_2)) = g(z_2) = t f(z_1) + (1-t)f(z_2), \quad \text{wobei } |h(z_2)| \leq |z_2| < r.$$

Mit anderen Worten, die Konvexkombination der Bildpunkte  $f(z_1)$  und  $f(z_2)$  aus  $f(B_r(0))$  gehört wiederum zu  $f(B_r(0))$ . Somit lassen sich konvexe Funktionen ihrerseits durch konvexe Funktionen lokal gleichmäßig approximieren, die noch auf einer Umgebung der Einheitskreisscheibe holomorph sind.

Für eine solche Funktion impliziert die Konvexität, dass sich die Tangentensteigung an  $f(e^{it})$  mit wachsendem  $t$  gegen den Uhrzeigersinn dreht, d.h., dass

$$\begin{aligned} 0 \leq \partial_t \arg \partial_t f'(e^{it}) &= \operatorname{Im} \partial_t \log(i e^{it} f'(e^{it})) = \operatorname{Im} \frac{-e^{it} f'(e^{it}) - e^{2it} f''(e^{it})}{i e^{it} f'(e^{it})} \\ &= \operatorname{Im} \left( i + \frac{i e^{it} f''(e^{it})}{f'(e^{it})} \right) = \operatorname{Re} \left( 1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) = \operatorname{Re} \frac{z \psi'(z)}{\psi(z)}, \quad z = e^{it}, \end{aligned}$$

wobei

$$\psi(z) = z f'(z). \tag{3.6}$$

Die Funktion  $\psi$  ist in einer Umgebung der Einheitskreisscheibe bis auf den Ursprung nullstellenfrei, also ist  $F(z) = z \psi'(z) / \psi(z)$  in dieser Umgebung holomorph; ferner gilt  $\psi(0) = 0$  und  $F(0) = \psi'(0) = 1$ . Wie im Beweis von Satz 3.3 folgt somit

$$\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \varphi(t) dt, \quad z \in D,$$

für eine nichtnegative Funktion  $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\int \varphi dt = 1$ . Entwickeln wir nun

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad \alpha_1 = 1,$$

dann erhalten wir dieselben Relationen wie in (3.4) für die Koeffizienten  $\alpha_n$  anstelle von  $a_n$ , wobei die  $\gamma_n$  entsprechend definiert und betragsmäßig wieder durch 2 beschränkt sind. Der gleiche Induktionsbeweis wie in Satz 3.4 liefert daher

$$|\alpha_n| \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Eingesetzt in (3.6) folgt

$$na_n = \alpha_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

und daher die Schranke  $|a_n| \leq 1$  für alle konvexen Funktionen, die noch auf einer Umgebung der Einheitskreisscheibe holomorph sind. Für allgemeine konvexe Funktionen folgt die Behauptung dann durch Grenzübergang.  $\square$

**Beispiel** Auch die Aussage von Satz 3.5 ist bestmöglich, wie man sich anhand der Möbius-Transformation

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

klar macht, die die Einheitskreisscheibe auf die Halbebene  $\operatorname{Re} w > -1/2$  abbildet.

## 4. Die Littlewood-Paley Vermutung

Ist  $f \in \mathcal{S}$ ,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

für  $z \in D$  und

$$g(z) = c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots \quad \text{mit} \quad c_1 = 1 \quad (4.1)$$

dessen Quadratwurzeltransformierte, so gilt

$$a_n = c_1 c_{2n-1} + \dots c_{2n-1} c_1, \quad n \geq 2. \quad (4.2)$$

Insbesondere ist  $a_2 = 2c_1 c_3 = 2c_3$ , also

$$|c_3| = \frac{1}{2} |a_2| \leq 1$$

nach Satz 1.3 von Bieberbach.

Ferner ist nach Beispiel 1.2 die Quadratwurzeltransformierte der Koebe-Funktion durch

$$g(z) = \frac{z}{1-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1}$$

mit

$$c_n = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gegeben.

**Vermutung (Littlewood-Paley, 1932)** *Ist  $g \in \mathcal{S}$  eine ungerade Funktion, gegeben durch (4.1), dann gilt*

$$|c_{2n-1}| \leq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen (4.2) wäre die Gültigkeit der Littlewood-Paley-Vermutung hinreichend für einen Beweis der Bieberbach-Vermutung.

**Proposition 4.1 (Privalov, 1924)** *Für ungerade sternförmige Funktionen  $g \in \mathcal{S}$  ist die Littlewood-Paley Vermutung korrekt.*

*Beweis.* Wir folgen dem Beweis von Satz 3.4. Unter den gegebenen Annahmen sieht man dann, dass die gerade Funktion

$$G(z) = \frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n} z^{2n}, \quad z \in D,$$

Taylorkoeffizienten  $|\gamma_{2n}| \leq 2$  aufweist. Ferner ergibt sich für die Taylorkoeffizienten (4.1) von  $g$  die Rekursion

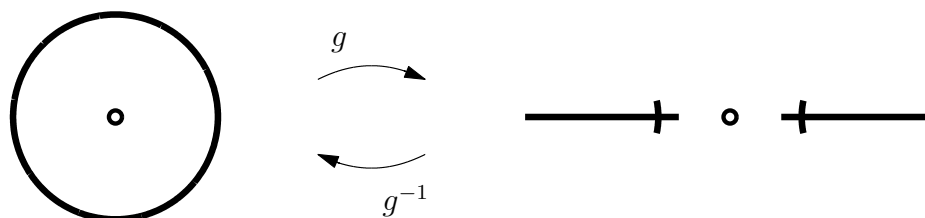
$$2(n-1)c_{2n-1} = \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{2n-1-2\nu} \gamma_{2\nu}, \quad n \in \mathbb{N},$$

vgl. (3.4). Durch vollständige Induktion sieht man nun, dass  $|c_{2n-1}| \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . □

1933 haben Fekete und Szegő gezeigt, dass die Littlewood-Paley-Vermutung im Allgemeinen *falsch* ist. Ein etwas einfacheres Gegenbeispiel ist von Schaeffer und Spencer.

**Satz 4.2** *Für jedes  $n \geq 2$  existiert eine ungerade Funktion  $g \in \mathcal{S}$  wie in (4.1) mit  $c_{2n-1} > 1$ .*

*Beweis.* vgl. Duren [3, Abschnitt 3.9]. □



**Abb. 4.1.** Die Funktion  $g$  von Schaeffer und Spencer für  $n = 3$

## 5. Die Vermutungen von Robertson und Milin-Lebedev

**Vermutung (Robertson, 1936)** Sei  $g \in \mathcal{S}$  eine ungerade Funktion,

$$g(z) = c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots \quad \text{mit} \quad c_1 = 1. \quad (5.1)$$

Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n |c_{2j-1}|^2 \leq n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ist  $f \in \mathcal{S}$  beliebig,

$$f(z) = a_1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad a_1 = 1, \quad (5.2)$$

und  $g \in \mathcal{S}$  aus (5.1) dessen Quadratwurzeltransformierte, so gilt

$$a_n = c_1 c_{2n-1} + \dots c_{2n-1} c_1. \quad (5.3)$$

Eine Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung auf die rechte Seite von (5.3) ergibt somit unmittelbar das folgende Resultat.

**Proposition 5.1** Die Robertson-Vermutung impliziert die Bieberbach-Vermutung.

Als nächstes führen wir die sogenannten *logarithmischen Koeffizienten* von  $f$  ein.

**Definition und Satz 5.2** Für eine Funktion  $f \in \mathcal{S}$  wie in (5.2) ist

$$\log \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n \quad \text{mit} \quad d_1 = a_2 \quad (5.4)$$

eine wohldefinierte holomorphe Funktion in  $D$ . Die Koeffizienten  $d_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heißen logarithmische Koeffizienten von  $f$ .



*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $f(z)/z = 1 + a_2z + \dots$  holomorph und nullstellenfrei in  $D$ . Also existiert dort eine wohldefinierte Logarithmusfunktion von  $f(z)/z$ , die durch die Vorgabe einer Nullstelle im Ursprung eindeutig festgelegt wird. Der erste Term der entsprechenden Taylorentwicklung (5.4) ergibt sich unmittelbar durch die bekannte Taylorentwicklung von  $\log(1 + \zeta) = \zeta - 1/2\zeta^2 \pm \dots$  um  $\zeta = 0$ .  $\square$

**Beispiel 5.3** Für eine Rotation der Koebe-Funktion,  $k_\theta$ , gilt

$$\begin{aligned} \log \frac{k_\theta(z)}{z} &= \log \frac{1}{(1 - e^{i\theta}z)^2} = -2 \log(1 - e^{i\theta}z) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{i\theta}z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n} e^{in\theta} \right) z^n, \end{aligned}$$

folglich gilt für die logarithmischen Koeffizienten der rotierten Koebe-Funktion

$$|d_n| = 2/n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\diamond$

Wegen (5.4) ist  $d_1 = a_2$  und daher nach dem Satz 1.3 von Bieberbach

$$|d_1| \leq 2 = 2/1,$$

was eine Vermutung der Form

$$|d_n| \leq 2/n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.5)$$

für jedes  $f \in \mathcal{S}$  nahelegen könnte. Diese lässt sich aber wie die Littlewood-Paley Vermutung widerlegen:

**Beispiel** Ist  $g \in \mathcal{S}$  wie in (5.1) ungerade, so gilt

$$\begin{aligned} \log \frac{g(z)}{z} &= \log(1 + c_2z^2 + c_3z^4) \\ &= (c_2z^2 + c_3z^4 + \dots) - \frac{1}{2}(c_2z^2 + c_3z^4 + \dots)^2 + \dots \\ &= c_2z^2 + (c_3 - c_2^2/2)z^4 + \dots \end{aligned}$$

Die logarithmischen Koeffizienten einer ungeraden Funktion aus  $\mathcal{S}$  sind also durch

$$d_1 = 0, \quad d_2 = c_2, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = c_3 - \frac{1}{2}c_2^2, \quad \dots$$

gegeben. Wäre nun (5.5) richtig, so ergäbe sich im vorliegenden Fall  $|c_2| = |d_2| \leq 1$  und dementsprechend

$$|d_4| \geq |c_3| - \frac{1}{2}|c_2|^2 \geq |c_3| - \frac{1}{2}.$$

Nach Satz 4.2 existiert aber eine ungerade Funktion  $g \in \mathcal{S}$  der Form (5.1) mit  $|c_3| > 1$ . Für diese Funktion ist folglich  $|d_4| > 1 - 1/2 = 1/2$  im Widerspruch zu (5.5).  $\diamond$

Milin und Lebedev haben jedoch vermutet, dass die Ungleichung (5.5) "im Mittel" richtig ist.

**Vermutung (Milin und Lebedev, 1971)** *Sind  $d_n$  die logarithmischen Koeffizienten von  $f \in \mathcal{S}$ , so gilt*

$$\sigma_n := \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{j} (4 - j^2 |d_j|^2) \geq 0 \quad \text{für alle } n = 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

**Satz 5.4 (Milin-Lebedev)** *Ist*

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad \alpha_0 = 1,$$

*in einer Umgebung des Ursprungs holomorph und ist*

$$\log \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n z^n \quad \text{mit} \quad \delta_1 = \alpha_1.$$

*Dann gilt*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_j|^2 \leq \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{j} (j^2 |\delta_j|^2 - 1)\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* vgl. Remmert/Schumacher [8, S. 321 f].  $\square$

**Satz 5.5** *Ist  $g$  aus (5.1) eine ungerade Funktion aus  $\mathcal{S}$ , und sind  $d_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die logarithmischen Koeffizienten von  $f(z) = g(\sqrt{z})^2$ , dann gilt*

$$\sum_{j=1}^n |c_{2j-1}|^2 \leq n e^{-\sigma_n/(4n)}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (5.7)$$

wobei  $\sigma_n$  wie in (5.6) definiert ist. Ist  $f \in \mathcal{S}$  gegeben durch (5.2), und sind  $d_n, n \in \mathbb{N}$ , die logarithmischen Koeffizienten von  $f$ , so gilt

$$|a_n| \leq ne^{-\sigma_n/(4n)}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.8)$$

*Beweis.* Sei  $g$  wie in der Formulierung des Satzes,

$$f(z) = g(\sqrt{z})^2 = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

und seien  $d_n, n \in \mathbb{N}$ , die logarithmische Koeffizienten von  $f$ . Auf

$$\psi(z) = \frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^n$$

wenden wir nun den Satz 5.4 von Milin-Lebedev an. Wegen

$$\log \psi(z) = \log \left( \frac{f(z)}{z} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \log \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2} z^n$$

besagt Satz 5.4, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |c_{2j+1}|^2 &\leq \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{j} (j^2 |\delta_j|^2 - 1) \right) \\ &= \exp \left( \frac{1}{4n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{j} (j^2 |d_j|^2 - 4) \right) = e^{-\sigma_n/(4n)}. \end{aligned}$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Für die zweite Behauptung starten wir mit  $f \in \mathcal{S}$  und definieren  $g \in \mathcal{S}$  aus (5.1) als Quadratwurzeltransformierte von  $f$ . Aus dem Beweis von Proposition 5.1 und der bereits bewiesenen Ungleichung folgt dann

$$|a_n| \leq \sum_{j=1}^n |c_{2j-1}|^2 \leq ne^{-\sigma_n/(4n)}.$$

□

Wenn die Milin-Lebedev-Vermutung stimmt, ist der Exponent auf der rechten Seite der beiden Ungleichungen (5.7) und (5.8) nichtpositiv und daher in beiden Fällen die obere Schranke höchstens gleich  $n$ . Daher gilt:

**Korollar 5.6** *Die Milin-Lebedev-Vermutung impliziert die Robertson-Vermutung und damit auch die Bieberbach-Vermutung.*

## 6. Der Konvergenzsatz von Carathéodory

Wir betrachten im weiteren eine Folge einfach zusammenhängender Gebiete  $\Omega_n \subsetneq \mathbb{C}$ , die allesamt den Ursprung enthalten.

**Definition und Satz 6.1** *Existiert ein  $r > 0$  und eine offene Kreisscheibe  $B_r(0) \subset \Omega_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , so gibt es ein größtes Gebiet  $\Omega$  mit  $0 \in \Omega$  sowie der Eigenschaft, dass jede kompakte Teilmenge von  $\Omega$  in fast allen  $\Omega_n$  enthalten ist. Dieses Gebiet  $\Omega$  heißt Kern der Folge  $(\Omega_n)$ . Gibt es kein solches  $r > 0$ , so setzen wir  $\Omega = \{0\}$ .*

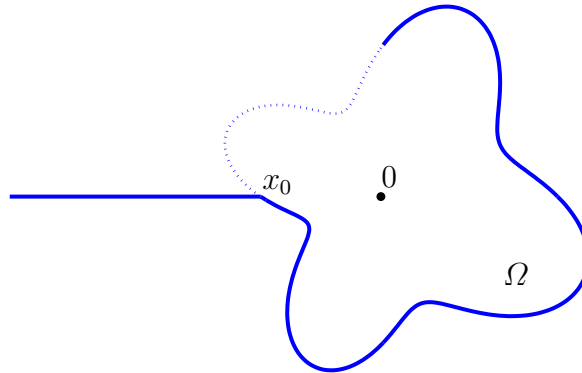
*Man sagt, dass  $\Omega_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen den Kern  $\Omega$  konvergiert ( $\Omega_n \rightarrow \Omega$ ), falls jede Teilfolge  $(\Omega_{n_k})$  denselben Kern besitzt.*

*Beweis.* Wir müssen nur im Fall  $r > 0$  die Existenz eines größten solchen Gebiets nachweisen. Sind  $G_1$  und  $G_2$  zwei Gebiete mit den genannten Eigenschaften, so hat offensichtlich  $G_1 \cup G_2$  dieselbe Eigenschaft. Ist nämlich  $K \subset G_1 \cup G_2$  kompakt, so können wir um jeden Punkt  $z \in K$  eine Kreisscheibe  $B_{2\delta(z)}(z)$  wählen, die entweder ganz in  $G_1$  oder ganz in  $G_2$  enthalten ist. Die Vereinigung aller Kreisscheiben  $\bigcup_{z \in K} B_{\delta(z)}(z)$  überdeckt  $K$ , und eine endliche Auswahl dieser Kreisscheiben überdeckt immer noch  $K$ ; ferner sind deren Abschlüsse entweder in  $G_1$  oder in  $G_2$  vollständig enthalten. Damit kann  $K \subset K_1 \cup K_2$  zerlegt werden,  $K_1, K_2$  kompakt, mit  $K_1 \subset G_1$  und  $K_2 \subset G_2$ . Daher ist  $K$  in fast allen  $\Omega_n$  enthalten und  $G_1 \cup G_2$  hat die gewünschte Eigenschaft. Die Vereinigung aller Mengen mit dieser Eigenschaft ist daher der Kern  $\Omega$ .  $\square$

**Beispiel 6.2** Als Referenzbeispiel betrachten wir folgende Situation. Sei  $f \in \mathcal{S}$  holomorph in einer Umgebung der Einheitskreisscheibe. Dann definiert  $f(\partial D)$  eine geschlossene analytische Kurve, die das Gebiet  $\Omega = f(D)$  einmal umläuft. Diese Kurve hat einen kleinsten Schnittpunkt  $x_0 = f(e^{i\theta_0}) < 0$  mit der reellen Achse. Wir bilden nun die stückweise analytischen Kurven

$$\Gamma_n := (-\infty, x_0) + \{f(e^{it}) : \theta_0 \leq t \leq \theta_0 + 2\pi - \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

vgl. Abbildung 6.1. Die Gebiete  $\Omega_n = \mathbb{C} \setminus \Gamma_n$  sind einfach zusammenhängend und enthalten alle das Gebiet  $\Omega$ , welches seinerseits den Ursprung enthält. Umgekehrt enthält



**Abb. 6.1.** Illustration zu Beispiel 6.2

jedes Gebiet  $G \supseteq \Omega$  eine kompakte Teilmenge, die in höchstens endlich vielen  $\Omega_n$  enthalten ist. Also ist  $\Omega$  der Kern der Gebiete  $\Omega_n$ , und diese konvergieren gegen  $\Omega$ .  $\diamond$

**Satz 6.3 (Caratheodory)** Sei  $(\Omega_n)$  eine Folge einfach zusammenhängender Mengen mit  $0 \in \Omega_n \subsetneq \mathbb{C}$  für alle  $n$  und  $\Omega$  der Kern dieser Folge;  $\Omega$  sei weder zu einem Punkt noch der gesamten Ebene entartet. Ferner sei  $f_n$  die Riemannsche Abbildungsfunktion von  $D$  auf  $\Omega_n$  mit  $f_n(0) = 0$  und  $f'_n(0) > 0$ . Dann konvergiert  $f_n$  lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$  in  $D$  genau dann, wenn  $\Omega_n \rightarrow \Omega$ . In diesem Fall ist  $f$  eine konforme Abbildung von  $D$  auf  $\Omega$ , und auf jeder kompakten Teilmenge von  $\Omega$  ist  $f_n^{-1}$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  wohldefiniert und konvergiert dort gleichmäßig gegen  $f^{-1}$ .

*Beweis.* 1. Wir nehmen zunächst an, dass die Folge  $(f_n)$  in  $D$  lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Nach Voraussetzung existiert ein  $r > 0$  mit  $B_r(0) \subset \Omega_n$  für alle  $n \geq n_0$ . Für diese  $n$  ist

$$g_n(w) := f_n^{-1}(w/r)$$

eine konforme Selbstabbildung des Einheitskreises mit  $g_n(0) = 0$ , und aus dem Schwarzschen Lemma folgt somit  $|g'_n(0)| \leq 1$  bzw.

$$f'_n(0) \geq r, \quad n \geq n_0.$$

Daher kann die Grenzfunktion  $f$  nicht konstant sein, ist also schlicht in  $D$  und erfüllt  $f(0) = 0$  und  $f'(0) > 0$ . Wir bezeichnen mit  $G = f(D)$  das Bildgebiet und wählen eine beliebige kompakte Teilmenge  $K$  von  $G$ , sowie eine offene Umgebung  $U$  von  $K$  derart, dass  $K \subset U \subset \bar{U} \subset G$ . Dann ist  $f^{-1}(\bar{U}) \subset D$  kompakt und daher  $f_n$  gleichmäßig konvergent gegen  $f$  auf  $f^{-1}(\bar{U})$ ; dies impliziert, dass  $\Omega_n \supset f_n(f^{-1}(\bar{U})) \supset K$  für hinreichend grosses  $n$ , also für fast alle  $n$ . Nach Definition 6.1 ist also  $G$  eine Teilmenge des Kerns  $\Omega$  von  $(\Omega_n)_n$ .

Um zu zeigen, dass auch umgekehrt  $\Omega \subset G$  gilt, wählen wir eine beliebige kompakte Teilmenge  $K \subset \Omega$ , die o.B.d.A. den Ursprung enthält. Für fast alle  $n$  ist  $f_n^{-1}$  auf  $K$  definiert und (durch Eins) beschränkt, also gibt es nach dem Satz von Montel eine gleichmäßig konvergente Teilfolge  $(f_{n_k}^{-1})_k$  auf  $K$  mit Grenzfunktion  $\psi : K \rightarrow \overline{D}$ . Wegen  $f_{n_k}^{-1}(0) = 0$  ist  $\psi(0) = 0$ , und aus dem Maximumprinzip folgt dann sogar, dass  $\psi(K) \subset D$ . Folglich ist  $f \circ \psi$  wohldefiniert auf  $K$ . Zu beliebigem  $w \in K$  betrachte nun die kompakte Punktmenge

$$P_w := \{ f_{n_k}^{-1}(w) : k \in \mathbb{N} \} \cup \{ \psi(w) \} \subset D.$$

Da  $f_n$  auf  $P_w$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert und  $f$  stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} |w - (f \circ \psi)w| &= |f_{n_k}(f_{n_k}^{-1}(w)) - f(\psi(w))| \\ &\leq |(f_{n_k} - f)(f_{n_k}^{-1}(w))| + |f(f_{n_k}^{-1}(w)) - f(\psi(w))| \\ &\leq \|f_{n_k} - f\|_{P_w} + \varepsilon \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

für  $k$  hinreichend groß. Dabei kann  $\varepsilon > 0$  beliebig klein gewählt werden, d.h., es ist  $f(\psi(w)) = w$  für alle  $w \in K$ ; insbesondere ist  $f(D) \supset K$ , und da  $K$  eine beliebige kompakte Teilmenge von  $\Omega$  war, ist somit  $G = f(D) \supset \Omega$ . Außerdem zeigt das Argument, dass ein beliebiger Häufungspunkt von  $f_n^{-1}$  auf einer kompakten Teilmenge  $K \subset \Omega$  gleich  $f^{-1}$  sein muss. Also konvergiert  $f_n^{-1}$  auf jeder kompakten Teilmenge von  $\Omega$  gleichmäßig gegen  $f^{-1}$ .

Wir halten also fest, dass die Grenzfunktion  $f$  von  $(f_n)_n$  die Riemannsche Abbildung von  $D$  nach  $\Omega$  mit  $f(0) = 0$  und  $f'(0) > 0$  ist. Da wir die gleiche Argumentation auf jede Teilfolge  $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$  anwenden können, ist der Kern  $\Omega$  für jede Teilfolge  $(\Omega_{n_k})_k$  gleich, d.h., es gilt  $\Omega_n \rightarrow \Omega$ .

2. Für die andere Beweisrichtung nehmen wir nun an, dass  $\Omega_n \rightarrow \Omega \neq \mathbb{C}$ . Dann muss die Folge  $(f'_n(0))_n$  beschränkt sein, denn andernfalls folgt aus dem Koebeschen 1/4-Satz (wegen  $f_n/f'_n(0) \in \mathcal{S}$ ), dass zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $n_k \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$f'_{n_k}(0) > 4k \quad \text{und} \quad \Omega_{n_k} = f_{n_k}(D) \supset B_k(0).$$

im Widerspruch dazu, dass  $\Omega_{n_k} \rightarrow \Omega \neq \mathbb{C}$ .

Wiederum wegen  $f_n/f'_n(0) \in \mathcal{S}$  liefert der Verzerrungssatz 2.1 von Koebe nun die Schranke

$$|f_n(z)| \leq f'_n(0) \frac{r}{(1-r)^2} \leq C \quad \text{für } 0 \leq |z| = r \leq r_0 < 1$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nach dem Satz von Montel existiert also eine Teilfolge  $(f_{n_k})_k$ , die in  $D$  lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f$  konvergiert. Nach dem bereits

bewiesenen Teil des Satzes und wegen  $\Omega \neq \{0\}$  ist  $f$  die besagte Riemannsche Abbildungsfunktion von  $D$  auf den Kern  $\Omega$  und dadurch eindeutig festgelegt. Somit haben alle Teilfolgen von  $(f_n)_n$  die gleiche Grenzfunktion, d.h., es gilt  $f_n \rightarrow f$  lokal gleichmäßig in  $D$ .  $\square$

**Definition 6.4** Die Menge  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  bezeichnet die Menge aller  $f \in \mathcal{S}$ , deren Bild durch  $f(D) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$  gegeben ist, wobei  $\Gamma$  eine zusammenhängende Kurve ist, die sich aus einem unbeschränkten Intervall  $(-\infty, x_0)$  der negativ reellen Achse und einem kompakten analytischen Kurvenstück zusammensetzt. Wir nennen die Elemente von  $\mathcal{S}'$  Schlitzabbildungen\*.

**Satz 6.5** Die Menge  $\mathcal{S}'$  liegt dicht in  $\mathcal{S}$ , d.h., zu jedem  $f \in \mathcal{S}$  existiert eine Folge  $(f_n) \subset \mathcal{S}'$ , die lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

*Beweis.* Sei  $f \in \mathcal{S}$ . Für  $0 < \rho < 1$  definieren wir

$$f_\rho(z) = \frac{1}{\rho} f(\rho z) = \frac{1}{\rho} (\rho z + a_2 \rho^2 z^2 + \dots) \in \mathcal{S}.$$

Da  $f_\rho$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert für  $\rho \rightarrow 1$ , ist es hinreichend zu zeigen, dass  $f_\rho$  durch Funktionen aus  $\mathcal{S}'$  lokal gleichmäßig approximiert werden kann, d.h., wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $f$  auf einer Umgebung der Einheitskreisscheibe holomorph ist.

Somit können wir Kurven  $\Gamma_n$  wie in Beispiel 6.2 konstruieren und konforme Abbildungen  $f_n : D \rightarrow \Omega_n = \mathbb{C} \setminus \Gamma_n$  mit  $f_n(0) = 0$  und  $f'_n(0) > 0$ . Nach Beispiel 6.2 konvergiert  $\Omega_n \rightarrow \Omega = f(D)$  und nach Satz 6.3 konvergiert  $f_n$  lokal gleichmäßig gegen  $f$ . Insbesondere konvergiert  $f'_n(0) \rightarrow 1 = f'(0)$ , so dass auch  $f_n/f'_n(0)$  noch lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Dabei ist das Bild von  $f_n/f'_n(0)$  wieder das Komplement einer Kurve wie in Definition 6.4, d.h.,  $(f_n/f'_n(0))_n \subset \mathcal{S}$  ist die gesuchte Funktionenfolge.  $\square$

**Korollar 6.6** Zum Beweis der Milin-Lebedev-Vermutung ist es hinreichend, die Vermutung für alle  $f \in \mathcal{S}'$  zu beweisen.

Ist nun  $f \in \mathcal{S}'$  eine Schlitzabbildung und  $\gamma : [0, 1) \rightarrow \Gamma$  eine Parametrisierung des zugehörigen ‘‘Schlitzes’’ aus Definition 6.4. Hierbei sei  $\gamma(0) \in \mathbb{C}$  der Anfangspunkt der Kurve und es gelte  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow 1$ . Dann erhalten wir ‘‘Teilschlitzes’’  $\Gamma_t \subset \Gamma$ ,  $0 < t < 1$ , durch die Einschränkung

---

\*In der Literatur wird der Begriff Schlitzabbildung weiter gefasst und bezeichnet konforme Abbildungen, deren Bild das Komplement mehrerer beliebiger Jordan-Kurven ist.

$$\Gamma_t = \{\gamma(\tau) : t \leq \tau < 1\}.$$

**Proposition 6.7** *Bezeichnet  $f(\cdot, t)$  die Riemannsche Abbildungsfunktion von  $D$  nach  $\mathbb{C} \setminus \Gamma_t$  mit  $f(0, t) = 0$  und  $\partial_z f(0, t) = \beta(t) > 0$ . Dann ist  $\beta$  streng monoton wachsend mit  $\beta(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow 1$ .*

*Beweis.* Für  $0 \leq s < t$  sei  $g = f(\cdot, t)$  und  $h = f(\cdot, s)$ . Dann ist  $g^{-1} \circ h$  eine wohldefinierte konforme Abbildung von  $D$  nach  $D$ , die den Ursprung invariant läßt, und aus dem Schwarzschen Lemma folgt

$$\frac{\beta(s)}{\beta(t)} = \frac{h'(0)}{g'(0)} = (g^{-1} \circ h)'(0) < 1.$$

(Gleichheit ist nicht möglich, da die Bildmengen von  $g$  und  $h$  verschieden sind.) Also ist  $\beta$  eine streng monotone Funktion.

Zu vorgegebenem  $r > 0$  existiert  $t \in [0, 1)$ , so dass  $B_r(0) \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_t$ , und für die oben definierte Funktion  $g$  ist dann

$$\psi(w) = g^{-1}(rw)$$

eine konforme Selbstabbildung des Einheitskreises mit  $\psi(0) = 0$ . Wiederum nach dem Schwarzschen Lemma ist daher  $1 > \psi'(0) = r/g'(0) = r/\beta'(t)$ , bzw.  $\beta'(t) > r$ , was noch zu zeigen war.  $\square$

Mit der Bezeichnung aus Proposition 6.7 kann die Kurve wegen  $\beta(0) = f'(0) = 1$  wie folgt umparametrisiert werden,

$$\Gamma = \{\gamma^*(\tau^*) = \gamma(\beta^{-1}(e^{\tau^*})) : 0 \leq \tau^* < \infty\}.$$

Wir nennen dies im weiteren die *Standardparametrisierung* der Kurve  $\Gamma$  für eine Schlitzabbildung  $f \in \mathcal{S}'$ . Definieren wir nun mittels der Standardparametrisierung wieder  $\Gamma_t$ , indem wir den Parameterbereich auf  $\tau^* \in [t, \infty)$  einschränken, und bezeichnet  $f(\cdot, t)$  die konforme Abbildung auf  $\Gamma_t$ , so gilt dann

$$\partial_z f(0, t) = e^t$$

und wir haben

$$f(z, t) = e^t(z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \dots). \quad (6.1)$$

Für die Standardparametrisierung existiert ein kleinstes  $t_0 = t_0(f) > 0$ , so dass  $\gamma^*(t) \in \mathbb{R}$  für  $t \geq t_0$ . Offensichtlich ist für diese  $t$  die konforme Abbildung  $f(\cdot, t)$  gegeben durch eine Reskalierung der Koebeffunktion,



$$f(z, t) = -4\gamma^*(t)k(z) = -4\gamma^*(t)\frac{z}{(1-z)^2} = -4\gamma^*(t)\sum_{n=1}^{\infty}nz^n.$$

Ein Vergleich mit (6.1) liefert  $\gamma^*(t) = -e^t/4$  für  $t \geq t_0$  und

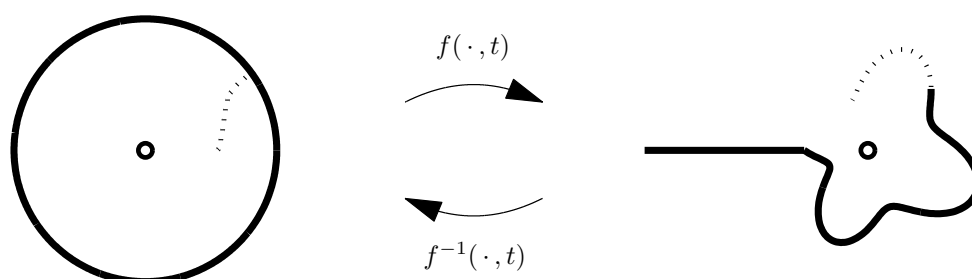
$$f(z, t) = e^tk(z), \quad t \geq t_0.$$

Wir fassen die obigen Überlegungen wie folgt zusammen.

**Definition und Satz 6.8** *Ist  $f \in \mathcal{S}'$  eine Schlitzabbildung mit  $f(D) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ , dann existiert eine eindeutig bestimmte Standardparametrisierung  $\gamma = \gamma(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , von  $\Gamma$ , so dass für  $t \geq 0$  und  $\Gamma_t = \gamma([t, \infty))$  konforme Abbildungen  $f(\cdot, t)$  von  $D$  nach  $\mathbb{C} \setminus \Gamma_t$  mit  $f(0, t) = 0$  und  $\partial_z f(0, t) = e^t$  existieren, die sogenannte Loewner-Kette zu  $f$ . Ferner gibt es ein  $t_0 = t_0(f) \geq 0$ , so dass  $f(z, t) = e^tk(z)$  für alle  $t \geq t_0$ .*

## 7. Die Loewner-Theorie

Wir betrachten zunächst wieder die Loewner-Kette  $f(\cdot, t)$  zu  $f \in \mathcal{S}'$ , und bezeichnen mit  $f^{-1}(\cdot, t)$  die Umkehrfunktion von  $f(\cdot, t)$ .

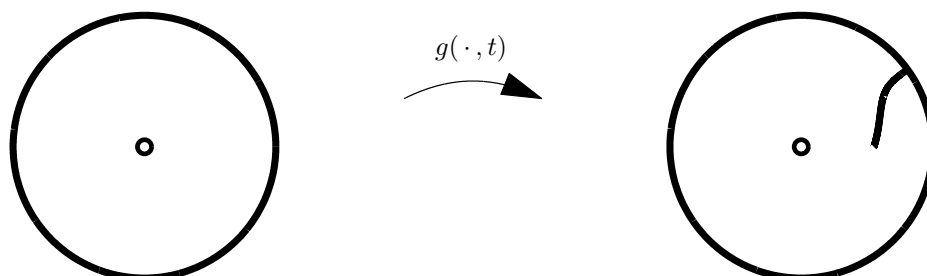


**Abb. 7.1.** Abbildungseigenschaften von  $f(\cdot, t)$

Die in Abbildung 7.1 skizzierten Abbildungseigenschaften erlauben die Definition der konformen Funktionenschar  $g(\cdot, t) : D \rightarrow D$  durch

$$g(z, t) = f^{-1}(f(z), t), \quad z \in D, \quad t \geq 0. \quad (7.1)$$

Hierbei ist  $g(\cdot, 0)$  die Identität, und es gilt  $g(0, t) = 0$  und  $\partial_z g(0, t) = e^{-t}$  für alle  $t \geq 0$ . Für das Beispiel aus Abbildung 7.1 ergibt sich das folgende Bild von  $g(\cdot, t)$ .



**Abb. 7.2.** Abbildungseigenschaften von  $g(\cdot, t)$

**Satz 7.1** *Unter den Annahmen von Definition 6.8 gilt für die Funktionenschar  $g(\cdot, t)$  aus (7.1) die Differentialgleichung*

$$\partial_t g(z, t) = -g(z, t) \frac{1 + \kappa(t)g(z, t)}{1 - \kappa(t)g(z, t)}, \quad t > 0,$$

wobei  $\kappa : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \partial D$  stetig ist. Ferner konvergiert  $e^t g(\cdot, t)$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  für  $t \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* vgl. Remmert/Schumacher [8]. □

**Korollar 7.2** *Die Loewner-Kette  $f(\cdot, t)$  genügt der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial_t f(z, t)}{z \partial_z f(z, t)} = \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z}, \quad t > 0, \quad (7.2)$$

mit demselben  $\kappa(t)$  wie zuvor.

*Beweis.* vgl. Remmert/Schumacher [8]. □

**Beispiel 7.3** Ist  $k(z) = z(1 - z)^{-2}$  die Koebe-Funktion, so ist  $t_0 = t_0(k) = 0$  und

$$f(z, t) = e^t k(z) = e^t (z + 2z^2 + \dots)$$

für alle  $t \geq 0$ . Daher ist  $f^{-1}(\zeta, t) = k^{-1}(e^{-t}\zeta)$ , und

$$g(z, t) = k^{-1}(e^{-t}k(z)) =: w(z, t).$$

Die Bezeichnung  $w(z, t)$  für diese spezielle Funktionenfamilie stammt von Weinstein aus seinem Beweis der Bieberbach-Vermutung. Mittels Korollar 7.2 rechnet man schnell nach, dass

$$\frac{\partial_t f(z, t)}{z \partial_z f(z, t)} = \frac{e^t k(z)}{z e^t k'(z)} = \frac{1 - z}{1 + z}, \quad z \in D,$$

d.h.,  $\kappa(t) = -1$  nach (7.2) für alle  $t \geq 0$ . Ferner gilt für die entsprechenden Funktionen  $w(z, t)$  die Differentialgleichung

$$\partial_t w = -\frac{1 - w}{1 + w} w. \quad (7.3)$$

◇

**Satz 7.4 (Loewner, 1923)** *Für  $f \in \mathcal{S}$  mit Taylorkoeffizienten  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gilt immer  $|a_3| \leq 3$ .*

*Beweis.* vgl. Duren [3, Abschnitt 3.5]. □

## 8. Kugelflächenfunktionen

Kugelflächenfunktionen bilden ein (komplexwertiges) in  $C(\mathbb{S}^2)$  dichtes Funktionensystem auf der Einheitssphäre  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Wir beschränken uns im folgenden auf deren Eigenschaften, soweit sie für den Beweis der Bieberbach-Vermutung relevant sind. Durchweg verwenden wir für dreidimensionale Ortsvektoren  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  die übliche Darstellung

$$x_1 = r \cos \varphi \sin \theta, \quad x_2 = r \sin \varphi \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \theta,$$

in Kugelkoordinaten, wobei  $r \geq 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $\theta \in [0, \pi]$ .

Unter Kugelflächenfunktionen versteht man die Restriktion harmonischer homogener Polynome in drei Variablen auf die Einheitssphäre, also Polynome  $q$  in  $x_1, x_2$  und  $x_3$ , deren Summanden alle denselben Grad  $n$  aufweisen und die zudem harmonisch sind, also Lösungen der Laplace-Gleichung  $\Delta q = 0$ . Ein homogenes Polynom  $q$  vom Grad  $n$  hat in Kugelkoordinaten immer die Darstellung

$$q(\mathbf{x}) = r^n Y(\theta, \varphi) \tag{8.1}$$

mit einer geeigneten Funktion  $Y$ , und dieses  $Y$  stellt dann gerade die gesuchte Einschränkung von  $q$  auf  $\mathbb{S}^2$  dar.

**Lemma 8.1** *Der Raum der harmonischen homogenen Polynome vom Grad  $n$  hat die Dimension  $2n + 1$ .*

*Beweis.* Ein harmonisches homogenes Polynom  $q$  vom Grad  $n$  kann in der Form

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n a_{n-k}(x_1, x_2) x_3^k \tag{8.2}$$

mit homogenen Polynomen  $a_{n-k}$  in  $x_1$  und  $x_2$  vom Grad  $n - k$  dargestellt werden. Wir schreiben im folgenden  $\Delta$  für den dreidimensionalen und  $\Delta'$  für den zweidimensionalen Laplace-Operator. Aus  $\Delta q = 0$  folgt dann

$$0 = \sum_{k=0}^{n-2} \Delta' a_{n-k}(x_1, x_2) x_3^k + \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k+2) a_{n-k-2}(x_1, x_2) x_3^k$$

wegen  $\Delta' a_0 = \Delta' a_1 = 0$ , und durch Koeffizientenvergleich ergibt sich hieraus

$$a_{n-k} = -\frac{1}{(k-1)k} \Delta' a_{n-k+2}, \quad k = 2, \dots, n.$$

Folglich sind  $a_n$  und  $a_{n-1}$  frei wählbar und legen dann alle anderen Koeffizientenfunktionen fest. Aufgrund der Homogenität ergeben sich hierfür die linear unabhängigen Möglichkeiten

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= x_1^j x_2^{n-1-j}, & a_n &= 0, & j &= 0, \dots, n-1; \\ a_{n-1} &= 0, & a_n &= x_1^k x_2^{n-k}, & k &= 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Somit hat der Raum die Dimension  $2n+1$ . □

Kugelflächenfunktionen vom Grad  $n=0$  sind zwangsläufig konstant; für  $n=1$  stimmen sie mit den Einschränkungen der linearen Funktionale auf  $\mathbb{S}^2$  überein, werden also durch  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  aufgespannt. Wir konstruieren nun eine Orthonormalbasis aller Kugelflächenfunktionen vom Grad  $n \geq 2$ .

Dazu schreiben wir zunächst

$$x_1 = \frac{r}{2} \sin \theta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{r}{2i} \sin \theta (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

und sehen, dass bei einem Polynom  $q$  vom Grad  $n$  wie in (8.1) die Einschränkung  $Y$  auf  $\mathbb{S}^2$  ein trigonometrisches Polynom in  $\varphi$  vom Grad  $n$  darstellt, also

$$Y(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^n f_m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (8.3)$$

mit gewissen Entwicklungskoeffizienten  $f_m$ , die nur von  $\theta$  bzw.  $\cos \theta$  abhängen. Aus (8.1) folgt zudem nach mühevoller Umrechnung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten die Darstellung

$$\Delta q = \left( \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 Y + n(n+1)Y \right) r^{n-2}.$$

Einsetzen von (8.3) und Substitution von  $x = \cos \theta$  ergibt dann, dass  $q$  aus (8.1), (8.3) genau dann harmonisch ist, wenn alle Koeffizientenfunktionen  $f_m = f_m(x)$ ,  $-n \leq m \leq n$ , die jeweilige gewöhnliche Differentialgleichung

$$(1-x^2)f_m'' - 2xf_m' + (n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2})f_m = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (8.4)$$

erfüllen. Somit ist  $Y$  genau dann eine Kugelflächenfunktion, wenn die Darstellung (8.3) gilt, die Koeffizientenfunktionen  $f_m$  die Differentialgleichungen (8.4) erfüllen und  $q$  aus (8.1), (8.3) ein homogenes Polynom vom Grad  $n$  darstellt.

Für  $m = 0$  ist (8.4) die sogenannte *Legendre-Differentialgleichung*, deren Lösungen die *Legendre-Polynome* sind. Zur Erinnerung: In der Numerik-Grundvorlesung werden die *normierten* Legendre-Polynome  $p_k \in \Pi_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  durch die Rekursion

$$\beta_{k+1}p_{k+1}(x) = xp_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (8.5)$$

definiert, mit  $p_{-1} \equiv 0$  und  $p_0 \equiv 1/\sqrt{2}$  und den Koeffizienten

$$\beta_k = \frac{k}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner wird dort gezeigt, dass diese Polynome eine Orthonormalbasis von  $\Pi$  bzgl.  $L^2(-1, 1)$  bilden.

Anhand der Rekursionsformel kann man sich davon überzeugen, dass die Legendre-Polynome mit der folgenden *erzeugenden Funktion*

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)z^k = H(z, x) := \frac{1}{(1 - 2xz + z^2)^{1/2}} \quad (8.6)$$

für  $-1 < x < 1$  und  $|z| < 1$  in Bezug stehen. In der Tat lässt sich die rechte Seite von (8.6) mit der Binomialreihendarstellung

$$(1 - \zeta)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\zeta + \frac{3}{8}\zeta^2 + \dots, \quad |\zeta| < 1,$$

für  $\zeta = 2xz - z^2$  in eine Potenzreihe in  $z$  entwickeln (für  $x \in (-1, 1)$  und  $|z| < 1$  ist immer auch  $|\zeta| < 1$ ), und man erkennt als erstes, dass die Koeffizienten vor  $z^k$  der resultierenden Reihendarstellung Polynome  $P_k$  in  $x$  vom Grad kleiner gleich  $k$  sind, mit  $P_0 \equiv 1$ . Wegen der Differentialgleichung

$$(1 - 2xz + z^2)\partial_z H(z, x) = \frac{x - z}{(1 - 2xz + z^2)^{1/2}} = (x - z)H(z, x),$$

folgt hieraus

$$(1 - 2xz + z^2) \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(x) z^{k-1} = (x - z) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) z^k,$$

und durch Koeffizientenvergleich erhält man (mit  $P_{-1} \equiv 0$ ) die Rekursion

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (8.7)$$

für die Polynome  $P_k \in \Pi_k$ . Ein Vergleich mit (8.5) ergibt daher den Zusammenhang

$$p_k = \left( \frac{2k+1}{2} \right)^{1/2} P_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Tatsächlich versteht man normalerweise unter den Legendre-Polynomen die Polynome  $P_k$ , nicht  $p_k$ .

Sei nun  $p \in \Pi_{n-1}$  beliebig gewählt und  $P_n$  das  $n$ -te Legendre-Polynom, so ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_{-1}^1 ((1-x^2)P_n')' p \, dx = - \int_{-1}^1 (1-x^2)P_n' p' \, dx = \int_{-1}^1 P_n ((1-x^2)p')' \, dx = 0,$$

da  $P_n$  senkrecht auf  $((1-x^2)p')' \in \Pi_{n-1}$  steht. Folglich steht  $Q = ((1-x^2)P_n')' \in \Pi_n$  senkrecht auf  $\Pi_{n-1}$ , und daher muss  $Q$  ein Vielfaches des Legendre-Polynoms  $P_n$  sein. Mit anderen Worten, es gibt ein  $c \in \mathbb{R}$ , so dass

$$cP_n = ((1-x^2)P_n')' = (1-x^2)P_n'' - 2xP_n'. \quad (8.8)$$

Anhand der Rekursionsformel (8.7) erkennt man unmittelbar, dass  $P_k(1) = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , und mit geringfügig mehr Aufwand, dass

$$P_k'(1) = \frac{1}{2} k(k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Somit ergibt sich durch Einsetzen von  $x = 1$  in (8.8), dass gilt

$$c = -2P_n'(1) = -n(n+1),$$

und durch Vergleich von (8.8) und (8.4) sieht man, dass  $f_0 = P_n$  die Legendre-Differentialgleichung für  $m = 0$  löst.

Da  $P_n$  für gerade  $n$  ein gerades Polynom und für ungerade  $n$  ein ungerades Polynom ist (dies sieht man erneut unmittelbar anhand der Rekursionsformel), ergibt sich für gerade  $n$  eine Darstellung von

$$q(\mathbf{x}) = r^n P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{n/2} \pi_k (r^{2k} \cos^{2k} \theta) r^{2(n/2-k)} = \sum_{k=0}^{n/2} \pi_k x_3^{2k} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{n/2-k}$$

mit gewissen  $\pi_k \in \mathbb{R}$ , also ist  $q$  ein homogenes Polynom vom Grad  $n$ ; für ungerade  $n$  ergibt sich eine analoge Darstellung.

Für allgemeines  $m = 0, \dots, n$  definieren wir die *assozierten Legendre-Funktionen*

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} P_n^{(m)}(x), \quad \text{wobei } P_n^{(m)} = \partial_x^m P_n, \quad (8.9)$$

die für  $m = 0$  gerade mit den Legendre-Polynomen übereinstimmen. Wie zuvor sieht man, dass (für  $-n \leq m \leq n$ )

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= r^n P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} = (r e^{\pm i\varphi} \sin \theta)^{|m|} r^{n-|m|} P_n^{(|m|)}(\cos \theta) \\ &= (x_1 \pm ix_2)^{|m|} r^{n-|m|} P_n^{(|m|)}(\cos \theta) \end{aligned}$$

ein homogenes Polynom vom Grad  $n$  darstellt.

Durch  $m$ -malige Differentiation der Differentialgleichung für die Legendre-Polynome ( $1 \leq m \leq n$ ) ergibt sich eine entsprechende Differentialgleichung für  $P_n^{(m)}$ ,

$$(1 - x^2)P_n^{(m+2)} - 2(m+1)xP_n^{(m+1)} + (n-m)(n-m+1)P_n^{(m)} = 0,$$

und mit Hilfe von (8.9) rechnet man dann nach, dass  $f_m = P_n^m$  für  $1 \leq m \leq n$  die allgemeine Legendre-Differentialgleichung (8.4) löst. Somit haben wir  $2n + 1$  linear unabhängige Kugelflächenfunktionen

$$P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad -n \leq m \leq n,$$

bestimmt, und diese sind paarweise orthogonal bzgl.  $L^2(\mathbb{S}^2)$ , denn für  $m \neq m'$  ist

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{S}^2} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} P_n^{|m'|}(\cos \theta) e^{-im'\varphi} ds \\ &= \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) P_n^{|m'|}(\cos \theta) \left( \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi \right) \sin \theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 8.1 folgt somit das folgende Resultat (im Fall  $n \geq 2$ ).

**Satz 8.2** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für geeignet gewählte  $c_n^{|m|} > 0$  bilden die Funktionen

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = c_n^{|m|} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad -n \leq m \leq n,$$

eine Orthonormalbasis der Kugelflächenfunktionen vom Grad  $n$ .

*Beweis.* Es verbleibt die Bestätigung dieser Aussage für  $n = 0$  und  $n = 1$ . Im Fall  $n = 0$  ist  $Y_0^0 = c_{00}$  wie gewünscht konstant. Wenn  $n = 1$  ist, bestehen die genannten Basisfunktionen aus normierten und paarweise orthogonalen Vielfachen von

$$\sin \theta e^{-i\varphi} = x_1 - ix_2, \quad \cos \theta = x_3 \quad \text{und} \quad \sin \theta e^{i\varphi} = x_1 + ix_2.$$

In beiden Fällen ist die Aussage somit auch richtig. □



Der Vollständigkeit halber ergänzen wir noch, dass die Funktionen  $Y_n^m$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $-n \leq m \leq n$  sogar eine Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{S}^2)$  bilden. Da dieses Resultat für die Bieberbach-Vermutung irrelevant ist, verzichten wir hier auf den Beweis\*. Statt dessen formulieren und beweisen wir noch das sogenannte Additionstheorem.

**Satz 8.3** Für  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{S}^2$  gilt

$$\sum_{m=-n}^n Y_n^m(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{y}})} = (c_n^0)^2 P_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}),$$

wobei  $c_n^0$  der entsprechende Koeffizient aus Satz 8.2 ist.

*Beweis.* Durch eine Koordinatentransformation im  $\mathbb{R}^3$  wird ein homogenes Polynom vom Grad  $n$  wieder in ein homogenes Polynom mit demselben Grad überführt. Ist speziell  $Q$  eine orthogonale Matrix, also eine Abbildung, die  $\mathbb{S}^2$  auf sich selbst abbildet, so ist folglich  $Y_n^m(Q\hat{\mathbf{z}})$  als Funktion von  $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{S}^2$  für jedes  $m \in \{-n, \dots, n\}$  wieder eine Kugelflächenfunktion und damit als Linearkombination der  $Y_n^m$  darstellbar, d.h., es gibt eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{2n+1, 2n+1}$  mit

$$[Y_n^m(Q\hat{\mathbf{z}})]_{m=-n}^n = A [Y_n^m(\hat{\mathbf{z}})]_{m=-n}^n \quad \text{für alle } \hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{S}^2.$$

Durch Anwendung der Substitutionsformel sieht man, dass die so transformierten Basisfunktionen wieder eine Orthonormalbasis bilden, dass also  $A$  eine Orthonormalbasis in eine andere überführt. Also ist die Abbildung  $A$  auch orthogonal, und es folgt, dass

$$Y(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) := \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{y}})} = \sum_{m=-n}^n Y_n^m(Q\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_n^m(Q\hat{\mathbf{y}})},$$

also dass  $Y$  nur von dem Winkel zwischen  $\hat{\mathbf{x}}$  und  $\hat{\mathbf{y}}$ , also von  $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$  abhängt. Zeigt  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{e}_3$  in Richtung der  $z$ -Variablen und ist  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}^2$  beliebig mit Kugelwinkeln  $\theta$  und  $\varphi$ , so ergibt dies

$$Y(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_3) = f(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3) = f(\cos \theta)$$

mit einer geeigneten Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Auf der anderen Seite ist  $Y(\cdot, \mathbf{e}_3)$  eine Kugelflächenfunktion, und ein Koeffizientenvergleich mit (8.3) ergibt, dass  $f = cP_n$ , also ein Vielfaches des Legendre-Polynoms sein muss. Mit  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_3$  folgt dann, dass

$$cP_n(1) = Y(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = \sum_{m=-n}^n (c_n^{|m|} P_n^{|m|}(1))^2 = (c_n^0 P_n(1))^2.$$

Wegen  $P_n(1) = 1$  resultiert hieraus schließlich die Behauptung.  $\square$

---

\*Der Beweis verwendet einerseits den Stone-Weierstrass'schen Approximationssatz, nachdem multivariate Polynome in jedem Kompaktum dicht im Raum der stetigen Funktionen liegen, sowie einen Darstellungssatz für homogene Polynome mittels harmonischer homogener Polynome und Potenzen von  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .

## 9. Weinsteins Funktionen

Die Bieberbach-Vermutung wurde 1984 von de Branges bewiesen; Weinsten präsentierte 1990 einen alternativen Beweis.

Weinsteins betrachtet in seinem Beweis die Funktionen

$$W_m(z, t) = \frac{e^t w^{m+1}}{1 - w^2}, \quad t \geq 0, z \in D, \quad (9.1)$$

für  $m \in \mathbb{N}_0$ , wobei

$$w = w(z, t) = k^{-1}(e^{-t}k(z)) \quad (9.2)$$

der Loewner-Schar  $g$  für die Koebe-Funktion  $k(z) = z(1 - z)^{-2}$ ,  $z \in D$ , entspricht, vgl. Beispiel 7.3.

Mit diesen Funktionen konstruiert Weinsten eine Fourierreihe in einer neuen Variablen  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,

$$\begin{aligned} h(z, t, \varphi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_{|m|}(z, t) e^{im\varphi} = W_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}) W_m \\ &= \frac{e^t w}{1 - w^2} + \frac{e^t w}{1 - w^2} \sum_{m=1}^{\infty} (e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}) w^m \\ &= \frac{e^t w}{1 - w^2} \left( \frac{1}{1 - e^{i\varphi} w} + \frac{1}{1 - e^{-i\varphi} w} - 1 \right) = \frac{e^t w}{1 - 2w \cos \varphi + w^2}. \end{aligned}$$

Aus der Definition (9.2) von  $w$  folgt  $k(w) = e^{-t}k(z)$ , beziehungsweise

$$\frac{(1 - z)^2}{z} = \frac{1}{k(z)} = \frac{e^{-t}}{k(w)} = e^{-t} \frac{(1 - w)^2}{w}. \quad (9.3)$$

Setzt man diese Funktionalgleichung oben ein, so ergibt sich für den Kehrwert von  $h$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(z, t, \varphi)} &= e^{-t} \left( \frac{(1 - w)^2}{w} + 2 - 2 \cos \varphi \right) = \frac{(1 - z)^2}{z} + e^{-t} (2 - 2 \cos \varphi) \\ &= \frac{1 - 2xz + z^2}{z}, \end{aligned}$$

wobei

$$x = x(t, \varphi) = 1 - e^{-t}(1 - \cos \varphi). \quad (9.4)$$

Die erzeugende Fourierreihe hat also die Gestalt

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} W_{|m|}(z, t) e^{im\varphi} = \frac{z}{1 - 2xz + z^2} \quad (9.5)$$

mit  $x = x(t, \varphi)$  aus (9.4).

Unter Verwendung der erzeugenden Funktion der Legendre-Polynome, vgl. (8.6), kann die rechte Seite von (9.5) in eine Potenzreihe in  $z$  entwickelt werden, und wir erhalten so

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} W_{|m|}(z, t) e^{im\varphi} = z \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\nu=0}^n P_\nu(x) P_{n-\nu}(x) \right) z^{n+1}. \quad (9.6)$$

Dabei ist immer noch  $x = x(t, \varphi)$  gemäß (9.4). Die Legendre-Polynome mit diesem Argument können schließlich mit Hilfe des Additionstheorems für Kugelflächenfunktionen wieder in trigonometrische Polynome in  $\varphi$  mit von  $t$  abhängigen Koeffizientenfunktionen entwickelt werden.

**Lemma 9.1** Für  $0 \leq \varphi < 2\pi$  und  $t \geq 0$  sei  $x = x(t, \varphi)$  durch (9.4) definiert. Dann gilt

$$P_\nu(x) = \sum_{m=-\nu}^{\nu} \left( \frac{c_\nu^{|m|}}{c_\nu^0} P_\nu^{|m|}(\sqrt{1 - e^{-t}}) \right)^2 e^{im\varphi}, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

*Beweis.* Da  $x(t, \varphi)$  aus (9.4) im Intervall  $\cos \varphi \leq x \leq 1$  liegt, bestimmt

$$\left( \frac{x - \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right)^{1/2} = (1 - e^{-t})^{1/2} = \cos \theta \quad (9.7)$$

einen eindeutig definierten Winkel  $\theta = \theta(t) \in [0, \pi/2]$ . Die so spezifizierten Kugelwinkel  $\theta$  und  $\varphi$  gehören zu einem Vektor

$$\hat{\mathbf{x}} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \in \mathbb{S}^2.$$

Ferner wählen wir

$$\hat{\mathbf{y}} = (\sin \theta, 0, \cos \theta) \in \mathbb{S}^2.$$

Aus (9.7) und (9.4) folgt dann

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \sin^2 \theta \cos \varphi + \cos^2 \theta = e^{-t} \cos \varphi + 1 - e^{-t} = x,$$

und aus den Sätzen 8.3 und 8.2 ergibt sich

$$P_\nu(x) = \frac{1}{(c_\nu^0)^2} \sum_{m=-\nu}^{\nu} Y_\nu^m(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_\nu^m(\hat{\mathbf{y}})} = \sum_{m=-\nu}^{\nu} \left( \frac{c_\nu^{|m|}}{c_\nu^0} P_\nu^{|m|}(\cos \theta) \right)^2 e^{im\varphi}.$$

Zusammen mit (9.7) folgt somit die Behauptung.  $\square$

Nun können wir die Funktionen  $W_m(z, t)$  in Potenzreihen in  $z \in D$  entwickeln.

**Satz 9.2** Die Funktionen  $W_m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , aus (9.1) sind erzeugende Funktionen

$$W_m(z, t) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \Lambda_n^m(t) z^n, \quad |z| < 1, \quad (9.8)$$

nichtnegativer Koeffizientenfunktionen

$$\Lambda_n^m(t) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Zudem existiert für jedes  $n > m$  eine Abszisse  $t_n^m > 0$ , so dass

$$\Lambda_n^m(t) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < t_n^m. \quad (9.9)$$

*Beweis.* Wir verwenden die Abkürzung

$$\alpha_\nu^m(t) = \left( \frac{c_\nu^{|m|}}{c_\nu^0} P_\nu^{|m|}(\sqrt{1 - e^{-t}}) \right)^2, \quad -\nu \leq m \leq \nu. \quad (9.10)$$

Damit erhalten wir für  $n \in \mathbb{N}_0$  aus Lemma 9.1 eine Entwicklung von

$$\sum_{\nu=0}^n P_\nu(x) P_{n-\nu}(x) = \sum_{\nu=0}^n \left( \sum_{m=-\nu}^{\nu} \alpha_\nu^m(t) e^{im\varphi} \sum_{\mu=-(n-\nu)}^{n-\nu} \alpha_{n-\nu}^\mu(t) e^{i\mu\varphi} \right) = \sum_{m=-n}^n \Lambda_{n+1}^m(t) e^{im\varphi}$$

in ein trigonometrisches Polynom in  $\varphi$  vom Grad  $n$ , wobei sich

$$\Lambda_{n+1}^m = \alpha_n^m \alpha_0^0 + \dots \quad (9.11)$$

als eine endliche Summe nichtnegativer Produkte der Form  $\alpha_\nu^\mu \alpha_{n-\nu}^{m-\mu}$  errechnet. Insbesondere sind alle Funktionen  $\Lambda_n^m$  nichtnegativ. Mit (9.6) gilt dann für  $z \in D$ ,  $t \geq 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  die Reihenentwicklung

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} W_{|m|}(z, t) e^{im\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=-n}^n \Lambda_{n+1}^m(t) e^{im\varphi} \right) z^{n+1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=|m|+1}^{\infty} \Lambda_n^m(t) z^n \right) e^{im\varphi}.$$

Für festes  $z \in D$  und  $t \geq 0$  liegen somit zwei Fourierreihenentwicklungen in  $\varphi \in [0, 2\pi)$  derselben Funktion vor, und daher ergibt sich durch Koeffizientenvergleich die gesuchte Darstellung von

$$W_m(z, t) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \Lambda_n^m(t) z^n, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

als erzeugende Funktion einer nichtnegativen Funktionenfolge.

Um den Zusatz (9.9) zu beweisen, erinnern wir zunächst daran, dass  $\alpha_0^0 = P_0 = 1$  konstant ist, vgl. (9.10), so dass wegen (9.11)

$$\Lambda_{n+1}^m(t) \geq \alpha_n^m(t) \alpha_0^0(t) = \alpha_n^m(t)$$

gilt. Aus (9.10) und (8.9) entnehmen wir ferner für  $m \geq 0$ , dass

$$\alpha_n^m(t) = (1 - t^2)^m \left( \frac{c_n^m}{c_n^0} P_n^{(m)}(\sqrt{1 - e^{-t}}) \right)^2.$$

Da die Nullstellen der Legendre-Polynome alle im offenen Intervall  $(-1, 1)$  liegen, gilt das nach dem Satz von Rolle auch für die Ableitungen  $P_n^{(m)}$ , und daher existiert für jedes  $n \geq m \geq 0$  eine Abszisse  $t_{n+1}^m > 0$ , so dass

$$\Lambda_{n+1}^m(t) \geq \alpha_n^m(t) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < t_{n+1}^m.$$

Wir werden später noch sehen (in Satz 10.2), dass einige Koeffizientenfunktionen  $\Lambda_n^m(t)$  in  $t = 0$  hingegen eine Nullstelle besitzen.  $\square$

## 10. Der Beweis von de Branges

De Branges beweist die Bieberbach-Vermutung über die Vermutung von Milin und Lebedev. Zur Erinnerung: Ist  $f \in \mathcal{S}$  und sind  $d_n$  die logarithmischen Koeffizienten von  $f$ , d.h.

$$\log \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n, \quad |z| < 1,$$

so besagt die Milin-Lebedev Vermutung, dass

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{j} (4 - j^2 |d_j|^2) \geq 0 \quad \text{für alle } n = 2, 3, \dots, \quad (10.1)$$

vgl. Abschnitt 5.

Für festes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  und  $f \in \mathcal{S}'$  betrachtet de Branges die Funktion

$$\sigma_n(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(t) (4 - j^2 |d_j(t)|^2), \quad (10.2)$$

wobei  $d_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , die logarithmischen Koeffizienten von  $e^{-t} f(\cdot, t) \in \mathcal{S}'$  sind,

$$\log \frac{f(z, t)}{e^t z} = \sum_{j=1}^{\infty} d_j(t) z^j;$$

$f(\cdot, t)$  ist dabei wieder die Loewner-Kette von  $f$ . Die Funktionen  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , werden weiter unten in (10.4) spezifiziert; für den Moment nehmen wir lediglich an, dass es sich um differenzierbare Funktionen von  $t \in [0, \infty)$  handelt mit

$$\beta_j(0) = \frac{n-j}{j}, \quad j = 1 \dots, n-1, \quad (10.3)$$

so dass  $\sigma_n(0) = \sigma_n$  gerade die gewichteten Mittel (10.1) sind. De Branges macht nun den folgenden Ansatz für die Funktionenfamilie  $\{\beta_j\}$ .

**Lemma 10.1** Sei  $f \in \mathcal{S}'$  und  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , beliebig, aber fest. Unter der Annahme, dass die  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , das Differentialgleichungssystem

$$\beta'_{j+1} + \beta'_j = (j+1)\beta_{j+1} - j\beta_j \quad (10.4)$$

mit  $\beta_n \equiv 0$  lösen, gilt

$$\sigma'_n(t) = \sum_{j=1}^{n-1} |q_j(\bar{\kappa}(t), t)|^2 \beta'_j(t) \quad (10.5)$$

mit

$$q_j(\zeta, t) = 2 + \sum_{l=1}^{j-1} 2l d_l(t) \zeta^l + j d_j(t) \zeta^j \quad (10.6)$$

und  $\kappa = \kappa(t) \in \partial D$ .

*Beweis.* Durch Auflösen der Rekursion erhalten wir aus (10.4) die Gleichung

$$j\beta_j = -\beta'_j - \sum_{l=j+1}^{n-1} 2\beta'_l.$$

Leiten wir nun (10.2) nach  $t$  ab und ersetzen anschließend  $\beta_j$  durch obige Summe, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma'_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \left( \beta'_j (4 - j^2 |d_j|^2) - \beta_j j^2 \partial_t |d_j|^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (4 - j^2 |d_j|^2 + j \partial_t |d_j|^2) \beta'_j + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n-1} 2\beta'_l k \partial_t |d_k|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (4 - j^2 |d_j|^2 + j \partial_t |d_j|^2) \beta'_j + \sum_{l=2}^{n-1} \left( \sum_{k=1}^{l-1} 2k \partial_t |d_k|^2 \right) \beta'_l \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \left( 4 - j^2 |d_j|^2 + j \partial_t |d_j|^2 + \sum_{k=1}^{j-1} 2k \partial_t |d_k|^2 \right) \beta'_j. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Mit Hilfe der Loewner-Differentialgleichung (7.2) bestimmen wir nun die Ableitungen  $d'_k$  von  $d_k$  und  $\partial_t |d_k|^2$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} d'_k(t) z^k &= \partial_t \log \frac{f(z, t)}{e^t z} = \frac{e^t z}{f(z, t)} \frac{e^t z \partial_t f(z, t) - e^t z f(z, t)}{e^{2t} z^2} \\
&= \frac{\partial_t f(z, t)}{f(z, t)} - 1 = \frac{1 + \kappa(t) z}{1 - \kappa(t) z} \frac{z \partial_z f(z, t)}{f(z, t)} - 1 \\
&= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2\kappa^j z^j\right) \frac{z \partial_z f(z, t)}{f(z, t)} - 1
\end{aligned}$$

mit  $\kappa = \kappa(t) \in \partial D$ . Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k d_k(t) z^k &= z \partial_z \log \frac{f(z, t)}{e^t z} = z \frac{e^t z}{f(z, t)} \frac{e^t z \partial_z f(z, t) - e^t f(z, t)}{e^{2t} z^2} \\
&= \frac{z \partial_z f(z, t)}{f(z, t)} - 1,
\end{aligned}$$

und oben eingesetzt ergibt sich hieraus

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k z^k = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\kappa^k z^k\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} k d_k z^k\right),$$

wobei wir der Einfachheit halber das Argument  $t$  weggelassen haben. Durch Koeffizientenvergleich folgt schließlich

$$d'_k = 2\kappa^k + \sum_{l=1}^{k-1} 2\kappa^{k-l} l d_l + k d_k = \kappa^k \left(2 + \sum_{l=1}^{k-1} 2l d_l \bar{\kappa}^l + k d_k \bar{\kappa}^k\right)$$

für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$ , sowie

$$\partial_t |d_k|^2 = \bar{d}_k \kappa^k \left(2 + \sum_{l=1}^{k-1} 2l d_l \bar{\kappa}^l + k d_k \bar{\kappa}^k\right) + d_k \bar{\kappa}^k \left(2 + \sum_{l=1}^{k-1} 2l \bar{d}_l \kappa^l + k \bar{d}_k \kappa^k\right). \quad (10.8)$$

Summation über  $k$  liefert somit

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{j-1} 2k \partial_t |d_k|^2 + j \partial_t |d_j|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} 2k \bar{d}_k \kappa^k \left(2 + \sum_{l=1}^{k-1} 2l d_l \bar{\kappa}^l + k d_k \bar{\kappa}^k + \sum_{l=k+1}^{j-1} 2l d_l \bar{\kappa}^l + k d_k \bar{\kappa}^k + j d_j \bar{\kappa}^j\right) \\
&\quad + j \bar{d}_j \kappa^j \left(2 + \sum_{l=1}^{j-1} 2l \bar{d}_l \kappa^l + j d_j \bar{\kappa}^j + j d_j \bar{\kappa}^j\right) + 2 \left(\sum_{l=1}^{j-1} 2l d_l \bar{\kappa}^l + j d_j \bar{\kappa}^j\right) \\
&= \left(2 + \sum_{k=1}^{j-1} 2k \bar{d}_k \kappa^k + j \bar{d}_j \kappa^j\right) \left(2 + \sum_{l=1}^{j-1} 2l d_l \bar{\kappa}^l + j d_j \bar{\kappa}^j\right) + j |d_j|^2 - 4,
\end{aligned}$$



und eingesetzt in (10.7) ergibt sich hieraus die Behauptung.  $\square$

Man beachte, dass die Funktionen  $\beta_j$  durch (10.4) und (10.3) eindeutig festgelegt sind: Wegen  $\beta_n \equiv 0$  ergibt sich zunächst

$$\beta_{n-1}(t) = \frac{1}{n-1} e^{-(n-1)t} \quad (10.9)$$

als Lösung des Anfangswertproblems

$$\beta'_{n-1} = -(n-1)\beta_{n-1}, \quad \beta_{n-1}(0) = \frac{1}{n-1},$$

danach lassen sich die Funktionen  $\beta_{n-2}$ ,  $\beta_{n-3}$ , usw., jeweils als (eindeutige) Lösungen der entsprechenden inhomogenen linearen Anfangswertprobleme bestimmen. Durch vollständige Induktion sieht man schnell, dass diese Lösungen die Form

$$\beta_j(t) = \sum_{l=j}^{n-1} \beta_{jl} e^{-lt}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (10.10)$$

haben für gewisse (induktiv berechenbare) Koeffizienten  $\beta_{jl} \in \mathbb{R}$ . Insbesondere gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_j(t) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Eingesetzt in (10.2) folgt hieraus

$$\sigma_n(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

und somit ist hinreichend für  $\sigma_n(0) \geq 0$ , also für den Beweis der Milin-Lebedev-Vermutung für  $f \in \mathcal{S}'$ , dass die Ableitung  $\sigma'_n$  aus (10.5) für alle  $t \geq 0$  nichtpositiv ist. Tatsächlich läßt sich zeigen, dass

$$\beta'_j(t) = -e^{-jt} \sum_{\nu=0}^{n-j-1} P_\nu^{(2j,0)}(1-2e^{-t}), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (10.11)$$

wobei  $P_\nu^{(2j,0)}$  sogenannte Jacobi-Polynome sind, also entsprechend normierte Orthogonalpolynome bzgl. der Gewichtsfunktion(en)

$$\omega(x) = (1-x)^{2j} \quad \text{über} \quad x \in [-1, 1].$$

Mit Hilfe seines Kollegen Walter Gautschi in Purdue und dessen Beziehungen zu Richard Askey fand de Branges schließlich heraus, dass die Positivität der Summe (10.11) der Jacobi-Polynome wenige Jahre zuvor (1976) von Askey und Gasper bewiesen worden war. Damit war der Beweis der Bieberbach-Vermutung erbracht.

Mit Hilfe der Weinstein-Funktionen läßt sich dieses letzte Beweisglied wie folgt ersetzen\*.

**Satz 10.2** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , fest gewählt. Dann stimmen die Ableitungen der de Branges-Funktionen  $\beta_j$  aus (10.4), (10.3) mit den Weinstein-Koeffizienten  $\Lambda_n^m$  aus (9.8) überein:

$$\beta_j' = -\Lambda_{n-1}^j, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (10.12)$$

*Beweis.* Einsetzen von (9.3) in (9.8) ergibt

$$W_m(z, t) = k(z)w^m \frac{1-w}{1+w}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad (10.13)$$

und weiter

$$W_j + W_{j+1} = (1+w)W_j = k(z)w^j - k(z)w^{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Differentiation nach  $t$  ergibt daher zusammen mit (7.3) und (10.13)

$$\begin{aligned} \partial_t W_j + \partial_t W_{j+1} &= \left( jk(z)w^{j-1} - (j+1)k(z)w^j \right) \partial_t w \\ &= - \left( jk(z)w^{j-1} - (j+1)k(z)w^j \right) w \frac{1-w}{1+w} \\ &= (j+1)W_{j+1} - jW_j. \end{aligned}$$

Aus (9.8) folgt dann durch Koeffizientenvergleich die Differentialgleichung

$$\partial_t \Lambda_n^j + \partial_t \Lambda_n^{j+1} = (j+1)\Lambda_n^{j+1} - j\Lambda_n^j, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

für die Koeffizienten  $\Lambda_n^j$  von Weinstein, wenn man  $\Lambda_n^n$  entsprechend identisch Null setzt. Somit erfüllen die Funktionensysteme  $\{\Lambda_n^j\}$ ,  $\{-\Lambda_n^j\}$  und  $\{\beta_j\}$ , jeweils mit  $j = 1, \dots, n$ , dasselbe Differentialgleichungssystem, vgl. (10.4). Durch Differentiation von (10.4) sieht man ferner, dass auch  $\{\beta_j'\}$  eine Lösung dieses Systems ist.

Die Behauptung (10.12) wird nun induktiv bewiesen, indem wir zeigen, dass die Anfangswerte

$$\beta_j'(0) = -\Lambda_n^j(0), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (10.14)$$

übereinstimmen. Die Anfangswerte von  $\Lambda_n^j$  ergeben sich unmittelbar aus (9.8) und  $w(z, 0) = z$ : wegen

---

\*Diese Beobachtung wurde von Koepf und Schmersau (1990) ausgearbeitet.

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} \Lambda_n^j(0) z^n = W_j(z, 0) = \frac{z^{j+1}}{1-z^2} = z^{j+1} + z^{j+3} + z^{j+5} + \dots$$

ist

$$-\Lambda_n^j(0) = \begin{cases} -1, & n-j \text{ ungerade,} \\ 0, & n-j \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Anfangswerte für  $\beta_j'(0)$  folgen ihrerseits aus (10.4), (10.3): Demnach ist

$$\beta_j'(0) = (j+1) \frac{n-j-1}{j+1} - j \frac{n-j}{j} - \beta_{j+1}'(0) = -\beta_{j+1}'(0) - 1$$

für  $j = 1, \dots, n-2$ , und wegen  $\beta_{n-1}'(0) = -1$ , vgl. (10.9), ergibt sich induktiv ebenfalls

$$\beta_j'(0) = \begin{cases} -1, & n-j \text{ ungerade,} \\ 0, & n-j \text{ gerade.} \end{cases}$$

Somit ist (10.14) und damit die Behauptung (10.12) vollständig bewiesen. □

**Korollar 10.3** *Für  $f \in \mathcal{S}'$  gilt die Milin-Lebedev-Vermutung, wobei*

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{\infty} |q_m(\overline{\kappa(t)}, t)|^2 \Lambda_n^m(t) dt, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (10.15)$$

mit den nichtnegativen Funktionen  $\Lambda_n^m$  aus (9.8). Da  $\mathcal{S}'$  in  $\mathcal{S}$  dicht liegt (vgl. Abschnitt 6), ist die Milin-Lebedev Vermutung und damit auch die Bieberbach-Vermutung vollständig bewiesen.

Es verbleibt noch der Zusatz zu klären, dass sofern bei einem einzigen Taylorkoeffizienten  $a_n$  von  $f \in \mathcal{S}$  die Bieberbach-Schranke  $|a_n| = n$  angenommen wird, die Funktion  $f$  eine Rotation

$$f(z) = k_{\theta}(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta}z)^2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (10.16)$$

der Koebe-Funktion sein muss.

**Satz 10.4** *Sei  $\mathcal{S}(\alpha)$  die Menge aller  $f \in \mathcal{S}$ , deren zweiter Taylorkoeffizient durch  $\alpha < 2$  beschränkt ist. Dann existiert eine Folge  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  mit  $0 < \alpha_n < n$ , so dass für alle*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in \mathcal{S}(\alpha)$$

die Ungleichung

$$|a_n| \leq \alpha_n, \quad n = 2, 3, \dots,$$

richtig ist.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst eine Schlitzabbildung  $f \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}(\alpha)$  mit Taylorkoeffizienten  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\log \frac{f(z)}{z} = \log(1 + a_2 z + \dots) = a_2 z \mp \dots,$$

so dass der erste logarithmische Koeffizient  $d_1$  von  $f$  mit  $a_2$  übereinstimmt. Wir greifen neuerlich auf die Loewner-Kette  $f(z, t)$  und den ersten logarithmischen Koeffizienten  $d_1(t)$  von  $e^{-t} f(\cdot, t)$  zurück. Für  $t = 0$  ist

$$d_1(0) = d_1 = a_2, \quad (10.17)$$

und wegen (10.8) gilt

$$\partial_t |d_1(t)|^2 \leq 4|d_1(t)| + 2|d_1(t)|^2. \quad (10.18)$$

Sei nun  $t_0^*$  die kleinste Abszisse, für die

$$|d_1(t_0^*)| = \frac{1}{2}(\alpha + 2).$$

Wegen (10.17) ist  $t_0^* > 0$  und  $|d_1(t)| < (\alpha + 2)/2$  für  $t < t_0^*$ , und nach dem Mittelwertsatz und (10.18) existiert ein  $\tau \in (0, t_0^*)$  mit

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{4}(\alpha + 2)^2 - \alpha^2 &\leq |d_1(t_0^*)|^2 - |d_1(0)|^2 = t_0^* \partial_t |d_1(t)|^2 \Big|_{t=\tau} \\ &\leq t_0^*(4|d_1(\tau)| + 2|d_1(\tau)|^2) \leq 16t_0^*. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$|d_1(t)| \leq \frac{\alpha}{2} + 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq t_0 := \frac{4 + 4\alpha - 3\alpha^2}{64} \leq t_0^*, \quad (10.19)$$

und nach (10.6),

$$|q_1(\overline{\kappa(t)}, t)|^2 \geq (2 - |d_1(t)|)^2 \geq (1 - \alpha/2)^2 > 0, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Man beachte, dass diese Schlussfolgerungen auch dann richtig sind, wenn  $d_1(t)$  immer unterhalb von  $(\alpha + 2)/2$  bleibt, also keine entsprechende Abszisse  $t_0^*$  existiert.

Aus Satz 9.2 wissen wir, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  weitere Abszissen  $t_n^1 > 0$  existieren, so dass

$$\Lambda_n^1(t) > 0, \quad 0 < t < t_n^1.$$

O.B.d.A. schränken wir diese im weiteren durch  $t_n^1 \leq t_0$  ein. Eingesetzt in (10.15) erhalten wir somit wegen der Nichtnegativität aller  $\Lambda_n^m$  für  $n = 2, 3, \dots$  die Abschätzung

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^\infty |q_m(\overline{\kappa(t)}, t)|^2 \Lambda_n^m(t) dt \geq (1 - \alpha/2)^2 \int_0^{t_n^1} \Lambda_n^1(t) dt =: \sigma_n^* > 0.$$

Wie wir in Abschnitt 5 gesehen haben, vgl. (5.8) in Satz 5.5, gilt für die Taylorkoeffizienten von  $f$  die Abschätzung

$$|a_n| \leq n e^{-\sigma_n/(4n)}, \quad (10.20)$$

also folgt die gewünschte Behauptung mit  $\alpha_n = n e^{-\sigma_n^*/(4n)} < n$ .

Sei nun  $f \in \mathcal{S}(\alpha)$  beliebig gewählt. Dann existiert eine Folge  $(f_j) \subset \mathcal{S}'$  von Schlitzabbildungen, die in  $D$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren. Insbesondere konvergieren die Taylorkoeffizienten von  $f_j$  gegen jene von  $f$ , so dass  $f_j \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}(\alpha)$  für hinreichend große  $j \in \mathbb{N}$ . Wie bereits gezeigt, gilt dann für den  $n$ -ten Taylorkoeffizienten  $a_n^j$  von  $f_j \in \mathcal{S}(\alpha)$  die obere Schranke (10.20); Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz von  $f_j$  gegen  $f$  überträgt sich diese Ungleichung somit auch auf den Taylorkoeffizienten  $a_n$  von  $f$ . Damit ist der Satz vollständig bewiesen.  $\square$

**Korollar 10.5** *Gilt  $|a_n| = n$  für einen Taylorkoeffizienten von  $f \in \mathcal{S}$ , so ist  $f$  eine Rotation (10.16) der Koebe-Funktion.*

*Beweis.* Ist  $f \in \mathcal{S}$  keine Rotation der Koebe-Funktion, so ist nach dem Satz 1.3 von Bieberbach der zweite Taylorkoeffizient von  $f$  echt kleiner als zwei betragsmäßig. Also gehört  $f$  zu  $\mathcal{S}(\alpha)$  für ein  $\alpha < 2$ . Nach Satz 10.4 ist dann  $|a_n|$  echt kleiner als  $n$ , und zwar für jedes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Damit ist das Korollar bewiesen.  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [1] L.V. AHLFORS, Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] D. COLTON UND R. KRESS, Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, 3rd edition, Springer, New York, 2013.
- [3] P.L. DUREN, Univalent Functions, Springer, New York, 1983.
- [4] S. GONG, The Bieberbach Conjecture, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [5] W.K. HAYMAN, Multivalent Functions, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [6] W. KOEPF UND D. SCHMERSAU, *On the de Branges theorem*, Complex Variables, Theory and Application **31** (1996), S. 213–230.
- [7] J. KOREVAAR, *Ludwig Bieberbach's conjecture and its proof by Louis de Branges*, Amer. Math. Monthly **93** (1986), S. 505–514.
- [8] R. REMMERT UND G. SCHUMACHER, Funktionentheorie 2, 3. Auflage, Springer, Berlin, 2007.