
MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN
DER
IMPEDANZTOMOGRAPHIE

PROF. DR. M. HANKE-BOURGEOIS

Johannes Gutenberg-Universität

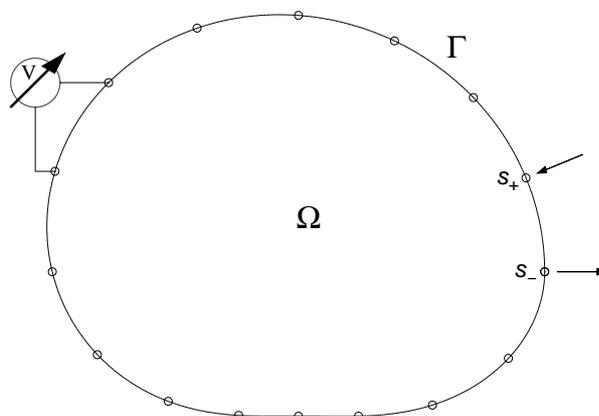
SS 2004

Table of Contents

1	Elektrische Impedanztomographie	2
2	Harmonische Funktionen	7
3	Ein Modellproblem	14
4	Der Raum $H_{\diamond}^1(\Omega)$	19
5	Das Minimierungsproblem	27
6	Der Neumann-to-Dirichlet Operator	32
7	Identifizierbarkeit harmonischer Leitfähigkeiten	38
8	Identifizierbarkeit von Isolatoren	42
9	Zur Instabilität von EIT	49
10	Die Faktorisierungsmethode: Theoretische Grundlagen	54
11	Die Faktorisierungsmethode: Algorithmische Umsetzung	58

1. Elektrische Impedanztomographie

Elektrische Impedanztomographie (kurz EIT) ist eine neuartige Tomographiemethode aus der Medizin. Ziel ist die Darstellung des Leitfähigkeitskoeffizienten im Innern des Körpers anhand von Randmessungen.



Der “Versuchsaufbau” ist wie folgt. Auf dem Rand Γ des Körpers Ω werden p Elektroden befestigt. In p einzelnen Versuchen wird reihum durch jeweils zwei benachbarte Elektroden Strom in den Körper geschickt, bzw. abgezapft. Dabei ergibt sich ein elektrisches Feld E , bzw. ein Potential U (“Spannung”), welches am Rand Γ – also an den p Elektroden – abgegriffen werden kann. Auf diese Weise erhält man somit p Datensätze: einer für jeden Versuch mit jeweils p Meßwerten (einer je Elektrode).

Wie hängen diese Meßwerte mit der Leitfähigkeit $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen? Das physikalische Modell liefert das Ohm’sche Gesetz, nachdem der Strom J und das elektrische Feld E wie folgt gekoppelt sind:

$$J = \sigma E . \quad (\text{Ohm'sches Gesetz})$$

Dabei ist der positive Leitfähigkeitskoeffizient σ der Kehrwert des Widerstands. J und E sind vektorwertige Funktionen; das elektrische Feld ist der negative Gradient des Potentials U , also ein Gradientenfeld. Nach dem Ohm’schen Gesetz fließt der Strom in

die Richtung des steilsten Abfalls des Potentials; je größer die Leitfähigkeit ist, desto stärker ist der fließende Strom.

Von entscheidender Bedeutung ist im folgenden der Begriff der *Leistung* (Arbeit pro Zeiteinheit). Die Leistung ist gegeben durch das Skalarprodukt von Kraft mit Geschwindigkeitsvektor, also in unserem Fall $J \cdot E$. Integration über Ω ergibt die Leistungskomponente

$$P_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\text{grad } U|^2 dx.$$

Dieser Teil der Leistung ist immer positiv. Darüberhinaus fließt noch ein Strom J_0 zwischen den beiden Elektroden von s_- nach $s_+ \in \Gamma$ außerhalb von Ω . Dies ergibt die zweite Leistungskomponente

$$P_2 = |J_0| (U(s_-) - U(s_+));$$

ist das Potential in s_+ größer, dann ist dieser Anteil der Leistung negativ.

Die Gesamtleistung des Systems ergibt sich aus der Summe der beiden Komponenten

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\text{grad } U|^2 dx + |J_0| (U(s_-) - U(s_+)). \quad (1.1)$$

Bei einem festen Zeitintervall der Länge T ergibt sich somit die Energie $W = PT$, die von der Batterie in diesem Zeitintervall aufgebracht werden muß.

Aufgrund üblicher physikalischer Annahmen (*Prinzip der geringsten Arbeit*) richtet sich in diesem Experiment dasjenige elektrische Feld aus, für das die Gesamtenergie minimiert wird. Nach Normierung des Randstroms J_0 zu eins und Übergang zu dimensionslosen Größen führt das auf das Funktional

$$\Phi[u] := \frac{1}{2} a(u, u) - \ell(u) \quad (1.2)$$

mit

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sigma \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx, \quad \ell(u) := u(s_+) - u(s_-), \quad (1.3)$$

welches zu minimieren ist. Die Potentialfunktion u ist also die Lösung des Minimierungsproblems

$$\Phi[u] \longrightarrow \min. \quad (1.4)$$

Natürlich ergeben sich unmittelbar eine Reihe wichtiger Fragen: Bezüglich welcher Grundmenge $u \in \mathcal{X}$ wird $\Phi[u]$ minimiert? Existiert überhaupt das Infimum, und wenn ja, wird es angenommen? Diese Fragen werden wir leider erst in Kapitel 5 zufriedenstellend beantworten können. Vorwegnehmen wollen wir hier lediglich, daß \mathcal{X} ein linearer Raum sein soll. Dies paßt gut zu den grundlegenden Eigenschaften der

Funktionen a und b aus (1.3): $a(u, v)$ ist nämlich eine Bilinearform in u und v , und $\ell(u)$ ein lineares Funktional auf \mathcal{X} .

Nehmen wir für den Moment an, daß Φ an der Stelle $u \in \mathcal{X}$ ein lokales Minimum besitzt; dann folgt aus der erwähnten Linearität für ein beliebiges Element $v \in \mathcal{X}$ und für $t \in \mathbb{R}$ hinreichend nahe bei 0:

$$\begin{aligned}\Phi[u] &\leq \Phi[u + tv] = \frac{1}{2}a(u, u) + ta(u, v) + \frac{1}{2}t^2a(v, v) - \ell(u) - t\ell(v) \\ &= \Phi[u] + t(a(u, v) - \ell(v)) + \frac{1}{2}t^2a(v, v) \\ &=: p(t).\end{aligned}$$

Das quadratische Polynom p hat also in $t = 0$ ein globales Minimum, und es folgt zwangsläufig $0 = p'(0) = a(u, v) - \ell(v)$. Mit anderen Worten: Ist u ein lokales Minimum von Φ in \mathcal{X} , dann gilt

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}. \quad (1.5)$$

Da v in \mathcal{X} "variiert", bezeichnet man (1.5) als *Variationsgleichung* für $u \in \mathcal{X}$.

Wir wollen nun umgekehrt annehmen, daß u eine Lösung dieser Variationsgleichung sei und betrachten den Ausdruck

$$\begin{aligned}\Phi[v] - \Phi[u] &= \frac{1}{2}a(v, v) - \frac{1}{2}a(u, u) - \ell(v) + \ell(u) \\ &= \frac{1}{2}a(v - u, v - u) - a(u, v) - a(u, u) - \ell(v) + \ell(u).\end{aligned}$$

Aufgrund der Variationsgleichung (1.5) ergänzen sich die hinteren vier Terme zu Null und es verbleibt

$$\Phi[v] - \Phi[u] = \frac{1}{2}a(v - u, v - u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\text{grad}(v - u)|^2 dx \geq 0,$$

d.h. u ist eine Minimalstelle von Φ und v ist genau dann eine weitere Minimalstelle von Φ , wenn $v - u$ in Ω konstant ist.

Bemerkung 1.1 Die Gleichung (1.5) ist vor allem für die Numerik interessant: Wählt man etwa einen endlichdimensionalen Teilraum $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$, so bietet es sich an, das Funktional Φ statt über \mathcal{X} lediglich über \mathcal{X}_n zu minimieren. In diesem Fall genügt die Approximation $u_n \in \mathcal{X}_n$ den Gleichungen (1.5) zumindest noch für alle $v \in \mathcal{X}_n$. Repräsentiert man nun \mathcal{X}_n durch eine Basis $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, dann ergibt sich aus (1.5) ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten in der Darstellung $u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k$, nämlich

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k a(\psi_k, \psi_j) = \ell(\psi_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Die Matrix $A = [a(\psi_j, \psi_k)]_{jk}$ wird *Steifigkeitsmatrix* genannt.

Zurück zu (1.5), wobei wir nun ergänzend noch annehmen wollen, daß das Gebiet Ω , sowie die Funktionen σ und u hinreichend glatt seien. Durch *partielle Integration*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) dx &= \int_{\Gamma} \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u dx \\ &= \int_{\Gamma} \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - a(u, v) \end{aligned} \quad (1.7)$$

ergibt sich

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) dx = \int_{\Gamma} \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \ell(v) = \int_{\Gamma} \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + v(s_-) - v(s_+). \quad (1.8)$$

Wählt man schließlich in geschickter Weise für v Funktionen, die in Randnähe verschwinden und in $\Omega' \subset \Omega$ die Funktion $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u)$ approximieren, so erkennt man, daß notwendig

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Wieder eingesetzt in (1.8) folgt weiter, daß

$$\int_{\Gamma} \sigma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = v(s_+) - v(s_-)$$

für alle $v \in \mathcal{X}$, also formal

$$\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)(s) = \delta(s - s_+) - \delta(s - s_-).$$

δ bezeichnet hierbei die *Delta-Distribution*.

Falls die obigen Umformungen also allesamt zulässig sind (d.h. im wesentlichen, falls u hinreichend glatt ist), dann löst u die partielle Differentialgleichung (Randwertaufgabe)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) &= \delta(s - s_+) - \delta(s - s_-) && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ist umgekehrt u eine glatte Lösung von (1.9), dann löst u auch das Minimierungsproblem (1.4). Dies ergibt sich durch Einsetzen von (1.9) in (1.7): Daraus folgt nämlich die Gültigkeit von (1.5), was äquivalent zu (1.4) ist.

Über die Existenz von Minimalstellen bzw. die Existenz von Lösungen von (1.9) haben wir bislang noch nichts ausgesagt. Auf diesen Punkt kommen wir in Kapitel 5 zurück.

Bemerkung 1.2 Wie wir bereits diskutiert haben, ist die Lösung von (1.9) wie die von (1.4) im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Das sieht man unmittelbar daran, daß mit u auch jede Verschiebung $u + c$ (c konstant) eine Lösung von (1.9) darstellt. Diese (triviale) Mehrdeutigkeit kann man jedoch leicht ausschließen, indem man von der Lösungsfunktion noch zusätzlich fordert, daß

$$\int_{\Gamma} u \, ds = 0.$$

Dies werden wir durch eine geeignete Wahl von \mathcal{X} garantieren.

Bemerkung 1.3 Die Voraussetzungen an die Glattheit von σ und u in diesem Resultat lassen sich für die oben gegebene Beweisskizze noch etwas abschwächen; allerdings ist das für uns nicht von Interesse, da wir später ohnehin einen deutlich allgemeineren Lösungsbegriff einführen werden. Man spricht nämlich von einer “schwachen Lösung” u von (1.9), falls u lediglich das Minimierungsproblem (1.4) löst, aber beispielsweise noch nicht einmal in ganz Ω differenzierbar ist. Umgekehrt wird eine Funktion u “starke Lösung” von (1.9) genannt, falls u in Ω zweimal stetig differenzierbar ist, und der Gradient von u stetig auf den Rand Γ fortgesetzt werden kann. Schwache Lösungen sind durchaus physikalisch sinnvoll: So werden wir beispielsweise in Satz ?? sehen, daß die Ableitung der Lösung u von (1.4) Sprünge aufweist an Stellen, an denen auch die Leitfähigkeit sich sprunghaft ändert, etwa an Grenzschichten zweier unterschiedlicher Medien. Dies ist physikalisch notwendig, da auf Grund von Flußerhaltungssätzen garantiert werden muß, daß in der Nähe von Grenzschichten der elektrische Fluß stetig ist.

2. Harmonische Funktionen

Es gibt einen wichtigen Spezialfall, für den man die Gleichung (1.9) explizit lösen kann, nämlich für $\sigma \equiv 1$ im Einheitskreis. Für $\sigma \equiv 1$ entspricht $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = \Delta u$ dem *Laplace-Operator*, und Lösungen von $\Delta u = 0$ werden *harmonische Funktionen* genannt.

Identifizieren wir das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit dem komplexen Gebiet, das sich bei der Variablensubstitution $z = \xi + i\eta$ ergibt und ist $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit Realteil u und Imaginärteil v , also

$$f(z) = u(\xi, \eta) + i v(\xi, \eta), \quad z = \xi + i\eta, \quad (2.1)$$

dann gelten bekanntlich die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

$$u_\xi = v_\eta, \quad u_\eta = -v_\xi$$

in Ω . Hieraus folgt unmittelbar, daß sowohl u als auch v harmonische Funktionen in Ω sind:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = v_{\eta\xi} - v_{\xi\eta} = 0, \\ \Delta v &= v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = -u_{\eta\xi} + u_{\xi\eta} = 0. \end{aligned}$$

Auf diese Weise können wir etwa die wichtigen Beispiele

$$u_n(r \cos \theta, r \sin \theta) = \operatorname{Re} z^n = r^n \cos(n\theta)$$

und

$$v_n(r \cos \theta, r \sin \theta) = \operatorname{Im} z^n = r^n \sin(n\theta)$$

konstruieren sowie die Funktionen

$$u_{-n}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \operatorname{Re} z^{-n} = r^{-n} \cos(n\theta)$$

und

$$v_{-n}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \operatorname{Im} (-z^{-n}) = r^{-n} \sin(n\theta),$$

die jeweils nur für $r > 0$ harmonisch sind.

Von entscheidender Bedeutung für die Untersuchung harmonischer Funktionen ist die sogenannte Grundlösung

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|} \quad (2.2)$$

der Laplace-Gleichung und das folgende Resultat:

Satz 2.1 Die Grundlösung $G(x, y)$ ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ eine harmonische Funktion von x und in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ eine harmonische Funktion von y .

Beweis. Wir fassen zunächst G für festes y als Funktion von x auf und bilden den entsprechenden Gradienten von G , nämlich

$$\text{grad } G = -\frac{1}{2\pi} \frac{x - y}{|x - y|^2}. \quad (2.3)$$

Hieraus errechnet sich die Hesse-Matrix

$$G'' = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x - y|^4} \left(|x - y|^2 I - 2(x - y)(x - y)^T \right)$$

der zweiten Ableitungen von G , wobei I die 2×2 -Einheitsmatrix bezeichnet und $x - y$ als Spaltenvektor aufgefaßt wird. Die Umformungen sind natürlich nur gültig, solange der Nenner nicht verschwindet, also nur für $x \neq y$. Der Laplace-Operator ΔG entspricht der Spur dieser Hesse-Matrix und somit folgt

$$\Delta G = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x - y|^4} \left(2|x - y|^2 - 2|x - y|^2 \right) = 0.$$

Für die Bestimmung der y -Ableitungen müssen wir wegen $G(x, y) = G(y, x)$ in den obigen Ergebnissen lediglich die Rollen von x und y vertauschen. Das ergibt letztendlich das umgekehrte Vorzeichen beim Gradienten und die identische Formel für G'' und ΔG . \square

Physikalisch entspricht die Grundlösung dem elektrostatischen Potential u im gesamten Raum \mathbb{R}^2 , daß durch eine Punktladung im Punkt y erzeugt wird, also der Lösung

$$-\Delta u = \delta(x - y).$$

Wir beweisen als nächstes die *Greensche Formel*:

Satz 2.2 Die Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sei harmonisch in Ω . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)G(x, s) - u(s)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}G(x, s) \right) ds(y) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Dabei beziehen sich sowohl das Randintegral als auch die Richtungsableitung der Fundamentallösung jeweils auf die y -Variablen.

Beweis. Wir beginnen mit $x \notin \overline{\Omega}$. In diesem Fall sind sowohl u als auch $G(x, \cdot)$ harmonisch in Ω und die Behauptung folgt durch eine einfache partielle Integration:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\Delta u(y)G(x, y) - u(y)\Delta_y G(x, y)) dy \\ &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)G(x, s) - u(s)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}G(x, s) \right) ds \\ &\quad - \int_{\Omega} (\text{grad } u(y) \cdot \text{grad } G(x, y) - \text{grad } u(y) \cdot \text{grad } G(x, y)) dy \\ &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)G(x, s) - u(s)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}G(x, s) \right) ds, . \end{aligned}$$

Sei nun $x \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt. Dann betrachten wir die abgeschlossene Kreisscheibe

$$K_{\varepsilon} = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| \leq \varepsilon\}$$

um x und wählen ε so klein, daß K_{ε} vollständig in Ω enthalten ist und wenden das Argument aus dem ersten Teil des Beweises auf das Gebiet $\Omega \setminus K_{\varepsilon}$ an:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega \setminus K_{\varepsilon}} (\Delta u(y)G(x, y) - u(y)\Delta_y G(x, y)) dy \\ &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)G(x, s) - u(s)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}G(x, s) \right) ds \\ &\quad + \int_{|y-x|=\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)G(x, s) - u(s)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}G(x, s) \right) ds \\ &\quad - \int_{\Omega \setminus K_{\varepsilon}} (\text{grad } u(y) \cdot \text{grad } G(x, y) - \text{grad } u(y) \cdot \text{grad } G(x, y)) dy \\ &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)G(x, s) - u(s)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}G(x, s) \right) ds \\ &\quad + \int_{|y-x|=\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)G(x, s) - u(s)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}G(x, s) \right) ds. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun, daß auf der Kreislinie $|y - x| = \varepsilon$ die äußere Normale durch $\nu(y) = (x - y)/\varepsilon$ gegeben ist. Somit vereinfachen sich die Grundlösung und ihre Normalenableitung dort zu

$$G(x, s) = \frac{1}{2\pi} \log(1/\varepsilon) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \nu(y)}G(x, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x - s) \cdot \nu(s)}{|x - s|^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}. \quad (2.4)$$

Oben eingesetzt ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) G(x, s) - u(s) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} G(x, s) \right) ds \\ = -\frac{1}{2\pi} \log(1/\varepsilon) \int_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) ds + \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{|y-x|=\varepsilon} u(s) ds. \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet der erste Term der letzten Zeile, da der Betrag der Normalenableitung von u durch die Norm des Gradienten und somit global beschränkt ist und der Integrationsweg wie $O(\varepsilon)$ gegen Null geht. Der zweite Term konvergiert hingegen für $\varepsilon \rightarrow 0$ wegen des Mittelwertsatzes der Integralrechnung gegen $u(x)$. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Wir benötigen noch eine weitere wichtige Eigenschaft harmonischer Funktionen, die uns in modifizierter Form später auch noch in der Impedanztomographie begegnen wird.

Lemma 2.3 *Liegt $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und ist dort harmonisch, so gilt*

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0.$$

Beweis. Der Beweis folgt wieder durch partielle Integration: Wir setzen $v \equiv 1$ in Ω und erhalten unmittelbar

$$0 = \int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int_{\Gamma} \text{grad } v \cdot \text{grad } u dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$$

\square

Harmonische Funktionen erben einige Eigenschaften holomorpher Funktionen: Beispielsweise ist eine harmonische Funktion u selber wieder analytisch bezüglich der Variablen $\zeta = \xi + i\eta$ (vgl. Lemma 8.1). Außerdem sind harmonische Funktionen automatisch unendlich oft differenzierbar; dies folgt aus der Greenschen Formel durch Vertauschung von Integration und Differentiation. Schließlich gilt ein Maximum-/Minimumprinzip, wie wir nun herleiten wollen. Wir beginnen mit der folgenden Mittelwertigkeit:

Satz 2.4 *Die Funktion u sei harmonisch in einer offenen Kreisscheibe $K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| = r\}$ mit Radius r um x und stetig auf $\overline{K_r(x)}$. Dann gilt*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y-x|=r} u(s) ds.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst eine kleinere Kreisscheibe $K_\rho(x)$ um x mit einem $0 < \rho < r$. In $\Omega = K_\rho(x)$ ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und somit gilt die Greensche Formel, die sich in diesem Fall stark vereinfacht (vgl. (2.4), lediglich das Vorzeichen des Normalenvektors muß geändert werden),

$$u(x) = \frac{\log(1/\rho)}{2\pi} \int_{|y-x|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) ds + \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|y-x|=\rho} u(s) ds.$$

Nach Lemma 2.3 verschwindet das erste Integral und somit folgt die Behauptung durch Grenzübergang $\rho \rightarrow r$. \square

Satz 2.5 *Eine harmonische Funktion u in einem Gebiet Ω nimmt dort nur dann ihr Maximum bzw. Minimum an, wenn sie konstant ist.*

Beweis. Da mit u auch $-u$ harmonisch ist, reicht es, die Behauptung für das Maximum zu beweisen. Sei also

$$M := \sup_{x \in \Omega} u(x)$$

und $D \subset \Omega$ sei die Menge aller Punkte $x \in \Omega$ mit $u(x) = M$. Wir nehmen nun an, daß das Maximum in Ω angenommen wird, also daß D nicht leer ist. Aufgrund der Stetigkeit von u ist D relativ abgeschlossen in Ω , d.h. jeder Häufungspunkt von D , der zu Ω gehört, liegt ebenfalls in D . Ist nun x irgend ein Element von D , so folgt aus der Mittelwerteigenschaft, daß u auf allen konzentrischen Kreislinien um x , die vollständig in Ω verlaufen, konstant gleich M sein muß, d.h. es gibt eine ganze offene Umgebung um x , in der $u \equiv M$ gilt. Demnach ist D also auch relativ offen in Ω und somit ist $D = \Omega$, was zu zeigen war. \square

Korollar 2.6 *Sind u und v zwei harmonische Funktionen auf Ω mit gleichen Randwerten auf Γ , so gilt $u \equiv v$ in Ω .*

Beweis. Mit u und v ist auch $u - v$ harmonisch in Ω und hat verschwindende Randwerte auf Γ . Nach dem Maximum-/Minimumprinzip ist $u - v$ entweder konstant, oder es nimmt sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand Γ an. In letzterem Fall sind sowohl Maximum als auch Minimum gleich Null, d.h. $u - v \equiv 0$. In ersterem Fall hingegen ist $u - v$ konstant in $\overline{\Omega}$ und der Wert der Konstanten entspricht dem Randwert Null auf Γ . Also ist auch in diesem Fall $u - v \equiv 0$. \square

Hiernach stellt sich die Frage, ob u explizit aus seinen Randwerten berechenbar ist. Im allgemeinen ist dies nicht der Fall, aber für den Einheitskreis ist eine entsprechende Formel bekannt, die *Poisson-Integraldarstellung*, vgl. Satz 2.8. Bevor wir uns dieser Formel zuwenden, führen wir allerdings erst noch das Konzept der *Spiegelung* ein.

Für $y = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ mit $r > 0$ definieren wir den *Spiegelpunkt*

$$y^* = \frac{y}{r^2} = \frac{(\cos \varphi, \sin \varphi)}{r} \quad (2.5)$$

am Einheitskreisrand und beachten, daß für jedes x auf dem Einheitskreisrand

$$|y^* - x| = \frac{|y/r - rx|}{r} = \frac{(1 - 2x \cdot y + r^2)^{1/2}}{r} = \frac{|y - x|}{r} \quad (2.6)$$

gilt.

Lemma 2.7 *Liegt $y \neq 0$ im Einheitskreis und ist y^* der Spiegelpunkt (2.5) von y am Einheitskreisrand, so gilt*

$$G(x, y^*) - G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log r$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} (G(x, y) + G(x, y^*)) = -\frac{1}{2\pi}$$

für alle x mit $|x| = 1$.

Beweis. Aus (2.2) und (2.6) folgt unmittelbar die erste Behauptung. Entsprechend folgt die zweite Behauptung aus (2.3), denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} (G(x, y) + G(x, y^*)) &= -\frac{1}{2\pi} x \cdot \left(\frac{x - y}{|x - y|^2} + \frac{x - y^*}{|x - y^*|^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1 - x \cdot y + r^2 - r^2 x \cdot y^*}{|x - y|^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1 - 2x \cdot y + r^2}{1 - 2x \cdot y + r^2} = -\frac{1}{2\pi}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Mit anderen Worten: Die Differenz gespiegelter Grundlösungen und die Neumannableitung der Summe gespiegelter Grundlösungen sind jeweils konstant auf dem Rand des Einheitskreises.

Satz 2.8 Sei u harmonisch im Einheitskreis und stetig fortsetzbar auf den Rand des Einheitskreises mit Randwerten $g(\theta) = u(\cos \theta, \sin \theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Dann gilt

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} g(\theta) d\theta$$

für alle $0 \leq r < 1$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Beweis. Für $r = 0$ stimmt die Poisson-Integraldarstellung mit der Mittelwerteigenschaft aus Satz 2.4 überein. Für $0 < r < 1$ und $x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ betrachten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \text{grad}_y G(x^*, y) - \text{grad}_y G(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(x/r^2 - y)r^2}{|x - y|^2} - \frac{x - y}{|x - y|^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{(1 - r^2)y}{|x - y|^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Hierbei bezeichnet x^* wieder die Spiegelung von x am Einheitskreisrand. Nach Satz 2.2 und Lemma 2.7 gilt nun

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) G(x, s) - u(s) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} G(x, s) \right) ds(y) \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) G(x^*, s) - u(s) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} G(x^*, s) \right) ds(y) \\ &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) (G(x, s) - G(x^*, s)) - u(s) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} (G(x, s) - G(x^*, s)) \right) ds(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) ds(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(1 - r^2)s \cdot s}{|x - s|^2} u(s) ds(y). \end{aligned}$$

Das erste Integral verschwindet wegen Lemma 2.3 und aus dem zweiten Integral ergibt sich die gewünschte Integraldarstellung, da $s \cdot s = 1$ und

$$|x - s|^2 = r^2 - 2x \cdot s + 1 = r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi) + 1$$

für $s = (\cos \theta, \sin \theta)$. □

3. Ein Modellproblem

Ist die Leitfähigkeit σ im Innern des Körpers konstant (etwa auf Eins normiert), so reduziert sich das Problem (1.9) auf die Suche nach einer in Ω harmonischen Funktion u , die auf Γ die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) = \delta(s - s_+) - \delta(s - s_-)$$

erfüllt. Nach (1.5) ist dies äquivalent zu der Variationsgleichung

$$\int_{\Omega} \text{grad } u(x) \cdot \text{grad } v(x) \, dx = v(s_+) - v(s_-), \quad (3.1)$$

die für alle v eines geeigneten linearen Raums erfüllt sein soll.

Satz 3.1 *Sei Ω der Einheitskreis. Dann erfüllt die Funktion*

$$u(x) = 2(G(x, s_+) - G(x, s_-)) = \frac{1}{\pi} \log \frac{|x - s_-|}{|x - s_+|}, \quad x \notin \{s_+, s_-\},$$

die Variationsgleichung (3.1) für alle $v \in C^1(\overline{\Omega})$.

Beweis. Sei $s_* \in \Gamma$, $0 < \varepsilon < 1$ und $K_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - s_*| \leq \varepsilon\}$. Dann ist $G(x, s_*)$ in $\Omega \setminus K_\varepsilon$ harmonisch und partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus K_\varepsilon} \text{grad } G(x, s_*) \cdot \text{grad } v(x) \, dx \\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon} v(s) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} G(s, s_*) \, ds + \int_{\Omega \cap \partial K_\varepsilon} v(s) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} G(s, s_*) \, ds \\ & \quad - \int_{\Omega \setminus K_\varepsilon} v(x) \Delta G(x, s_*) \, dx \\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon} v(s) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} G(s, s_*) \, ds + \int_{\Omega \cap \partial K_\varepsilon} v(s) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} G(s, s_*) \, ds. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus K_\varepsilon$ den Teil des Einheitskreisrandes, der nicht zu K_ε gehört. Auf Γ_ε ist $\nu = s$ und aus (2.3) folgt

$$\frac{\partial}{\partial \nu} G(s, s_*) = -\frac{1}{2\pi} \frac{s - s_*}{|s - s_*|^2} \cdot s = -\frac{1}{2\pi} \frac{1 - s \cdot s_*}{2 - 2s \cdot s_*} = -\frac{1}{4\pi}, \quad s \in \Gamma_\varepsilon.$$

Auf dem verbliebenen Randstück $\Omega \cap \partial K_\varepsilon$ ist $\nu = (s_* - s)/\varepsilon$ und es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \nu} G(s, s_*) = -\frac{1}{2\pi} \frac{s - s_*}{|s - s_*|^2} \cdot \frac{s_* - s}{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}, \quad s \in \Omega \cap \partial K_\varepsilon.$$

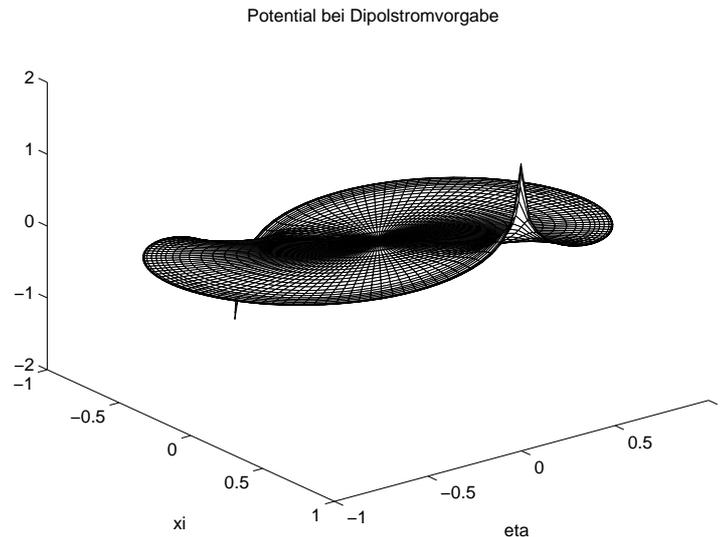
Insgesamt erhalten wir somit

$$\int_{\Omega \setminus K_\varepsilon} \text{grad } G(x, s_*) \cdot \text{grad } v(x) \, dx = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} v(s) \, ds + \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\Omega \cap \partial K_\varepsilon} v(s) \, ds.$$

Hieran erkennt man, daß beide Seiten für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen den eindeutig bestimmten Grenzwert

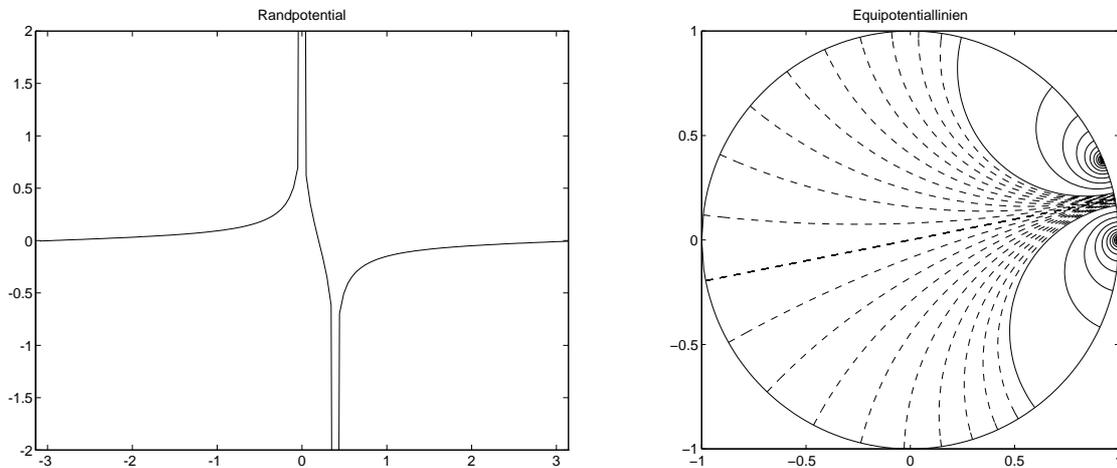
$$\int_{\Omega} \text{grad } G(x, s_*) \cdot \text{grad } v(x) \, dx = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} v(s) \, ds + \frac{1}{2} v(s_*) \quad (3.2)$$

konvergieren. Wenden wir (3.2) sowohl auf $s_* = s_+$ und $s_* = s_-$ an und bilden die Differenz dieser beiden Gleichungen, dann folgt die gewünschte Behauptung. \square



Die Abbildung zeigt die Werte des Potentials u bei zwei einander gegenüberliegenden Elektroden s_\pm . Die Randwerte von u (also die abgreifbaren Spannungen) weisen

übrigens jeweils logarithmische Singularitäten an den Elektroden auf. Zur Illustration betrachten wir noch die folgenden zwei Plots:



Die Abbildungen gehören zu einer 16-Elektroden Konfiguration mit einer typischen Dipolanregung an zwei benachbarten Elektroden. Die beiden Bilder zeigen auf der einen Seite die resultierenden Spannungen auf dem Rand Γ , sowie die Äquipotentiallinien in Ω . Die durchgezogenen Äquipotentiallinien gehören zu $|U| = 0.1, 0.2, \dots, 2$, während die gebrochenen Linien den verbliebenen Bereich $|U| < 0.1$ feiner in Hundertstelschritten unterteilen. Wie man sieht, treten relevante Abweichungen vom Nullpotential nur in einer sehr kleinen Umgebung der stromführenden Elektroden auf. Man kann sich denken, daß es daher sehr schwer sein wird, beispielsweise Inhomogenitäten im Leitfähigkeitskoeffizienten weit im Inneren des Körpers, etwa in der Nähe des Nullpunkts, zu identifizieren. Wir werden dies später noch genauer in Kapitel 9 untersuchen.

Wir wollen an dieser Stelle noch anmerken, daß die verwendeten Punktelektroden sowohl physikalisch als auch mathematisch problematisch sind. Dies liegt zum einen daran, daß die resultierenden Distributionslösungen theoretische Schwierigkeiten mit sich bringen und auch daran, daß an den stromführenden Elektroden – wie wir gesehen haben – keine endlichen Spannungen abgegriffen werden können.

In der Praxis hat es sich im Gegenteil als vorteilhaft erwiesen, Elektroden mit großer Oberfläche einzusetzen. In diesem Fall könnte man sich vorstellen, daß der Randstrom eine auf Γ quadratisch integrierbare Funktion sein kann, deren Träger eine Teilmenge der Elektroden umfaßt. Diese Konstellation mag als Motivation für die in den folgenden Abschnitten zu entwickelnde Lösungstheorie dienen.

Für den Moment wollen wir aber noch einmal den Spezialfall eines homogenen Mediums im Einheitskreis aufgreifen und nun mit einem glatten Randstrom $f \in C^2(\Gamma)$

arbeiten, d.h. wir suchen eine Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) = f(s) \quad \text{auf } \Gamma. \quad (3.3)$$

Im Hinblick auf Lemma 2.3 muß für die Existenz von Lösungen dieses Randwertproblems gefordert werden, daß

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = 0 \quad (3.4)$$

gilt. Entsprechend normieren wir die Lösung durch

$$\int_{\Gamma} u(s) ds = 0. \quad (3.5)$$

Satz 3.2 Sei Ω der Einheitskreis und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Randwertproblems (3.3) bis (3.5). Dann ist

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \log(1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)) d\theta$$

für $x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Beweis. Der Beweis verläuft sehr ähnlich zu dem Beweis der Poisson Integraldarstellung. Während wir dort für $r \neq 0$ die Greenschen Formeln für x und x^* subtrahiert haben, addieren wir sie hier: dann ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) G(x, s) - u(s) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} G(x, s) \right) ds(y) \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) G(x^*, s) - u(s) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} G(x^*, s) \right) ds(y) \\ &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) (G(x, s) + G(x^*, s)) - u(s) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} (G(x, s) + G(x^*, s)) \right) ds(y). \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.7 folgt nun

$$G(x, s) + G(x^*, s) = 2G(x, s) + \frac{\log r}{2\pi}$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial \nu(y)} (G(x, y) + G(x^*, y)) = -\frac{1}{2\pi},$$

und oben eingesetzt erhalten wir daher

$$u(x) = 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) G(x, s) ds + \frac{\log r}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(s) ds,$$

wobei die letzten beiden Randintegrale wegen (3.4) und (3.5) jeweils verschwinden. Beachten wir noch, daß

$$\begin{aligned} 2G(x, s) &= -\frac{1}{2\pi} \log |x - s|^2 = -\frac{1}{2\pi} \log(r^2 - 2x \cdot s + 1) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log(r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi) + 1), \end{aligned}$$

so ergibt sich die Behauptung des Satzes für $r \neq 0$.

Für $r = 0$ verschwindet das Integral auf der rechten Seite der behaupteten Darstellung von $u(0)$, da das Argument des Logarithmus Eins wird. In der Tat ist auch $u(0) = 0$, wie man leicht aus der Mittelwerteigenschaft sieht,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|x|=1} u(s) ds,$$

denn dieses Integral ist gleich Null wegen (3.5). □

Wir bemerken noch, daß diese Lösungsdarstellung auch im Grenzübergang $x \rightarrow \hat{x}$ mit $\hat{x} \in \Gamma$ erhalten bleibt, da das resultierende Integral trotz der logarithmischen Singularität absolut konvergiert und stetig von x abhängt.

4. Der Raum $H^1_\diamond(\Omega)$

Wir beschränken uns in dieser Vorlesung auch weiterhin auf den Fall der Einheitskreisscheibe

$$\Omega = \{x = (\xi, \eta) \mid |(\xi, \eta)| < 1\},$$

so daß $\Gamma = \partial\Omega$ der Einheitskreisrand ist. Dies hat vor allem didaktische Gründe, da es erlaubt, einige kritische Abschätzungen “explizit” nachzurechnen.

Bekanntlich bezeichnet $\mathcal{L}^2(\Omega)$ den Hilbert-Raum aller quadratisch integrierbaren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, bzw. alternativ, den Abschluß von $C(\overline{\Omega})$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u^2(x) dx.$$

Der entscheidende Vorteil des Einheitskreises macht sich dadurch bemerkbar, daß Funktionen $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ durch einen “Separationsansatz” bezüglich Polarkoordinaten approximiert werden können, d.h., durch Funktionen der Form

$$u(x) = y(r)\tau(\theta)$$

mit

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \theta & \eta &= r \sin \theta \\ r &= (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} & \theta &= \arctan \frac{\eta}{\xi} \\ r_\xi &= \frac{\xi}{r}, \quad r_\eta = \frac{\eta}{r} & \theta_\xi &= -\frac{\eta}{r^2}, \quad \theta_\eta = \frac{\xi}{r^2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Insbesondere ist also die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(r, \theta)} \right| = r. \tag{4.2}$$

Lemma 4.1 Sei $\mathcal{L}_r^2[0, 1]$ der Abschluß der Menge aller über $[0, 1]$ stetigen Funktionen bezüglich der Norm

$$\|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]} := \left(\int_0^1 y^2(r) r dr \right)^{1/2}.$$

Funktionen der Form $u(x) = y(r)\tau(\theta)$ mit $\tau \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ und $y \in \mathcal{L}_r^2[0, 1]$ gehören zu $\mathcal{L}^2(\Omega)$, und es gilt

$$\|y(r)\tau(\theta)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]} \|\tau\|_{\mathcal{L}^2[0,2\pi]}.$$

Beweis. Für eine Funktion u der genannten Form gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(x) dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 y^2(r)\tau^2(\theta) \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \tau^2(\theta) \int_0^1 y^2(r) r dr d\theta = \|\tau\|_{\mathcal{L}^2[0,2\pi]}^2 \|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2. \end{aligned}$$

□

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß

$$\tau(\theta) = \tau_n(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\theta), & n > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\theta), & n < 0 \end{cases}.$$

Wir setzen

$$\mathcal{T}_n := \{u(x) = y(r)\tau_n(\theta) \mid y \in \mathcal{L}_r^2[0, 1]\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

Proposition 4.2 Die Unterräume \mathcal{T}_n ($n \in \mathbb{Z}$) sind paarweise orthogonal zueinander.

Beweis. Sei $m \neq n$, $u_n = y_n(r)\tau_n(\theta)$ und $u_m = y_m(r)\tau_m(\theta)$ mit $y_n, y_m \in \mathcal{L}_r^2[0, 1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle u_n, u_m \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 y_n(r)y_m(r)\tau_n(\theta)\tau_m(\theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^1 y_n(r)y_m(r)r \int_0^{2\pi} \tau_n(\theta)\tau_m(\theta) d\theta dr, \end{aligned}$$

und das Ergebnis ist Null wegen der Orthogonalität der $\{\tau_n\}$. □

Satz 4.3 Die Summe aller Teilräume \mathcal{T}_n liegt dicht in $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Beweis. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$, und nehmen wir an, daß $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $v(x) = y(r)\tau_n(\theta)$ mit stetigem y . Zu zeigen ist, daß dann $u = 0$ sein muß. Wegen

$$0 = \langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^1 u(x)y(r)\tau_n(\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \tau_n(\theta) \int_0^1 u(x)y(r) r dr d\theta$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die stetige Funktion

$$\tau(\theta) := \int_0^1 u(r, \theta) y(r) r dr$$

zwangsläufig die Nullfunktion, und zwar für jedes $y \in C[0, 1]$. Wir wählen nun $\theta \in [0, 2\pi)$ fest: Da

$$\int_0^1 u(r, \theta) y(r) r dr = 0$$

für alle $y \in C[0, 1]$, also insbesondere für $y(r) := u(r, \theta)$ mit eben jenem fest gewählten θ , folgt $\int_0^1 u^2(r, \theta) r dr = 0$. Folglich ist die stetige Funktion $u(r, \theta)$ identisch 0, und zwar für jedes θ . Also ist $u \equiv 0$.

Somit ist die Summe der \mathcal{T}_n ($n \in \mathbb{Z}$) dicht in $C(\overline{\Omega})$ (bezüglich der \mathcal{L}^2 -Topologie) und damit auch in $\mathcal{L}^2(\Omega)$. \square

Wir führen nun in Analogie zum $\mathcal{L}^2(\Omega)$ einen Raum “differenzierbarer Funktionen” ein:

Definition 4.4 Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\int_{\Gamma} u d\theta = 0$, sowie

$$\|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Der Raum $H_{\diamond}^1(\Omega)$ bezeichne die Vervollständigung von $\{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid \int_{\Gamma} u d\theta = 0\}$ bezüglich der Norm in (4.4).

$H_{\diamond}^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit Innenprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H_{\diamond}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx. \quad (4.5)$$

Die Einschränkung auf Funktionen u mit $\int_{\Gamma} u d\theta = 0$ ist wichtig, damit (4.4) tatsächlich eine Norm ist.

Achtung. Genau wie \mathcal{L}^2 -Funktionen keine Punktauswertung zulassen, brauchen $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Funktionen nicht differenzierbar sein; sie brauchen noch nicht einmal beschränkt zu sein:

Beispiel 4.5 Sei $u(r, \theta) := \log |\log \frac{r}{2}| - \log \log 2$. Dann ist $u|_{\Gamma} = 0$ und u ist stetig differenzierbar in $\Omega \setminus \{0\}$ mit Ableitung

$$\text{grad } u = \frac{1}{\log \frac{r}{2}} \frac{1}{r} \text{grad } r.$$

Folglich ist

$$|\text{grad } u|^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\log^2 \frac{r}{2}} |\text{grad } r|^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\log^2 \frac{r}{2}},$$

und (4.4) existiert als uneigentliches Integral:

$$\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^2} \frac{1}{\log^2 \frac{r}{2}} r dr d\theta = -2\pi \frac{1}{\log \frac{r}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{\log 2}.$$

Funktionen mit “schlimmeren” Singularitäten sind jedoch im allgemeinen aus $H_{\diamond}^1(\Omega)$ ausgeschlossen.

Beispiel 4.6 Die Funktion u aus Satz 3.1 hat logarithmische Singularitäten an den Randpunkten s_{\pm} und diese verhindern, daß u noch in $H_{\diamond}^1(\Omega)$ liegt: Wegen (2.3) gilt nämlich

$$|\text{grad } u(x)|^2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{|x - s_+|^2} - 2 \frac{(x - s_+) \cdot (x - s_-)}{|x - s_+|^2 |x - s_-|^2} + \frac{1}{|x - s_-|^2} \right)$$

und wegen der doppelten Nullstellen an $x = s_{\pm}$ divergiert folglich das entsprechende Integral über Ω .

Auch in $H_{\diamond}^1(\Omega)$ spielen die Teilräume \mathcal{T}_n aus (4.3) eine wichtige Rolle.

Proposition 4.7 Die Unterräume $\mathcal{T}_n \cap H_{\diamond}^1(\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}$) sind auch bezüglich dem $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Innenprodukt (4.5) paarweise orthogonal.

Beweis. Seien u_n und u_m wie im Beweis von Proposition 4.2 gewählt, nun allerdings stetig differenzierbar auf $\overline{\Omega}$. Wegen

$$\text{grad } u_n = y'_n \tau_n \text{grad } r + y_n \tau'_n \text{grad } \theta$$

und den Rechenregeln

$$|\text{grad } r| = 1, \quad \text{grad } r \cdot \text{grad } \theta = 0, \quad |\text{grad } \theta| = r^{-1}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & \text{grad } u_n \cdot \text{grad } u_m \\ &= y'_n \tau_n y'_m \tau_m |\text{grad } r|^2 + (y'_n \tau_n y_m \tau'_m + y_n \tau'_n y'_m \tau_m) \text{grad } r \cdot \text{grad } \theta + y_n \tau'_n y_m \tau'_m |\text{grad } \theta|^2 \\ &= y'_n \tau_n y'_m \tau_m + r^{-2} y_n \tau'_n y_m \tau'_m. \end{aligned}$$

Da $\tau'_n = n\tau_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ folgt

$$\text{grad } u_n \cdot \text{grad } u_m = y'_n y'_m \tau_n \tau_m + nm r^{-2} y_n y_m \tau_{-n} \tau_{-m}$$

und

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \text{grad } u_n \cdot \text{grad } u_m \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \tau_n \tau_m \int_0^1 y'_n y'_m r \, dr \, d\theta + nm \int_0^{2\pi} \tau_{-n} \tau_{-m} \int_0^1 \frac{y_n y_m}{r} \, dr \, d\theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite verschwindet für $n \neq m$. Das zweite Integral hingegen kann höchstens einen Beitrag liefern, wenn $nm \neq 0$ ist. In diesem Fall müssen y_n und y_m einfache Nullstellen in $r = 0$ haben, da ansonsten u_n bzw. u_m in $x = 0$ nicht differenzierbar wäre. Damit hat $y_n y_m / r$ eine hebbare Singularität im Nullpunkt und der gesamte hintere Term in (4.6) verschwindet wegen der Orthogonalität der $\{\tau_n\}$. Da die in $\overline{\Omega}$ differenzierbaren Funktionen dicht in $H_{\diamond}^1(\Omega)$ liegen, folgt die vollständige Behauptung schließlich durch Grenzübergang. \square

Satz 4.8 Die Summe der Unterräume $\mathcal{T}_n \cap H_{\diamond}^1(\Omega)$ ($n \in \mathbf{Z}$) liegt dicht in $H_{\diamond}^1(\Omega)$.

Beweis. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$, und sei ferner angenommen, daß $\langle u, v \rangle_{H_{\diamond}^1(\Omega)} = 0$ für alle $v(x) = y(r)\tau_n(\theta)$ mit stetigem y und $n \in \mathbf{Z}$. Mittels partieller Integration ergibt sich, vgl. (1.7),

$$0 = \langle u, v \rangle_{H_{\diamond}^1(\Omega)} = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\theta - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = y(1) \int_{\Gamma} \tau_n \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\theta - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx. \quad (4.7)$$

Damit ist $\langle \Delta u, v \rangle = 0$ für alle $v(x) = y(r)\tau_n(\theta)$ mit $y(1) = 0$. Letztere Nebenbedingung ist aber wegen der Dichtheit der entsprechenden stetigen Funktionen keine wesentliche Einschränkung, und es folgt wie im Beweis von Satz 4.3 daß $\Delta u = 0$ in Ω . Eingesetzt in (4.7) – nun wieder mit einer beliebigen in $[0, 1]$ stetigen Funktion y – folgt

$$\int_{\Gamma} \tau_n \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\theta = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbf{Z},$$

also $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0$. Somit löst u das Randwertproblem (3.3)-(3.5) mit $f = 0$ und aus Satz 3.2 folgt daher $u = 0$ in Ω , was zu zeigen war. \square

Die Teilräume \mathcal{T}_n enthalten für große n ausschließlich stark oszillierende Funktionen. Daher wird man für große n eine große $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Norm erwarten.

Lemma 4.9 Ist $u \in \mathcal{T}_n \cap H_{\diamond}^1(\Omega)$, dann gilt

$$\|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} \geq \max\{1, |n|\} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Beweis. Wieder beschränken wir uns auf stetig differenzierbare $u = y(r)\tau_n(\theta) \in \mathcal{T}_n$, so daß für $n \neq 0$ zwangsläufig $y(0) = 0$ gelten muß. Dann ist nach (4.6) für solche n

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx &= \int_0^1 \left(|y'|^2 + \frac{n^2}{r^2} y^2 \right) r dr \geq \int_0^1 n^2 y^2 r dr \\ &= n^2 \|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2 \|\tau_n\|_{\mathcal{L}^2[0,2\pi]}^2. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.1 ist die rechte Seite gleich $n^2 \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2$, so daß die Aussage für $u \in \mathcal{T}_n \cap H_{\diamond}^1(\Omega)$ mit $n \neq 0$ gültig ist.

Für $n = 0$ erhalten wir entsprechend

$$\|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} = \|y'\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]} \|\tau_0\|_{\mathcal{L}^2[0,2\pi]}. \quad (4.8)$$

Ferner ist

$$0 = \int_{\Gamma} u d\theta = y(1) \int_0^{2\pi} \tau_0 d\theta = \sqrt{2\pi} y(1).$$

Daher ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$y(r) = y(1) + \int_1^r y'(\rho) d\rho = \int_1^r y'(\rho) d\rho,$$

und mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$ry^2(r) = r \left(\int_r^1 y'(\rho) d\rho \right)^2 \leq r \int_r^1 |y'(\rho)|^2 d\rho \int_r^1 d\rho \leq \int_r^1 \rho |y'(\rho)|^2 d\rho \leq \|y'\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2,$$

und damit

$$\|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2 = \int_0^1 ry^2(r) dr \leq \int_0^1 \|y'\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2 dr = \|y'\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]}^2. \quad (4.9)$$

Zusammen mit (4.8) und Lemma 4.1 gilt also für $u \in \mathcal{T}_0 \cap H_{\diamond}^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} \geq \|y\|_{\mathcal{L}_r^2[0,1]} \|\tau_0\|_{\mathcal{L}^2[0,2\pi]} = \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

□

Korollar 4.10 Für jede Funktion $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} \geq \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Ist zudem $u \perp \mathcal{T}_m$ für alle m mit $|m| < n$, dann ist

$$\|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)} \geq n \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Beweis. Sei

$$u = \sum_{|m| \leq N} y_m(r) \tau_m(\theta). \quad (4.10)$$

Nach den Propositionen 4.2 und 4.7, sowie Lemma 4.9 gilt (Satz von Pythagoras)

$$\|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)}^2 = \sum_{|m| \leq N} \|y_m \tau_m\|_{H_\diamond^1(\Omega)}^2 \geq \sum_{|m| \leq N} \|y_m \tau_m\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2.$$

Da nach Satz 4.8 Funktionen der Form (4.10) dicht in $H_\diamond^1(\Omega)$ liegen, folgt die erste Behauptung. Die zweite Aussage ergibt sich entsprechend, da gemäß der Zusatzvoraussetzung $y_m \tau_m = 0$ sein muß für $|m| < n$. \square

Wir benötigen zu guter Letzt noch einen Spursatz für Funktionen $u \in H_\diamond^1(\Omega)$, auf dessen Beweis hier verzichtet werden kann:

Satz 4.11 *Eine Funktion $u \in H_\diamond^1(\Omega)$ hat Randwerte $u|_\Gamma \in \mathcal{L}^2(\Gamma)$ mit*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq 2 \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)}^{1/2}.$$

Bemerkung 4.12 Dieser Satz ist in gewisser Hinsicht scharf, in anderer Hinsicht jedoch nicht. Tatsächlich läßt sich für $0 \leq s \leq 1$ eine ganze “Skala” von Hilberträumen $H_\diamond^s(\Omega) \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ definieren (die sogenannten *Sobolev-Räume*), die zwischen $H_\diamond^0(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega)$ und $H_\diamond^1(\Omega)$ “interpolieren” in dem Sinn, daß

$$\|u\|_{H_\diamond^s(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^{1-s} \|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)}^s$$

für alle $u \in H_\diamond^1(\Omega)$. Es zeigt sich dann, daß der Spuroperator sogar für Funktionen $u \in H_\diamond^{1/2}(\Omega)$ noch wohldefiniert ist mit

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq c \|u\|_{H_\diamond^{1/2}(\Omega)}$$

und einem festem $c > 0$. Diese Schranke unterscheidet sich also nur wenig von der Schranke aus Satz 4.11; in diesem Sinn ist Satz 4.11 scharf. Umgekehrt ist die Spur einer $H_\diamond^1(\Omega)$ -Funktion jedoch nicht einfach nur in $\mathcal{L}^2(\Gamma)$, sondern hat zusätzliche Eigenschaften. Anders ausgedrückt: Nicht jede $\mathcal{L}^2(\Gamma)$ -Randfunktion ist die Spur einer

$H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Funktion. Dies wird z.B. deutlich bei der speziellen Lösung u aus Satz 3.1 für Dipolstromvorgaben. Wie wir in Beispiel 4.6 gesehen haben, liegt u gerade nicht mehr in $H_{\diamond}^1(\Omega)$. Trotzdem ist die entsprechende Spur $u|_{\Gamma}$ eine quadratisch integrierbare Funktion mit lediglich logarithmischen Singularitäten in den Punkten $s = s_{\pm}$, d.h. $u|_{\Gamma} \in \mathcal{L}^2(\Gamma)$. Derartige Diskrepanzen lassen sich leider nicht an Satz 4.11 ablesen.

Am ehesten kann man dieses Defizit noch daran erkennen, daß das \mathcal{L}^2 -Maß auf dem Rand Γ einer Funktion $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ keine Rückschlüsse auf ihre $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Norm erlaubt; die beiden Topologien sind also weit voneinander entfernt.

Korollar 4.13 *Sei $n \in \mathbb{Z}$ fix und $u \in \mathcal{T}_n \cap H_{\diamond}^1(\Omega)$. Dann ist*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq 2 \max\{n, 1\}^{-1/2} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)}.$$

Beweis. Nach Satz 4.11 und Lemma 4.9 ist

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2 &\leq 4 \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} \leq 4 \frac{\|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)}}{\max\{n, 1\}} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} \\ &= 4 \max\{n, 1\}^{-1} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

□

5. Das Minimierungsproblem

In Kapitel 1 haben wir gesehen, daß das Potential u die Energie

$$\Phi[u] \equiv \frac{1}{2} a(u, u) - \ell(u) \quad (5.1)$$

zu minimieren sucht. Im folgenden wollen wir Minimierungsprobleme der Form (5.1) allgemein ansehen.

Wir gehen dabei von den folgenden Voraussetzungen aus. Sei \mathcal{X} ein Hilbertraum und a eine symmetrische Bilinearform über \mathcal{X} , sowie b ein stetiges (lineares) Funktional auf \mathcal{X} . b ist also ein Element des Dualraums \mathcal{X}' von \mathcal{X} mit der entsprechenden Norm

$$\|\ell\|_{\mathcal{X}'} = \sup_{u \neq 0} \frac{|\ell(u)|}{\|u\|}.$$

Ferner sei $0 < \underline{a} \leq \bar{a} < \infty$ mit

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \bar{a} \|u\| \|v\| & \forall u, v \in \mathcal{X}, \\ a(u, u) &\geq \underline{a} \|u\|^2 & \forall u \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Offensichtlich ist unter diesen Voraussetzungen Φ eine stetige Funktion in \mathcal{X} , denn

$$\begin{aligned} \Phi[u] - \Phi[v] &= \frac{1}{2} a(u, u) - \ell(u) - \frac{1}{2} a(v, v) + \ell(v) = \frac{1}{2} a(u - v, u + v) - \ell(u - v) \\ &\leq \left(\frac{\bar{a}}{2} \|u + v\| + \|\ell\|_{\mathcal{X}'}\right) \|u - v\|, \end{aligned}$$

und nach Vertauschung von u und v ergibt sich

$$|\Phi[u] - \Phi[v]| \leq \left(\frac{\bar{a}}{2} \|u + v\| + \|\ell\|_{\mathcal{X}'}\right) \|u - v\|.$$

Unter den getroffenen Annahmen klärt der folgende Satz die Lösbarkeit von (5.1).

Satz 5.1 *Das Minimierungsproblem (5.1) hat eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{X}$, und jede Minimalfolge $\{u_n\} \subset \mathcal{X}$ konvergiert gegen u . Zusatz: Mit $b \neq 0$ ist auch $u \neq 0$.*

Beweis. Offensichtlich ist Φ nach unten beschränkt, denn

$$\Phi[u] \geq \frac{1}{2} \underline{a} \|u\|^2 - \|\ell\|_{\mathcal{X}'} \|u\| \geq -\frac{1}{2\underline{a}} \|\ell\|_{\mathcal{X}'}^2.$$

Also existiert das Infimum von Φ über \mathcal{X} . Es gilt zudem

$$\phi := \inf_{u \in \mathcal{X}} \Phi[u] \leq \Phi[0] = 0$$

und Gleichheit kann nur gelten wenn $b = 0$; andernfalls existiert nämlich ein $v \in \mathcal{X}$ mit $\ell(v) \neq 0$, und dann ist

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \Phi[tv] = \inf_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} t^2 a(v, v) - t \ell(v) \right) = -\frac{1}{2} \frac{|\ell(v)|^2}{a(v, v)} < 0.$$

Damit ist der Zusatz schon einmal bewiesen.

Wir wählen nun eine Minimalfolge $\{u_n\} \in \mathcal{X}$, also eine Folge aus \mathcal{X} mit

$$\Phi[u_n] \longrightarrow \phi, \quad n \rightarrow \infty.$$

Zu zeigen ist, daß $\{u_n\}$ eine Cauchy-Folge ist. Wegen

$$\begin{aligned} a(u+v, u+v) &= a(u, u) + 2a(u, v) + a(v, v), \\ a(u-v, u-v) &= a(u, u) - 2a(u, v) + a(v, v), \end{aligned}$$

ergibt sich die ‘‘Parallelogramm-Gleichung’’

$$a(u, u) + a(v, v) = \frac{1}{2} a(u+v, u+v) + \frac{1}{2} a(u-v, u-v), \quad u, v \in \mathcal{X}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \Phi[u_m] + \Phi[u_n] &= \frac{1}{2} a(u_m, u_m) + \frac{1}{2} a(u_n, u_n) - \ell(u_m) - \ell(u_n) \\ &= \frac{1}{4} a(u_n + u_m, u_n + u_m) + \frac{1}{4} a(u_n - u_m, u_n - u_m) - \ell(u_m + u_n) \\ &= \frac{1}{4} a(u_n - u_m, u_n - u_m) + 2\Phi\left[\frac{u_m + u_n}{2}\right] \\ &\geq \frac{1}{4} \underline{a} \|u_n - u_m\|^2 + 2\phi. \end{aligned}$$

Für $m, n \rightarrow \infty$ strebt die linke Seite gegen 2ϕ und daher $\|u_n - u_m\|$ gegen 0. Mit anderen Worten: $\{u_n\}$ ist eine Cauchy-Folge in \mathcal{X} und hat einen eindeutigen Grenzwert $u \in \mathcal{X}$. Wegen der Stetigkeit von Φ ist u also eine Lösung von (5.1). Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß jede Minimalfolge eine Cauchy-Folge ist: Gäbe es zwei minimierende Elemente $u, v \in \mathcal{X}$, würde die Minimalfolge

$$u_{2n} = u, \quad u_{2n+1} = v, \quad n \in \mathbf{N},$$

ansonsten nicht konvergieren. □

Korollar 5.2 *Unter der Voraussetzung (5.2) läßt sich die Lösung u des Minimierungsproblems (5.1) charakterisieren als Lösung der Gleichungen*

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}. \quad (5.3)$$

Ferner gilt

$$\|u\| \leq \frac{1}{\underline{a}} \|\ell\|_{\mathcal{X}'}$$

Beweis. Daß (5.3) aus Satz 5.1 folgt, haben wir bereits in Kapitel 1 gesehen, vgl. (1.5). Ist nun umgekehrt u eine Lösung von (5.3), dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi[v] - \Phi[u] &= \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) - \frac{1}{2} a(u, u) + \ell(u) \\ &= \frac{1}{2} a(v - u, v - u) + a(u, v) - a(u, u) - \ell(v) + \ell(u) \\ &= \frac{1}{2} a(v - u, v - u) + \ell(v) - \ell(u) - \ell(v) + \ell(u) \\ &\geq \frac{1}{2} \underline{a} \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

Folglich ist u die Lösung von (5.1). Um die Abschätzung zu beweisen, verwenden wir (5.3) und die zweite Bedingung aus (5.2):

$$\underline{a} \|u\|^2 \leq a(u, u) = \ell(u) \leq \|\ell\|_{\mathcal{X}'} \|u\|.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. □

Die Gleichungen (5.3) werden üblicherweise als *Variationsproblem* bezeichnet (v variiert in \mathcal{X}). Das Variationsproblem kann auch als Gleichung in \mathcal{X}' aufgefaßt werden:

$$a(u, \cdot) = \ell.$$

Demnach existiert ein linearer Operator

$$A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}', \quad A : u \mapsto \ell,$$

und Korollar 5.2 besagt, daß dieser Operator stetig invertierbar ist.

Satz 5.3 Die Inverse $A^{-1} : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ von A ordnet dem linearen Funktional ℓ des Minimierungsproblems (5.1) die Lösung u zu. A^{-1} ist injektiv und stetig mit

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}} \leq \frac{1}{\underline{a}}.$$

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 5.1 und Korollar 5.2. □

Wir wollen nun diese allgemeine Theorie auf unser EIT-Problem anwenden. Das Prinzip der minimalen potentiellen Energie führt auf das Minimierungsproblem

$$\Phi[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\text{grad } u|^2 dx - \int_{\Gamma} u f d\theta \longrightarrow \min, \quad (5.4)$$

wobei $f = \delta(\cdot - s_+) - \delta(\cdot - s_-)$. Wir wählen also

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx, \quad (5.5)$$

$$\ell(v) = \int_{\Gamma} f v d\theta.$$

Unser Ziel ist es nachzuweisen, daß Φ eine eindeutige (globale) Minimalstelle $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ besitzt. Dazu bedarf es jedoch zweier Einschränkungen:

- Die Leitfähigkeit σ ist meßbar und durch $0 < \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma} < \infty$ beschränkt. Dies entspricht dem Ausschluß von Isolatoren und perfekten Leitern. Die Menge der zugelassenen Leitfähigkeitskoeffizienten bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_{+}^{\infty}(\Omega)$.
- Anstelle von δ -Distributionen, wie sie in (1.3) und (1.9) bei der Definition von ℓ verwendet wurden, sei das Element f im folgenden aus einem quadratisch integrierbarem Raum, nämlich

$$f \in \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma) := \{f \in \mathcal{L}^2(\Gamma) \mid \int_{\Gamma} f d\theta = 0\}. \quad (5.6)$$

Dies ist eine Konsequenz aus dem Ergebnis, daß Punktauswertungen wie in (1.3) für $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ nicht erlaubt sind. Zudem haben wir bereits bei dem einfachen Beispiel 3.1 gesehen, daß im Fall von Delta-Distributionen f in der Regel keine $H_{\diamond}^1(\Omega)$ -Funktion als Lösung erwartet werden kann. Die Einschränkung (5.6) kann andererseits dadurch rechtfertigt werden, daß Elektroden eine positive Breite haben, und sie daher statt durch eine Delta-Distribution besser durch eine \mathcal{L}^2 -Approximation – etwa die charakteristische Funktion des Elektroden-trägers – modelliert werden. Die Wahl des speziellen Teilraums $\mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma) \subset \mathcal{L}^2(\Gamma)$ reflektiert, daß in jedem Fall genauso viel Strom aus dem Körper hinausfließt wie eingespeist wird.

Für Funktionen $f \in \mathcal{L}^2_\diamond(\Gamma)$ ist das Funktional $\ell(u)$ stetig über $H^1_\diamond(\Omega)$, denn nach Satz 4.11 und Korollar 4.10 ist

$$|\ell(u)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq 2 \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)}^{1/2} \leq 2 \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)}.$$

Satz 5.4 Für das EIT-Minimierungsproblem (5.4) mit $f \in \mathcal{L}^2_\diamond(\Gamma)$ existiert eine eindeutige Lösung $u \in H^1_\diamond(\Omega)$, die durch die Variationsgleichung (5.3) charakterisiert ist. Es ist

$$\|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \leq \frac{2}{\underline{\sigma}} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)},$$

und $u \neq 0$ falls $f \neq 0$.

Beweis. Wie bereits oben gezeigt wurde, ist ℓ ein stetiges Funktional über $H^1_\diamond(\Omega)$ mit

$$\|\ell\|_{H^1_\diamond(\Omega)'} \leq 2 \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}.$$

Andererseits erfüllt die Bilinearform a aus (5.5) die Voraussetzungen von Satz 5.1, da

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \right| &\leq \bar{\sigma} \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} v|^2 \right)^{1/2} \\ &= \bar{\sigma} \|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)} \|v\|_{H^1_\diamond(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$\int_\Omega \sigma |\operatorname{grad} u|^2 \, dx \geq \underline{\sigma} \|u\|_{H^1_\diamond(\Omega)}^2.$$

Also folgen Existenz, Eindeutigkeit und Abschätzung aus Satz 5.1. Die Darstellung über die Variationsgleichung folgt aus Korollar 5.2. Der Zusatz von Satz 5.1 besagt, daß $u \neq 0$, falls $\ell \neq 0$. $\ell = 0$ bedeutet aber, daß $f \perp v|_\Gamma$ für jedes $v \in H^1_\diamond(\Omega)$. Insbesondere, ist $v \in \mathcal{T}_n \cap H^1_\diamond(\Omega)$ dann ergibt sich $f \perp \tau_n$, und zwar für jedes $n \neq 0$. Demnach ist f eine Konstante, und wegen $\int f \, d\theta = 0$ ist zwangsläufig $f = 0$. \square

Bemerkung 5.5 Satz 5.4 besagt, daß der Lösungsoperator

$$L_\sigma : \mathcal{L}^2_\diamond(\Gamma) \rightarrow H^1_\diamond(\Omega), \quad L_\sigma : f \mapsto u,$$

der den Neumann-Randwerten das zugehörige Potential zuordnet, stetig ist. Mit anderen Worten: Das resultierende Potential hängt stetig von den vorgegebenen Randströmen ab.

6. Der Neumann-to-Dirichlet Operator

Bezeichnet $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ die Lösung des Minimierungsproblems (5.4) bei gegebener Funktion $f \in \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma)$, dann ist u eindeutig bestimmt, und wir können den Operator

$$\Lambda : \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma), \quad \Lambda : f \mapsto u|_{\Gamma},$$

definieren. Λ heißt *Neumann-to-Dirichlet Operator* (NtD-Operator), da Λ die vorgegebenen Neumann-Daten von u , vgl. (1.9), auf die zugehörigen Dirichlet-Daten $u|_{\Gamma}$ abbildet.

Satz 6.1 $\Lambda : \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma)$ ist stetig mit $\|\Lambda\| \leq 4/\underline{\sigma}$.

Beweis. Nach Satz 4.11, Korollar 4.10 und Satz 5.4 gilt

$$\|\Lambda f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq 2 \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)} \leq \frac{4}{\underline{\sigma}} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}.$$

□

Im weiteren werden wir zeigen, daß Λ ein kompakter Operator, sogar ein Hilbert-Schmidt Operator ist. Zunächst zeigen wir jedoch erst, daß Λ selbstadjungiert ist.

Satz 6.2 $\Lambda : \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma)$ ist selbstadjungiert und positiv. Ist Λ der NtD-Operator zur Leitfähigkeit σ und Λ_0 der NtD-Operator zur Leitfähigkeit σ_0 mit $0 < \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \sigma_0 \leq \bar{\sigma} < \infty$ in Ω , so ist $\Lambda - \Lambda_0$ positiv semidefinit.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma)$ und $u \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ die zugehörige Lösung der Minimierungsaufgabe (5.4). Ferner sei g eine beliebige andere Funktion aus $\mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma)$, und $w \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ die Lösung des entsprechenden Minimierungsproblems

$$\frac{1}{2} a(w, w) - \tilde{\ell}(w) \longrightarrow \min, \quad \tilde{\ell}(w) = \int_{\Gamma} gw \, d\theta.$$

Nach Satz 5.4 gilt

$$a(u, v) = \ell(v), \quad a(w, v) = \tilde{\ell}(v), \quad \text{für alle } v \in H_{\diamond}^1(\Omega).$$

Folglich gilt

$$\int_{\Gamma} g(\Lambda f) d\theta = \tilde{\ell}(u) = a(w, u) = a(u, w) = \ell(w) = \int_{\Gamma} fw d\theta = \int_{\Gamma} f(\Lambda g) d\theta.$$

Ferner ist

$$\int_{\Gamma} f(\Lambda f) d\theta = \ell(u) = a(u, u) \geq \underline{\sigma} \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)}^2 > 0$$

für $f \neq 0$, vgl. Satz 5.4.

Seien nun σ und σ_0 wie in der Formulierung des Satzes und Λ und Λ_0 die zugehörigen NtD-Operatoren. Ferner sei $u = L_{\sigma}^{-1}f$ und $u_0 = L_{\sigma_0}^{-1}f$. Dann gilt aufgrund der Variationsgleichung für u_0

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f((\Lambda - \Lambda_0)f) d\theta &= \int_{\Gamma} f(\Lambda f) d\theta - \int_{\Gamma} f(\Lambda_0 f) d\theta \\ &= \ell(u) - \ell(u_0) = \ell(u) + \ell(u_0) - 2\ell(u_0) \\ &= \ell(u) + \int_{\Omega} \sigma_0 |\text{grad } u_0|^2 dx - 2\ell(u_0) \\ &\geq \ell(u) + \int_{\Omega} \sigma |\text{grad } u_0|^2 dx - 2\ell(u_0), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt σ_0 nach unten durch σ abgeschätzt haben. Die letzte Zeile können wir nun mit Hilfe des Funktional Φ aus (5.1) umschreiben und erhalten

$$\int_{\Gamma} f((\Lambda - \Lambda_0)f) d\theta \geq \ell(u) + 2\Phi[u_0],$$

und aus der Minimaleigenschaft von u folgt die Behauptung:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f((\Lambda - \Lambda_0)f) d\theta &\geq \ell(u) + 2\Phi[u_0] \geq \ell(u) + 2\Phi[u] \\ &= \ell(u) + a(u, u) - 2\ell(u) = a(u, u) - \ell(u) = 0. \end{aligned}$$

□

Erinnerung. Ein kompakter, selbstadjungierter und positiver Operator $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ im Hilbertraum \mathcal{X} besitzt eine abzählbare Menge $\{\lambda_n\}$ absteigend sortierter Eigenwerte $\lambda_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Die

zugehörigen Eigenfunktionen $x_n \in \mathcal{X}$ können so gewählt werden, daß $\{x_n\}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{X} bildet. (→ Literatur: W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*)

Für die Eigenwerte von K gilt das *Minmax-Prinzip* von Courant und Fischer: Demnach ist

$$\lambda_n = \min_{0 \neq x \perp \mathcal{X}_n} \frac{\|Kx\|}{\|x\|} = \min_{0 \neq x \perp \mathcal{X}_n} \frac{\langle x, Kx \rangle}{\|x\|^2}, \quad (6.1)$$

wobei das Minimum über alle $(n-1)$ -dimensionalen Teilräume $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$ gebildet wird.

Gilt für die Eigenwerte des kompakten Operators zudem $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$, so nennt man K einen *Hilbert-Schmidt Operator*. In diesem Fall gilt für jede Orthonormalbasis $\{z_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ von \mathcal{X} :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Kz_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 =: \|K\|^2. \quad (6.2)$$

(Mittels (6.2) kann der Begriff des Hilbert-Schmidt Operators auf nicht notwendig selbstadjungierte Operatoren verallgemeinert werden.) Die Abbildung $\|\cdot\|$ definiert eine Norm über allen Hilbert-Schmidt Operatoren, die sogenannte *Hilbert-Schmidt Norm*. Sie wird durch ein Innenprodukt erzeugt, nämlich

$$\langle\langle K_1, K_2 \rangle\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, K_2 z_n \rangle. \quad (6.3)$$

Dadurch gewinnt die Hilbert-Schmidt Norm einen entscheidenden Vorteil gegenüber der Spektralnorn, da letztere nicht zu einem Hilbertraum führt. Übrigens ist der Wert der Hilbert-Schmidt Norm immer größer als der Wert der Spektralnorn $\|K\| = \lambda_1$.

Den Nachweis, daß (6.3) von der Wahl der Basis $\{z_n\}$ unabhängig ist, führt man am besten wie folgt: Ist $\{\tilde{z}_\nu\}$ eine zweite Orthonormalbasis von \mathcal{X} , dann können $K_1 z_n$ und $K_2 z_n$ wie folgt entwickelt werden:

$$K_1 z_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle \tilde{z}_\nu, \quad K_2 z_n = \sum_{\mu=1}^{\infty} \langle K_2 z_n, \tilde{z}_\mu \rangle \tilde{z}_\mu.$$

Daraus folgt

$$\langle K_1 z_n, K_2 z_n \rangle = \sum_{\nu, \mu=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle \langle K_2 z_n, \tilde{z}_\mu \rangle \langle \tilde{z}_\nu, \tilde{z}_\mu \rangle = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle \langle K_2 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle,$$

und weiter

$$\begin{aligned} \langle\langle K_1, K_2 \rangle\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, K_2 z_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle K_1 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle \langle K_2 z_n, \tilde{z}_\nu \rangle \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_1 \tilde{z}_\nu, z_n \rangle \langle K_2 \tilde{z}_\nu, z_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_1 \tilde{z}_\nu, K_2 \tilde{z}_\nu \rangle. \end{aligned}$$

Beispiel 6.3 Wir betrachten den Spezialfall, daß $\sigma \equiv c > 0$ konstant ist (für $c = 1$ ergibt sich also wieder die bereits früher betrachtete Poisson-Gleichung). Eine

naheliegende Orthonormalbasis für $\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ bilden die trigonometrischen Funktionen $\{\tau_n \mid n \neq 0\}$. Für $f = \tau_n$, $n \neq 0$, führt das Minimierungsproblem (5.4) auf eine Lösung u_n der partiellen Differentialgleichung, vgl. (1.9),

$$c\Delta u = 0, \quad c \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = \tau_n. \quad (6.4)$$

Als Real- bzw. Imaginärteil von $(c|n|)^{-1}z^{|n|}$ ist

$$u_n(x) = \frac{1}{c} |n|^{-1} r^{|n|} \tau_n(\theta)$$

eine harmonische Funktion und daher die Lösung von (6.4). Offensichtlich hat u_n die Spur

$$u_n|_\Gamma = \frac{1}{c} |n|^{-1} \tau_n,$$

und daher ist τ_n eine Eigenfunktion der NtD-Abbildung Λ mit Eigenwert $\lambda_n = (c|n|)^{-1}$. Folglich ist diese NtD-Abbildung ein Hilbert-Schmidt Operator, denn

$$\|\Lambda\| = \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{c^2} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{c} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{c} \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz 6.4 Sei $\sigma \in \mathcal{L}_+^\infty(\Omega)$. Dann ist die zugehörige NtD-Abbildung $\Lambda : \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ ein Hilbert-Schmidt Operator.

Beweis. Zu $\sigma \in \mathcal{L}_+^\infty(\Omega)$ gibt es nach Voraussetzung ein $\underline{\sigma} > 0$ mit $\sigma \geq \underline{\sigma}$. Bezeichnen wir mit Λ_0 die NtD-Abbildung zu der konstanten Leitfähigkeit $\sigma_0 \equiv \underline{\sigma}$, so gilt nach Satz 6.2

$$\langle f, \Lambda f \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq \langle f, \Lambda_0 f \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}$$

für alle $f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$. Speziell für

$$\mathcal{X}_n := [\tau_{-n}, \dots, \tau_{-1}, \tau_1, \dots, \tau_n] \subset \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma), \quad n \in \mathbf{N}, \quad (6.5)$$

folgt hieraus

$$\begin{aligned} \max_{0 \neq f \perp \mathcal{X}_n} \frac{\langle f, \Lambda f \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}}{\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2} &\leq \max_{0 \neq f \perp \mathcal{X}_n} \frac{\langle f, \Lambda_0 f \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}}{\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2} = \langle \tau_{n+1}, \Lambda_0 \tau_{n+1} \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \\ &= \frac{1}{\underline{\sigma}} (n+1)^{-1} \end{aligned}$$

Die Ungleichung bleibt gültig, wenn wir nun auf der linken Seite das Minimum über alle $2n$ -dimensionalen Teilräume \mathcal{X}_n bilden, und das Minmax-Prinzip von Courant-Fischer ergibt somit die Abschätzung

$$\lambda_{2n+1} \leq \min_{0 \neq f \perp \mathcal{X}_n} \max \frac{\langle f, \Lambda f \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}}{\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2} \leq \frac{1}{\sigma} (n+1)^{-1}.$$

Hieraus folgt, daß Λ kompakt und ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. \square

In Beispiel 6.3 haben wir gesehen, daß die Eigenfunktionen der NtD Abbildung bei einer konstanten Leitfähigkeit gerade die trigonometrischen Basisfunktionen $\{\tau_k \mid k \neq 0\}$ sind. Wir zeigen nun zum Abschluß dieses Kapitels, daß dieser Sachverhalt für jede radialsymmetrische Leitfähigkeit $\sigma = \sigma(r)$ gültig ist.

Dazu wählen wir in dem Minimierungsproblem (5.4) wieder $f = \tau_k$, $k \neq 0$, und entwickeln die Lösung

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(x), \quad u_n(x) = y_n(r) \tau_n(\theta).$$

Eingesetzt in (5.4) folgt

$$\begin{aligned} \Phi[u] &= \frac{1}{2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} u_m \, dx - \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(1) \int_{\Gamma} \tau_n(\theta) \tau_k(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} u_m \, dx - y_k(1). \end{aligned}$$

Da σ nur vom Radius abhängt, folgt nun wie in (4.6), daß

$$\Phi[u] = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 \sigma y'_n y'_m r \int_0^{2\pi} \tau_n \tau_m \, d\theta \, dr + nm \int_0^1 \frac{\sigma y_n y_m}{r} \int_0^{2\pi} \tau_{-n} \tau_{-m} \, d\theta \, dr \right) - y_k(1).$$

Die inneren Integrale verschwinden jeweils für $n \neq m$ und sind gleich Eins für $n = m$; daher folgt schließlich

$$\begin{aligned} \Phi[u] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 \sigma (y'_n)^2 r \, dr + n^2 \int_0^1 \frac{\sigma y_n^2}{r} \, dr \right) - y_k(1) \\ &\geq \int_0^1 \sigma (y'_k)^2 r \, dr + k^2 \int_0^1 \frac{\sigma y_k^2}{r} \, dr - y_k(1) \\ &= \Phi[y_k \tau_k]. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Minimalstelle von Φ ergibt dies schließlich das gewünschte Resultat $u = y_k \tau_k \in \mathcal{T}_k$. Damit ist klar, daß

$$\Lambda : \tau_k \mapsto y_k \tau_k|_\Gamma = y_k(1) \tau_k.$$

Wir fassen zusammen:

Satz 6.5 *Sei σ radialsymmetrisch und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$\Lambda \tau_n = \lambda_n \tau_n$$

für ein geeignetes $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 6.6 Liegt $u = y \tau_n \in \mathcal{T}_n \cap H_\diamond^1(\Omega)$, so gilt

$$\|u\|_{H_\diamond^1(\Omega)} = \left(\int_0^1 (y'^2 + \frac{n^2}{r^2} y^2) r dr \right)^{1/2}.$$

Umgekehrt definiert eine Funktion $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, für die das Integral auf der rechten Seite existiert, ein Element $u = y \tau_n \in \mathcal{T}_n \cap H_\diamond^1(\Omega)$. Der Ausdruck auf der rechten Seite definiert einen Hilbertraum und die Elemente dieses Hilbertraums sind für $r > 0$ stetig. Für solche Funktionen definiert (6.6) eine symmetrische, stetige und elliptische Bilinearform, die eine eindeutig bestimmte Minimalstelle y_n besitzt. Der Eigenwert λ_n aus Satz 6.5 ist der Funktionswert $y_n(1)$ dieser minimierenden Funktion an der Stelle $r = 1$.

Beachtet man noch, daß die Funktionen $\{\tau_n \mid n \neq 0\}$ eine Basis von $\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ bilden, so besagt Satz 6.5, daß für radialsymmetrische Leitfähigkeiten die NtD alleine durch ihre Eigenwerte beschrieben werden kann. Nach Beispiel 6.3 sind dies für $\sigma \equiv c$ etwa die Eigenwerte $\lambda_n = (c|n|)^{-1}$.

7. Identifizierbarkeit harmonischer Leitfähigkeiten

Für das EIT-Problem ist es natürlich von entscheidender Bedeutung, ob die NtD-Abbildung Λ überhaupt genügend Informationen enthält, um σ identifizieren zu können, d.h., ob die Abbildung $\sigma \mapsto \Lambda(\sigma)$ *injektiv* ist.

Diese Frage wurde seit den 80er Jahren des 20. Jahrhunderts intensiv untersucht und erst im letzten Jahr abschließend (mit *ja!*) beantwortet. Dieses Resultat ist für den Rahmen dieser Vorlesung zu schwierig – statt dessen werden wir in diesem Abschnitt die Injektivität über der kleineren Grundmenge der in Ω harmonischen Funktionen $\sigma \in \mathcal{L}_+^\infty(\Omega)$ beweisen.

Zunächst wollen wir jedoch anhand einer Plausibilitätsüberlegung die Identifizierbarkeitsfrage diskutieren. Die gesuchte Funktion σ ist eine reelle Funktion zweier Veränderlicher, und daher wird man annehmen, daß zu ihrer Identifikation auch eine zweidimensionale Datenmannigfaltigkeit benötigt wird. Diese ist durch die Wertepaare $(f; \Lambda f)$ mit $f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ auch gegeben. Beim EIT-Problem für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sieht es übrigens für die Identifizierbarkeit besser aus: Dort ist σ eine reelle Funktion dreier Veränderlicher, während f und Λf Funktionen zweier Veränderlicher sind, also formal eine vierdimensionale Datenmannigfaltigkeit liefern. Im \mathbb{R}^3 ist das EIT-Problem also formal überbestimmt.

Demgegenüber macht das EIT-Problem im \mathbb{R}^1 überhaupt keinen Sinn. Die Randwertaufgabe

$$-(\sigma u)' = 0, \quad \sigma(0)u'(0) = 1, \quad \sigma(1)u'(1) = 1, \quad (7.1)$$

mit $0 < \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma} < \infty$ hat eine eindeutige Lösung \hat{u} . Die Randwerte $\sigma(0)u'(0) = \alpha$ und $\sigma(1)u'(1) = \alpha$ führen auf die Lösung $\alpha\hat{u}$. Die NtD-Abbildung Λ hat daher die Form

$$\Lambda : \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha\hat{u}(0) \\ \alpha\hat{u}(1) \end{pmatrix},$$

deren Informationsgehalt also nur aus den beiden Werten $\hat{u}(0)$ und $\hat{u}(1)$ besteht. Daraus läßt sich σ sicher nicht rekonstruieren.

Wir bezeichnen im weiteren mit

$$C_+^1(\overline{\Omega}) := \{\sigma \in C^1(\overline{\Omega}) \mid 0 < \inf_{\Omega} \sigma \leq \sup_{\Omega} \sigma < \infty\}$$

die in $\overline{\Omega}$ differenzierbaren Leitfähigkeitskoeffizienten, und mit

$$\mathcal{H}_+ := \{\sigma \in C_+^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \mid \Delta \sigma = 0 \text{ in } \Omega\}$$

die zugehörige Teilmenge harmonischer Leitfähigkeitskoeffizienten.

Lemma 7.1 *Ist $\sigma \in C_+^1(\overline{\Omega})$, dann konvergiert in $\mathcal{L}^2(\Gamma)$*

$$|n|(\tau_n \Lambda \tau_n + \tau_{-n} \Lambda \tau_{-n}) \longrightarrow \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sigma} \Big|_{\Gamma}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Wir untersuchen das EIT-Problem mit Randstromvorgabe $f = \tau_n$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ fix. Dabei wird das Potential u zur tatsächlichen Leitfähigkeitsverteilung σ mit dem Potential u_1 zur konstanten Leitfähigkeitsverteilung identisch 1 verglichen. In dem Minimierungsproblem (5.4) verwenden wir entsprechend die Bezeichnungen a und a_1 für die beiden Bilinearformen. Nach Satz 5.4 gilt die Variationsgleichung

$$a(u, v) = a_1(u_1, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in H_{\diamond}^1(\Omega). \quad (7.2)$$

Für ein noch zu wählendes $\omega \in \mathbb{R}$ (vgl. (7.4) weiter unten) definieren wir nun

$$w := u - \frac{1}{\sigma} u_1 - \omega \quad \text{und} \quad \rho := \log \sigma.$$

Nach Voraussetzung sind ρ und $1/\sigma$ in $\overline{\Omega}$ stetig differenzierbar: Es gilt

$$\text{grad} \frac{1}{\sigma} = -\frac{1}{\sigma^2} \text{grad} \sigma = -\frac{1}{\sigma} \text{grad} \rho.$$

Folglich ist

$$\text{grad} w = \text{grad} u - \frac{1}{\sigma} \text{grad} u_1 - u_1 \text{grad} \frac{1}{\sigma} = \text{grad} u - \frac{1}{\sigma} \text{grad} u_1 + \frac{u_1}{\sigma} \text{grad} \rho,$$

und

$$\sigma |\text{grad} w|^2 = \sigma \text{grad} u \cdot \text{grad} w - \text{grad} u_1 \cdot \text{grad} w + u_1 \text{grad} \rho \cdot \text{grad} w. \quad (7.3)$$

Offen ist noch die Wahl von ω . Diese treffen wir so, daß $w \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ gilt, also setzen

$$\omega := \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Gamma} u \, ds - \int_{\Gamma} \frac{u_1}{\sigma} \, ds \right) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{u_1}{\sigma} \, ds. \quad (7.4)$$

Damit folgt aus (7.2) und (7.3)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma |\operatorname{grad} w|^2 dx &= a(u, w) - a_1(u_1, w) + \int_{\Omega} u_1 \operatorname{grad} \rho \cdot \operatorname{grad} w dx \\ &= \int_{\Omega} u_1 \operatorname{grad} \rho \cdot \operatorname{grad} w dx. \end{aligned}$$

Da die (vektorwertige) Funktion $\operatorname{grad} \rho$ in $\overline{\Omega}$ stetig ist, kann $|\operatorname{grad} \rho|$ durch eine positive Konstante C abgeschätzt werden, und es ergibt sich

$$\underline{\sigma} \|w\|_{H^1_0(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} |u_1| |\operatorname{grad} w| dx \leq C \|u_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|w\|_{H^1_0(\Omega)},$$

bzw.

$$\|w\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{C}{\underline{\sigma}} \|u_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}. \quad (7.5)$$

u_1 wurde in Beispiel 6.3 explizit ausgerechnet: Demnach ist $u_1(r, \theta) = \frac{1}{|n|} r^{|n|} \tau_n$ und

$$\|u_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} n^{-2} r^{2|n|} \tau_n^2 d\theta r dr = n^{-2} \int_0^1 r^{2|n|+1} dr = \frac{1}{2(|n|+1)n^2}.$$

Zusammen mit (7.5), Satz 4.11 und Korollar 4.10 ergibt sich damit

$$\|w\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \leq 2 \|w\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{2C}{\underline{\sigma}} \|u_1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq \frac{2C}{\underline{\sigma}} |n|^{-3/2}. \quad (7.6)$$

Schließlich ist noch zu beachten, daß die Randwerte von u durch

$$u|_{\Gamma} = w|_{\Gamma} + \left(\frac{1}{\sigma} u_1\right)|_{\Gamma} + \omega = w|_{\Gamma} + \frac{1}{|n|} \frac{\tau_n}{\sigma}|_{\Gamma} + \omega$$

gegeben sind, wobei nach (7.4)

$$\omega = -\frac{1}{2\pi|n|} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} \tau_n d\theta = -\frac{1}{2\pi|n|} \left\langle \frac{1}{\sigma}, \tau_n \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}.$$

Wegen $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$ ist $\frac{1}{\sigma}|_{\Gamma} \in \mathcal{L}^2(\Gamma)$ und somit

$$\left\langle \frac{1}{\sigma}, \tau_n \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Zusammen mit (7.6) bedeutet dies, daß in $\mathcal{L}^2(\Gamma)$ die folgende Gleichung gilt:

$$|n|\Lambda\tau_n = |n|w|_{\Gamma} + \frac{\tau_n}{\sigma}|_{\Gamma} + |n|\omega = \frac{\tau_n}{\sigma}|_{\Gamma} + o(1).$$

Mit $\tau_n^2 + \tau_{-n}^2 = 1/\pi$ ergibt sich daraus sofort die Behauptung. \square

Nach Lemma 7.1 sind also die Randwerte einer Funktion $\sigma \in C_+^1(\overline{\Omega})$ durch die NtD-Abbildung eindeutig festgelegt. Ist σ zudem harmonisch, dann können diese Randwerte durch die Poisson-Integraldarstellung aus Satz 2.8 eindeutig auf den ganzen Einheitskreis Ω fortgesetzt werden. Wir haben also das folgende Ergebnis bewiesen.

Satz 7.2 *Der Operator Λ ist auf dem Raum \mathcal{H}_+ injektiv.*

Das obige Eindeutigkeitsresultat – so elegant und einfach es auf den ersten Blick zu sein scheint – hat jedoch einen entscheidenden Schönheitsfehler. Wegen der Poisson-Integralformel aus Satz 2.8 ist die Menge der harmonischen Funktionen nur eine recht “dünne Menge”, topologisch äquivalent zu einer Menge von Funktionen über einem eindimensionalen Intervall. Ein Eindeutigkeitsatz für eine solche Grundmenge liefert nicht wirklich ein Indiz dafür, daß ein allgemeinerer Leitfähigkeitskoeffizient ebenfalls identifizierbar ist.

8. Identifizierbarkeit von Isolatoren

Wir betrachten in diesem und einigen weiteren Abschnitten ein geringfügig modifiziertes Problem, bei dem der Leitfähigkeitskoeffizient σ die Gestalt

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x \in D \subset \Omega, \\ 1, & x \in \Omega \setminus D, \end{cases} \quad (8.1)$$

besitzt, wobei D ein Gebiet bezeichnet, dessen Abschluss noch vollständig zu Ω gehört. Mit ν bezeichnen wir gleichermaßen die jeweils äußeren Normalen an D bzw. an Ω .

Diese Leitfähigkeitsverteilung modelliert einen Isolator in dem Gebiet D und verallgemeinert unsere bisherige Problemstellung, da im Falle von (8.1) keine positive untere Schranke für σ existiert. Diese Verallgemeinerung betrifft zunächst im wesentlichen die Lösungstheorie, während sich das zu minimierende Funktional genau wie zuvor ergibt:

$$\Phi[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\text{grad } u|^2 dx + \int_{\Gamma} f u d\theta = \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \overline{D}} |\text{grad } u|^2 dx + \int_{\Gamma} f u d\theta.$$

Wie in Kapitel 5 sieht man jedoch, daß dieses Minimierungsproblem eine eindeutig bestimmte Minimalstelle

$$u_0 \in H_{\diamond}^1(\Omega \setminus \overline{D}) := \{u \in H^1(\Omega \setminus \overline{D}) : \int_{\Gamma} u d\theta = 0\}$$

besitzt, die das Variationsproblem

$$a_0(u, v) := \int_{\Omega \setminus \overline{D}} \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx = \int_{\Gamma} f v d\theta \quad \text{für alle } v \in H_{\diamond}^1(\Omega \setminus \overline{D}) \quad (8.2)$$

löst. Man macht sich außerdem schnell klar, daß u_0 eine harmonische Funktion über $\Omega \setminus \overline{D}$ ist, die die Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \begin{cases} 0, & x \in \partial D, \\ f, & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (8.3)$$

erfüllt. Die Randbedingung $\partial u / \partial \nu = 0$ auf ∂D bedeutet, daß kein Strom in D einfließt.

Im Zusammenhang mit der Impedanztomographie spricht man von einem *inversen Hindernisproblem*, wenn das Gebiet D aus Strom-/Spannungsmessungen am Rand Γ von Ω rekonstruiert werden soll. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, daß unter den getroffenen Annahmen ein einfach zusammenhängendes Gebiet D durch Kenntnis eines einzigen Strom-/Spannungspaars $(f, u_0|_\Gamma)$ eindeutig festgelegt ist.

Zu diesem Zweck müssen wir jedoch zunächst zwei Hilfssätze und dann ein wichtiges Eindeutigkeitsresultat für das Cauchy-Problem für harmonische Funktionen beweisen.

Lemma 8.1 *Harmonische Funktionen in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sind analytisch, lassen sich also in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ in eine lokal konvergente Potenzreihe in ξ und η entwickeln.*

Beweis. Für den Beweis betrachten wir einen Punkt $x_0 \in \Omega$ und ein hinreichend kleines $r > 0$, so daß die (offene) Kreisscheibe $B_r(x_0)$ samt ihrem Abschluß in Ω enthalten ist und u in $\overline{B_r(x_0)}$ noch stetig ist. Dann gilt in $B_r(x_0)$ die (entsprechende) Poisson-Integraldarstellung

$$u(x) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{2\pi r} \int_{|x-x_0|=r} \frac{1}{|s - x|^2} u(s) ds, \quad x = (\xi, \eta). \quad (8.4)$$

Den Bruch im Integranden können wir umschreiben in

$$\frac{1}{|s - x|^2} = \frac{1}{4r^2} \frac{1}{1 - (1 - |s - x|^2/4r^2)}$$

Der Ausdruck $1 - |s - x|^2/4r^2$ ist kleiner als Eins auf dem Integrationspfad, also kann der Bruch in eine geometrische Reihe und damit u in eine konvergente Potenzreihe in ξ und η entwickelt werden. \square

Das zweite Hilfsresultat ist das sogenannte *Weylsche Lemma*:

Lemma 8.2 *Ist $u \in C(\Omega)$ und gilt*

$$\int u \Delta v dx = 0$$

für alle $v \in C^2(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω , so ist u eine in Ω zweimal stetig differenzierbare harmonische Funktion.

Beweis. Wir betrachten einen beliebigen Punkt $x_0 \in \Omega$ und ein $r > 0$, so daß $B_r(x_0)$ noch ganz in Ω enthalten ist. Außerdem wählen wir einen Faltungskern $\rho(x)$, d.h. eine nichtnegative Funktion $\rho \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\rho(x) = 0$ für $|x| \geq r/2$ sowie

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x) dx = 1.$$

Durch Stauchen von ρ entstehen die Funktionen $\rho_k(x) = k^2 \rho(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$\rho_k(x) \geq 0, \quad \rho_k(x) = 0 \quad \text{für } |x| \geq \frac{r}{2k} \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \rho_k(x) dx = 1.$$

Nun falten wir die Funktion u mit ρ_k ,

$$u_k(x) := \int_{B_r(x_0)} u(y) \rho_k(x-y) dy, \quad x \in B_r(x_0),$$

und erhalten

$$\Delta u_k(x) = \int_{B_r(x_0)} u(y) \Delta \rho_k(x-y) dy. \quad (8.5)$$

Für $x \in B_{r/2}(x_0)$ und $k \in \mathbb{N}$ verschwindet die Funktion $\rho_k(x-y)$, sobald y in einer Umgebung von $\partial B_r(x_0)$ liegt; nach Voraussetzung ist daher das Integral auf der rechten Seite von (8.5) gleich Null, also u_k harmonisch in $B_{r/2}(x_0)$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Da u in $B_r(x_0)$ gleichmäßig stetig ist, gilt

$$|u_k(x) - u(x)| = \left| \int_{B_r(x_0)} (u(y) - u(x)) \rho_k(x-y) dy \right| \leq \int_{B_r(x_0)} \varepsilon \rho_k(x-y) dy = \varepsilon$$

unabhängig von $x \in B_{r/2}(x_0)$, sofern nur k hinreichend groß (und damit der Träger von ρ_k hinreichend klein) ist. Folglich konvergiert u_k gleichmäßig gegen u in $B_{r/2}(x_0)$.

Verwenden wir dieses Ergebnis in der Poisson-Integraldarstellung für u_k in $B_{r/2}(x_0)$, vgl. (8.4), so können wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz in dieser Darstellung den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ für jedes $x \in B_{r/2}(x_0)$ durchführen und erhalten die entsprechende Poisson-Darstellung für u . Wiederum für $x \in B_{r/2}(x_0)$ können wir hier nun Differentiation und Integration vertauschen und erhalten, daß u zweimal stetig differenzierbar und in einer Umgebung von x_0 harmonisch ist. \square

Für das angesprochene Cauchy-Problem betrachten wir folgendes geometrische Setup: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beliebiges Gebiet mit Rand Γ , $x_0 \in \Gamma$ ein Punkt auf dem Rand und $B_r(x_0)$ eine offene Kreisscheibe um x_0 , die durch Γ in genau zwei Zusammenhangskomponenten B_+ und B_- mit $B_+ \subset \Omega$ und $B_- \cap \Omega = \emptyset$. Ferner bezeichne ν die (bezüglich Ω) äußere Normale an $\Sigma := \Gamma \cap B_r(x_0)$. Dann gilt:

Satz 8.3 *Ist $u \in H^1(\Omega)$ harmonisch in Ω mit*

$$u = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

auf Σ , dann ist $u \equiv 0$ in Ω .

Beweis. Wir setzen u durch Null zu einer stetigen Funktion \hat{u} auf $B_r(x_0)$ fort und zeigen zunächst, daß \hat{u} eine harmonische Funktion in $B_r(x_0)$ ist. Dazu weisen wir die Voraussetzungen des Weylschen Lemmas nach. Ist $v \in C^2(B_r(x_0))$ eine beliebige Funktion mit kompaktem Träger in $B_r(x_0)$, dann folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x_0)} \hat{u} \Delta v \, dx &= \int_{B_+} u \Delta v \, dx \\ &= \int_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds + \int_{\partial B_+ \setminus \Sigma} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds - \int_{B_+} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx \\ &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds - \int_{\partial B_+ \setminus \Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds + \int_{B_+} v \Delta u \, dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

da auf Σ sowohl u als auch der Fluß von u verschwinden und auf $\partial B_+ \setminus \Sigma$ sowohl v als auch der Fluß von v verschwinden. Nach dem Weylschen Lemma 8.2 ist somit \hat{u} harmonisch in $B_r(x_0)$.

Nun wenden wir Lemma 8.1 an und erhalten, daß \hat{u} für festes ξ eine analytische Funktion in η ist. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen muß somit \hat{u} auf dem ganzen Teilstück der Geraden $\xi = \xi_0$ in $B_r(x_0)$ verschwinden, wenn diese Gerade einen nicht-leeren Schnitt mit B_- aufweist. Entsprechend kann man für die Geraden mit festem $\eta = \eta_0$ argumentieren. Auf diese Weise ergibt sich, daß \hat{u} auf der ganzen Kreisscheibe $B_r(x_0)$ und somit u auf dem Schnitt $B_r(x_0) \cap B_+$ verschwindet. Wählen wir nun eine Überdeckung von Ω durch offene Kreisscheiben in Ω und wiederholen dieses Argument, so erhalten wir schließlich, daß u in dem ganzen Gebiet Ω verschwinden muß. \square

Bemerkung 8.4 Man spricht von einem Cauchy-Problem für eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung im \mathbf{R}^n , wenn auf *einer* $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit Σ sowohl eine Randbedingung für u als auch für $\partial u / \partial \nu$ vorgegeben wird.

Wir kommen nun zu dem angekündigten Eindeutigkeitsresultat für das inverse Hindernisproblem.

Satz 8.5 *Seien (O.B.d.A.) Ω wieder der Einheitskreis im \mathbf{R}^2 und $D_1, D_2 \subset \Omega$ einfach zusammenhängende Gebiete, deren Ränder vollständig in Ω enthalten sind. Ferner bezeichne u_i , $i = 1, 2$, die harmonische Funktion, die für ein festes $f \in \mathcal{L}^2_\diamond(\Gamma) \setminus \{0\}$ die Neumann-Randbedingungen (8.3) für $D = D_i$ erfüllt. Gilt $u_1 = u_2$ auf Γ , dann ist $D_1 = D_2$.*

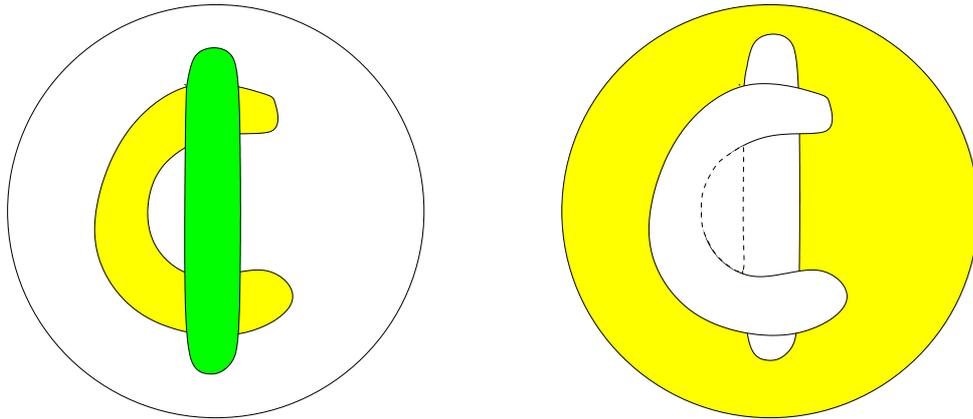


Fig. 8.1. Zwei verschiedene Einschlüsse D_1 und D_2

Beweis. Wir illustrieren zunächst die Situation anhand von Abbildung 8.1 (links). Die Abbildung zeigt zwei verschiedene (einfach zusammenhängende) Einschlüsse D_1 und D_2 , wobei in diesem Fall das dunklere gezeichnete Gebiet D_2 das hellere Gebiet D_1 teilweise verdeckt. Die Vereinigung $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ ist nicht notwendigerweise mehr einfach zusammenhängend (etwa im dem in der Abbildung gezeigten Fall). Wir bezeichnen daher im weiteren mit D^c den Schnitt der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$ mit Ω (das dunkel eingefärbte Gebiet in Abbildung 8.1 rechts).

Nach Voraussetzung hat $u_1 - u_2$ homogene Neumann- und Dirichlet-Randbedingungen auf Γ ; nach Satz 8.3 ist somit $u_1 \equiv u_2$ auf dem gemeinsamen Definitionsgebiet D^c . Wir unterscheiden nun drei Fälle und zeigen, daß in jedem dieser Fälle u_2 in $\Omega \setminus \overline{D_2}$ konstant ist.

1. $D_1 \cap D_2 = \emptyset$:

In diesem Fall ist u_2 eine harmonische Fortsetzung von u_1 in das Gebiet D_1 . Wegen

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial D_1$$

ist u_2 in D_1 eine harmonische Funktion mit homogenen Neumann-Randwerten. Folglich ist u_2 in D_1 konstant und (wiederum nach Satz 8.3) dann in ganz $\Omega \setminus \overline{D_2}$ konstant.

2. $D_2 \subset D_1$:

In diesem Fall setzt u_2 die Funktion u_1 harmonisch in das Gebiet $\Omega' := D_2 \setminus \overline{D_1}$ fort. Somit gilt

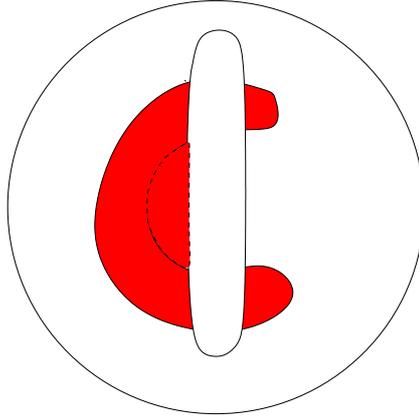


Fig. 8.2. Die Menge Ω' im 3. Fall des Beweises bei der Konstellation aus Abb. 8.1

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega' \cap \partial D_1,$$

während ohnehin nach Voraussetzung $\partial u_2/\partial \nu = 0$ auf $\partial\Omega' \cap \partial D_2$ erfüllt ist. Folglich ist u_2 eine harmonische Funktion mit homogenen Neumann-Randwerten auf dem Gebiet Ω' und wie im ersten Fall ergibt sich, daß u_2 eine konstante Funktion ist.

3. In den verbliebenen Fällen kann u_1 durch u_2 harmonisch nach $\Omega' := \Omega \setminus (D^c \cup D_2)$ fortgesetzt werden, vgl. Abbildung 8.2. Wie im vorangegangenen Fall setzt sich der Rand von Ω' aus den beiden Teilen $\partial\Omega'_i := \partial\Omega' \cap \partial D_i$, $i = 1, 2$, zusammen, in denen die Neumann-Randwerte von u_2 aus den genannten Gründen verschwinden. Also ergibt sich auch in diesem Fall, daß u_2 konstant ist.

Somit ist gezeigt, daß u_2 in $\Omega \setminus \overline{D_2}$ konstant ist, doch dies steht im Widerspruch zu $f \neq 0$. Folglich muß $D_1 = D_2$ gelten □

Bemerkung 8.6 Es sei noch einmal betont, daß wir gezeigt haben, daß ein einziges Strom-/Spannungspaar ausreicht, um einen Isolator zu identifizieren. Dieses Eindeutigkeitsresultat bleibt sogar noch gültig, wenn D_1 und D_2 aus mehreren Zusammenhangskomponenten bestehen, die allesamt einfach zusammenhängend sind oder wenn D_2 die leere Menge ist (in welchem Fall u_2 die in Ω harmonische Funktion mit Neumann-Randbedingung f auf Γ ist).

Daß für die Identifikation des Isolators nicht die gesamte NtD-Abbildung notwendig ist, mag man so erklären, daß das Gebiet D lediglich durch eine einparametrische

Randkurve spezifiziert werden kann, also (prinzipiell) eine einparametrische Meßfunktion ausreichen sollte.

9. Zur Instabilität von EIT

Eine berühmte These von Hadamard (1923) besagt, daß ein Problem *gut gestellt* ist, falls

- zu jedem Datensatz eine Lösung existiert,
- die Lösung eindeutig bestimmt ist,
- die Lösung stetig von den Daten abhängt.

Probleme, bei denen eine dieser Eigenschaften verletzt ist, heißen *schlecht gestellt*.

In diesem Sinn ist etwa das Meßproblem der EIT (d.h., die Bestimmung des NtD-Operators Λ) gut gestellt: Existenz und Eindeutigkeit wurden in Kapitel 5 nachgewiesen; stetige Abhängigkeit läßt sich auch beweisen.

Uns interessiert jedoch mehr das *inverse Problem*, also die Rekonstruktion des Leitfähigkeitskoeffizienten σ aus einem gegebenen Hilbert-Schmidt Operator $\Lambda = \Lambda(\sigma)$. Im folgenden werden wir untersuchen, wie es bei dem inversen Problem mit der stetigen Abhängigkeit aussieht; dies ist natürlich vor allem bei numerischen Implementierungen von größter Bedeutung.

Wir betrachten im folgenden den Fall eines Körpers, der bis auf einen kleinen Kreis um den Nullpunkt homogen ist. Genauer: σ sei radialsymmetrisch mit

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_0, & 0 \leq r \leq \rho, \\ 1, & \rho < r \leq 1. \end{cases} \quad (9.1)$$

Hierbei sei σ_0 eine positive Konstante. Gemäß unserer Ergebnisse aus Kapitel 6 ist die zugehörige NtD-Abbildung $\Lambda(\sigma)$ also durch ihre Eigenwerte vollständig charakterisiert, es ist

$$\Lambda(\sigma)\tau_n = \lambda_n\tau_n, \quad n \neq 0,$$

mit $\lambda_n = y_n(1)$, wobei y_n der radiale Anteil des Lösungspotentials $u_n(x) = y_n(r)\tau_n(\theta)$ ist.

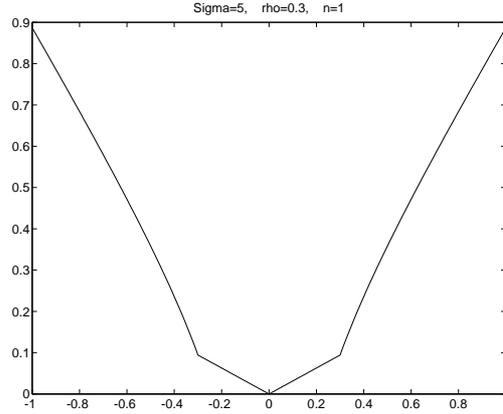


Fig. 9.1. Die Lösung $y_n(r)$ des gestörten Problems

Schon früher haben wir gesehen, daß $r^n \tau_n$ und $r^{-n} \tau_n$ radiale harmonische Funktionen darstellen, wobei letztere nur für $r > 0$ wohldefiniert ist. Wir machen daher einen Lösungsansatz

$$y_n(r) = \begin{cases} \alpha_n r^n, & 0 \leq r \leq \rho, \\ \beta_n r^n - (n^{-1} - \beta_n) r^{-n}, & \rho < r \leq 1, \end{cases} \quad (9.2)$$

und versuchen die Koeffizienten α_n und β_n so zu bestimmen, daß y und $\sigma y'$ jeweils stetig sind. Dies führt auf die folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \beta_n \rho^n - (n^{-1} - \beta_n) \rho^{-n} &= \alpha_n \rho^n, \\ \beta_n \rho^n + (n^{-1} - \beta_n) \rho^{-n} &= \sigma_0 \alpha_n \rho^n. \end{aligned}$$

Elimination von α_n ergibt

$$(\sigma_0 - 1) \beta_n \rho^n = (\sigma_0 + 1) (n^{-1} - \beta_n) \rho^{-n},$$

beziehungsweise

$$\beta_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1} \rho^{2n} \right)^{-1}. \quad (9.3)$$

Der Vollständigkeit halber sei noch angefügt, daß

$$\alpha_n = \frac{2}{\sigma_0 + 1} \beta_n.$$

Nun müssen wir beweisen, daß der gefundene Kandidat y_n tatsächlich zu dem Lösungspotential $u_n = y_n \tau_n$ führt. Dazu überprüfen wir die Variationsgleichung

$$a(u_n, v) = \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} u_n \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \ell(v) \quad (9.4)$$

für alle $v \in H_{\diamond}^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Wegen der Linearität in v können wir uns weiterhin auf Testfunktionen beschränken, die überdies die Form $v = y(r)\tau_m \in \mathcal{T}_m$, $m \in \mathbb{Z}$, besitzen. In diesem Fall folgt, vgl. (4.6),

$$a(u_n, v) = \int_0^1 \sigma y'_n y' r \int_0^{2\pi} \tau_n \tau_m d\theta dr + nm \int_0^1 \sigma \frac{y_n y}{r} \int_0^{2\pi} \tau_{-n} \tau_{-m} d\theta dr,$$

und diese Integrale verschwinden – genau wie $\ell(v) = y(1) \int \tau_n \tau_m d\theta$ – für $n \neq m$. Für $n = m$ hingegen ergibt sich

$$\begin{aligned} a(u_n, v) &= \int_0^1 \sigma y'_n y' r dr + n^2 \int_0^1 \sigma \frac{y_n y}{r} dr \\ &= \int_0^\rho \sigma_0 r y'_n y' dr + \int_\rho^1 r y'_n y' dr + \int_0^1 \frac{n^2}{r} \sigma y_n y dr \\ &= \sigma_0 r y'_n y \Big|_0^\rho + r y'_n y \Big|_\rho^1 - \int_0^\rho \sigma_0 (r y'_n)' y dr - \int_\rho^1 (r y'_n)' y dr + \int_0^1 \frac{n^2}{r} \sigma y_n y dr \\ &= y(1) + \rho y(\rho) (\sigma_0 y'_n(\rho-) - y'_n(\rho+)) \\ &\quad - \int_0^\rho \sigma y ((r y'_n)' - \frac{n^2}{r} y_n) dr - \int_\rho^1 \sigma y ((r y'_n)' - \frac{n^2}{r} y_n) dr \\ &= y(1), \end{aligned}$$

denn sowohl r^n als auch r^{-n} sind Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung $(r y'_n)' = n^2 y_n / r$. Andererseits ist auch

$$\ell(v) = \int_{\Gamma} f v d\theta = y(1) \int_{\Gamma} \tau_n^2 d\theta = y(1).$$

Also löst u_n die Variationsgleichung für einen dichten Teilraum von Testfunktionen $v \in H_{\diamond}^1(\Omega)$ und ist somit das gesuchte Lösungspotential.

Uns interessiert jedoch ausschließlich der Eigenwert λ_n der NtD-Abbildung, und zwar

$$\lambda_n = y_n(1) = \beta_n - (n^{-1} - \beta_n) = \frac{1}{n} \frac{1 - \frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1} \rho^{2n}}{1 + \frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1} \rho^{2n}}, \quad (9.5)$$

vgl. (9.2) und (9.3). Zur Erinnerung: Der entsprechende Eigenwert bei konstanter Leitfähigkeit $\sigma \equiv 1$ ist n^{-1} . Bezeichnet im weiteren $\Lambda(1)$ die NtD-Abbildung zu $\sigma \equiv 1$, so folgt für die Differenz

$$\begin{aligned} |||\Lambda(\sigma) - \Lambda(1)|||^2 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^{-1})^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \left(\frac{\frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1} \rho^{2n}}{1 + \frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1} \rho^{2n}} \right)^2 \\ &\leq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\sigma_0 - 1}{\sigma_0 + 1} \rho^{2n} \right)^2 \leq 8 \rho^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}. \end{aligned}$$

Demnach gilt

$$|||\Lambda(\sigma) - \Lambda(1)||| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (9.6)$$

ohne daß gleichzeitig $\|\sigma - 1\|_\infty = |\sigma_0 - 1|$ gegen 0 konvergieren würde. Mit anderen Worten, bezüglich der Supremumsnorm liegt keine stetige Abhängigkeit des Leitfähigkeitskoeffizienten von der NtD-Abbildung vor.

Bekanntlich hängt jedoch die Stetigkeit wesentlich von den verwendeten Topologien ab, und man könnte hoffen, daß andere (praxisrelevante) Topologien zu stetiger Abhängigkeit führen. Hierbei ist sogleich anzumerken, daß die Hilbert-Schmidt Norm einen sinnvollen Praxisbezug hat, da ihre Verwendung impliziert, daß jede gemessene Spannungsserie in gleicher Weise (\mathcal{L}^2) gestört ist. Da die Spektralnorm immer kleiner ist als die Hilbert-Schmidt Norm, überträgt sich fehlende Stabilität übrigens sofort auch auf diese Norm.

Andererseits könnte man für den Leitfähigkeitskoeffizienten mit einer schwächeren Konvergenz als der gleichmäßigen zufrieden sein; wegen der Hilbertraumstruktur ist hierbei etwa die Frage nach \mathcal{L}^2 -Stabilität von Bedeutung. Offensichtlich konvergiert in dem obigen Beispiel bei festem σ_0 der Leitfähigkeitskoeffizient σ gegen 1 in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ für $\rho \rightarrow 0$. Wählt man allerdings $\sigma_0 = \sigma_0(\rho)$, und zwar etwa

$$\sigma_0(\rho) = 1 + \rho^{-1},$$

dann gilt (9.6) weiterhin; andererseits ist jedoch nun

$$\|\sigma - 1\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 = \pi \rho^2 (\sigma_0 - 1)^2 = \pi,$$

konstant für alle ρ . Wir fassen zusammen:

Satz 9.1 *Das EIT-Problem ist schlecht gestellt: Selbst wenn $|||\Lambda_k - \Lambda||| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, brauchen weder in $\mathcal{L}_+^\infty(\Omega)$ noch in $\mathcal{L}^2(\Omega)$ die zugehörigen Leitfähigkeitskoeffizienten σ_k gegen den Grenzkoeffizienten σ zu konvergieren.*

Zum Abschluß halten wir noch fest, daß die Eigenwerte λ_n aus (9.5) auch im Grenzfall $\sigma_0 = 0$ wohldefiniert sind,

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \frac{1 + \rho^{2n}}{1 - \rho^{2n}}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (9.7)$$

Dieser Grenzfall entspricht einem isolierenden Einschluß in dem Gebiet $|r| < \rho$; das oben angegebene Lösungspotential

$$u_n(x) = y_n(r) \tau_n(\theta), \quad r = |x| \in [\rho, 1],$$

ist harmonisch in $\rho < |x| < 1$ und erfüllt für $r = 1$ bzw. $r = \rho$ die Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \begin{cases} y'_n(1)\tau_n = \tau_n, & |x| = 1, \\ -y'_n(\rho)\tau_n = 0, & |x| = r, \end{cases}$$

d.h. u_n ist die klassische Lösung für den Isolatorfall. Folglich ist in der Tat τ_n Eigenfunktion der entsprechenden NtD Λ_0 und $\lambda_n = y_n(1)$ aus (9.7) der zugehörige Eigenwert.

10. Die Faktorisierungsmethode: Theoretische Grundlagen

Wir beschreiben nun ein konstruktives Verfahren, um isolierende Einschlüsse $D \subset \Omega$ zu finden, sofern die NtD-Abbildung Λ_0 für diese Situation gegeben ist. Ohne Einschränkung wollen wir wie in (8.1) wieder davon ausgehen, daß die Hintergrundleitfähigkeit in $\Omega \setminus \overline{D}$ gleich Eins ist. Neben Λ_0 benötigt das Verfahren noch Referenzdaten, d.h. die NtD-Abbildung Λ für den Fall, daß D die leere Menge ist.

Nun definieren wir den linearen Raum

$$\mathcal{X} := \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u|_{\Omega \setminus \overline{D}} \in H_{\diamond}^1(\Omega \setminus \overline{D}), u|_D \in H^1(D), \int_{\partial D} [u] ds = 0 \},$$

wobei wir mit $[u]$ den Sprung von u quer zum Rand von D bezeichnet haben:

$$[u](x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u(x + \varepsilon\nu) - u(x - \varepsilon\nu)), \quad x \in \partial D.$$

Benennen wir generisch für ein allgemeines $u \in \mathcal{X}$ die Einschränkungen $u|_{\Omega \setminus \overline{D}}$ und $u|_D$ mit u^+ bzw. u^- , so haben diese nach Voraussetzung und nach Satz 4.11 jeweils eine wohldefinierte Spur $u^{\pm}|_{\partial D} \in \mathcal{L}^2(\partial D)$ und es gilt

$$[u] = u^+|_{\partial D} - u^-|_{\partial D} \in \mathcal{L}^2(\partial D).$$

Auf \mathcal{X} können wir durch

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{X}} = \int_{\Omega \setminus \partial D} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx$$

ein Skalarprodukt definieren; dabei ist zu beachten, daß die jeweiligen Gradienten in der Regel nur in den beiden Teilgebieten wohldefiniert sind, der Ausschluß der Nullmenge aufgrund des Integranden also notwendig ist. Zum Nachweis der Definitheit dieses Skalarprodukts argumentiert man wie folgt: Aus

$$0 = \langle u, u \rangle_{\mathcal{X}} = \int_{\Omega \setminus \partial D} |\text{grad } u|^2 \, dx$$

folgt, daß der Gradient von u in den beiden Teilgebieten D und $\Omega \setminus \overline{D}$ verschwindet, u in diesen beiden Teilgebieten also konstante Werte u^+ und u^- annimmt. Da die Konstante u^+ zu $H_\diamond^1(\Omega \setminus \overline{D})$ gehören soll, also insbesondere die Spur auf Γ verschwindendes Integralmittel haben soll, muß $u^+ = 0$ gelten. Damit ist $[u]$ konstant gleich $-u^-$ und es folgt

$$0 = \int_{\partial D} [u] ds = -u^- |\partial D|,$$

d.h. $u^- = 0$. Also ist $u \equiv 0$ in Ω , was zu zeigen war.

Offensichtlich ist $H_\diamond^1(\Omega)$ ein Teilraum von \mathcal{X} . Das Orthogonalkomplement von $H_\diamond^1(\Omega)$ in \mathcal{X} spielt im folgenden eine wichtige Rolle.

Lemma 10.1 *Sei \mathcal{K} die Menge aller $w \in \mathcal{X}$, die in $\Omega \setminus \partial D$ harmonisch sind mit*

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] = 0 \quad \text{auf } \partial D.$$

Dann ist \mathcal{K} das orthogonale Komplement von $H_\diamond^1(\Omega)$ in \mathcal{X} .

Beweis. Für $v \in H_\diamond^1(\Omega)$ und eine in $\Omega \setminus \partial D$ harmonische Funktion $w \in \mathcal{K}$ mit Komponenten w^+ und w^- gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \partial D} \text{grad } v \cdot \text{grad } w \, dx &= \int_\Gamma v \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_{\partial D} v \frac{\partial w^+}{\partial \nu} ds + \int_{\partial D} v \frac{\partial w^-}{\partial \nu} ds \\ &= \int_\Gamma v \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_{\partial D} v \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] ds, \end{aligned} \quad (10.1)$$

da v eine wohldefinierte Spur auf ∂D besitzt. Für $w \in \mathcal{K}$ verschwinden beide Integrale und somit gilt $w \perp v$ im Sinne des Skalarprodukts auf \mathcal{X} .

Sei nun w im Orthogonalkomplement von $H_\diamond^1(\Omega)$ und $v \in C^2(\Omega \setminus \overline{D})$ habe kompakten Träger. Setzen wir v durch Null auf D fort, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \overline{D}} w \Delta v \, dx &= \int_\Gamma w \frac{\partial v}{\partial \nu} ds - \int_{\partial D} w \frac{\partial v}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega \setminus \overline{D}} \text{grad } w \cdot \text{grad } v \, dx \\ &= \int_\Gamma w \frac{\partial v}{\partial \nu} ds - \int_{\partial D} w \frac{\partial v}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega \setminus \partial D} \text{grad } w \cdot \text{grad } v \, dx, \end{aligned}$$

und alle Integrale in der letzten Zeile verschwinden aufgrund der Konstruktion. Nach dem Weylschen Lemma 8.2 ist somit w harmonisch in $\Omega \setminus \overline{D}$ und analog sieht man, daß w auch in D harmonisch ist. Demnach gilt (10.1) für jedes $v \in H_\diamond^1(\Omega)$, wobei die linke Seite aufgrund der Orthogonalität Null ist. Folglich müssen die Neumann-Randwerte von w auf Γ bzw. ihr Sprung quer zu ∂D (als Funktionale auf $H_\diamond^1(\Omega)$) verschwinden. \square

Wir wählen nun einen festen Randstrom $f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ und benennen mit $u \in H_\diamond^1(\Omega)$ das zugehörige Lösungspotential bei homogener Leitfähigkeit $\sigma = 1$ im gesamten Gebiet Ω sowie mit $u_0 \in H_\diamond^1(\Omega \setminus \overline{D})$ die Lösung von (8.2), also das Potential, daß sich entsprechend im Falle eines Isolators in D ergibt. Dieses zweitgenannte Potential können wir durch die Konstante

$$u_0^- := \int_{\partial D} u_0 ds / |\partial D|$$

zu einem Potential $\hat{u}_0 \in \mathcal{X}$ fortsetzen, denn dann gilt

$$\int_{\partial D} [\hat{u}_0] ds = \int_{\partial D} u_0 ds - u_0^- |\partial D| = 0.$$

Als nächstes definieren wir den Operator

$$K : \begin{cases} \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma) & \rightarrow \mathcal{X}, \\ f & \mapsto \hat{u}_0 - u, \end{cases} \quad (10.2)$$

der aufgrund unserer Untersuchungen in Kapitel 5 und der obigen Vorüberlegungen offensichtlich stetig ist.

Satz 10.2 *Der Bildraum von K liegt dicht in \mathcal{K} und der adjungierte Operator $K^* : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ erfüllt*

$$K^*v = \begin{cases} v|_\Gamma, & v \in \mathcal{K}, \\ 0, & v \in H_\diamond^1(\Omega). \end{cases}$$

Beweis. Sei zunächst $w = Kf$ für ein $f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$, d.h. $w = \hat{u}_0 - u$ mit \hat{u}_0 und u wie zuvor. Dann gilt für jedes $v \in H_\diamond^1(\Omega)$

$$\langle w, v \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \hat{u}_0, v \rangle_{\mathcal{X}} - \langle u, v \rangle_{\mathcal{X}} = \int_{\Omega \setminus \overline{D}} \text{grad } u_0 \cdot \text{grad } v dx - \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx,$$

wobei wir bei dem hinteren Integral über den Rand ∂D hinweg integrieren dürfen, da sowohl u als auch v zu $H_\diamond^1(\Omega)$ gehören. Mit der Bilinearform a_0 aus (8.2) und der Bilinearform a für die homogene Leitfähigkeit $\sigma \equiv 1$ erhalten wir so aus den beiden Variationsgleichungen, daß $w \perp v$:

$$\langle w, v \rangle_{\mathcal{X}} = a_0(u_0, v) - a(u, v) = \ell(v) - \ell(v) = 0.$$

Folglich gilt $\mathcal{R}(K) \subset \mathcal{K}$ und $\mathcal{N}(K^*) = \overline{\mathcal{R}(K)}^\perp \supset \mathcal{K}^\perp = H_\diamond^1(\Omega)$. Damit ist gezeigt, daß $K^*v = 0$ für $v \in H_\diamond^1(\Omega)$.

Sei nun $v \in \mathcal{K}$ und $f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ beliebig; \hat{u}_0 und u seien wie zuvor definiert. Dann gilt

$$\langle Kf, v \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \hat{u}_0, v \rangle_{\mathcal{X}} - \langle u, v \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \hat{u}_0, v \rangle_{\mathcal{X}},$$

da u und v nach Lemma 10.1 aufeinander senkrecht stehen. Es folgt

$$\langle Kf, v \rangle = \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \text{grad } u_0 \cdot \text{grad } v \, dx = a_0(u_0, v) = \int_{\Gamma} f v \, ds = \langle f, v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)},$$

d.h., es gilt $K^*v = v|_{\Gamma}$.

Nun müssen wir noch zeigen, daß $\mathcal{R}(K)$ dicht in \mathcal{K} liegt. Ansonsten gäbe es ein $0 \neq v \in \mathcal{K} \cap \overline{\mathcal{R}(K)}^{\perp} = \mathcal{K} \cap \mathcal{N}(K^*)$ und wegen $K^*v = v|_{\Gamma}$ hätte v verschwindende Dirichlet-Randwerte auf Γ . Andererseits ist v wegen $v \in \mathcal{K}$ in $\Omega \setminus \bar{D}$ harmonisch mit verschwindenden Neumann-Randwerten auf Γ . Wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Cauchy-Problems für harmonische Funktionen (Satz 8.3) ist demnach $v \equiv 0$ in $\Omega \setminus \bar{D}$. Aus $v \in \mathcal{K}$ folgt weiterhin, daß die harmonische Funktion $v|_D$ verschwindende Neumann-Randwerte auf ∂D besitzt und somit auch in D konstant gleich v^- ist. Also ist $[v] = -v^-$ und da dieser Sprung verschwindendes Integralmittel aufweisen muß, folgt $v^- = 0$. Also ist $v \equiv 0$ und damit $\mathcal{R}(K)$ dicht in \mathcal{K} . \square

Als wichtige Folgerung aus diesem Resultat halten wir fest:

Korollar 10.3 *Mit K aus (10.2) gilt $\Lambda_0 - \Lambda = K^*K$.*

Beweis. Mit derselben Notation wie zuvor gilt $Kf = \hat{u}_0 - u \in \mathcal{K}$ und

$$(\Lambda_0 - \Lambda)f = (u_0 - u)|_{\Gamma} = (\hat{u}_0 - u)|_{\Gamma} = K^*Kf.$$

\square

Im folgenden Abschnitt präsentieren wir ein konstruktives Verfahren, mit dem für einen beliebigen Punkt $z \in \Omega$ überprüft werden kann, ob $z \in D$ liegt oder nicht. Da diese Methode wesentlich auf der obigen Faktorisierung von $\Lambda_0 - \Lambda$ aufbaut, spricht man in diesem Zusammenhang von der *Faktorisierungsmethode*.

11. Die Faktorisierungsmethode: Algorithmische Umsetzung

Wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, ist $\Lambda_0 - \Lambda : \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator mit Eigenwerten λ_n und zugehörigen (orthonormierten) Eigenfunktionen $f_n \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$, $n \in \mathbb{N}$. Der Beweis von Satz 6.2 läßt sich auf die hier vorliegende Situation wörtlich übertragen und besagt, daß die Eigenwerte λ_n allesamt nichtnegativ sind. Für diesen Spezialfall können wir sogar leicht nachweisen, daß sie positiv sein müssen: Andernfalls gibt es nämlich ein $f \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma) \setminus \{0\}$ mit $\Lambda_0 f = \Lambda f$, d.h. die Dirichlet-Randwerte der Lösungspotentiale u_0 und u zum Randstrom f stimmen überein. Nach Bemerkung 8.6 widerspricht das jedoch der Identifizierbarkeit von D aus einer einzigen (und beliebig wählbaren) Strom-/Spannungsmessung.

Wir nehmen im weiteren an, daß die Eigenwerte λ_n (die für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergieren) monoton nicht aufsteigend angeordnet seien und setzen

$$v_n := K f_n / \sqrt{\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (11.1)$$

Offensichtlich gilt dann (wegen Korollar 10.3)

$$K^* v_n = K^* K f_n / \sqrt{\lambda_n} = (\Lambda_0 - \Lambda) f_n / \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n} f_n$$

und

$$\begin{aligned} \langle v_m, v_n \rangle_{\mathcal{X}} &= \frac{\langle K f_m, K f_n \rangle_{\mathcal{X}}}{(\lambda_m \lambda_n)^{1/2}} = \frac{\langle f_m, K^* K f_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}}{(\lambda_m \lambda_n)^{1/2}} = \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \right)^{1/2} \langle f_m, f_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \\ &= \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Die $\{v_n\}$ bilden also eine Orthonormalbasis von $\overline{\mathcal{R}(K)} = \mathcal{K}$; die Tripel $\{(f_n, v_n, \sqrt{\lambda_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ nennt man *Singulärwertzerlegung* von K .

Da $K^* K = \Lambda_0 - \Lambda$ injektiv ist, muß auch K selbst injektiv sein. Wegen $\mathcal{N}(K) = \overline{\mathcal{R}(K)^*}^\perp$ folgt hieraus, daß der Bildraum von K^* dicht liegt in $\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$; wie wir gleich sehen werden, ist der Bildraum von K^* jedoch ein echter Unterraum von $\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$.

Entscheidend für die Faktorisierungsmethode ist nun, daß wir diesen Bildraum auf zweierlei Art charakterisieren können. Die erste Charakterisierung ist rein funktionalanalytisch und kann anhand der gegebenen Daten (den NtD-Abbildungen Λ_0 und Λ) vollzogen werden; die zweite Charakterisierung erfolgt über die Lage des Isolators D . Beide Charakterisierungen zusammen führen auf den gesuchten Algorithmus zur Lösung des inversen Problems.

Satz 11.1 (Picard-Kriterium) *Eine Funktion $g \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ gehört genau dann zu $\mathcal{R}(K^*)$, wenn die unendliche Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, f_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2}{\lambda_n} \quad (11.2)$$

konvergiert.

Beweis. Sei zunächst $g = K^*v$ mit $v \in \mathcal{X}$. Dann kann v in zwei Komponenten $v_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$ und $v_0 \in H_\diamond^1(\Omega)$ orthogonal zerlegt und $v_{\mathcal{K}}$ in die Orthonormalbasis $\{v_n\}$ entwickelt werden:

$$v = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n \rangle_{\mathcal{X}} v_n.$$

Dabei ist $(\langle v, v_n \rangle_{\mathcal{X}})_n \in \ell^2$, also quadratisch summierbar. Es folgt

$$g = K^*v = K^*v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n \rangle_{\mathcal{X}} K^*v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \langle v, v_n \rangle_{\mathcal{X}} f_n$$

und

$$\langle g, f_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} = \sqrt{\lambda_n} \langle v, v_n \rangle_{\mathcal{X}}.$$

Demnach ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, f_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n \rangle_{\mathcal{X}}^2 < \infty.$$

Für die Umkehrung nehmen wir an, daß die besagte Reihe für ein gegebenes $g \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ konvergiert, so daß

$$v := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, f_n \rangle_{\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)}}{\sqrt{\lambda_n}} v_n$$

in $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ wohldefiniert ist. Dann ist aber

$$K^*v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, f_n \rangle_{\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)}}{\sqrt{\lambda_n}} K^*v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, f_n \rangle_{\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)} f_n = g,$$

also $g \in \mathcal{R}(K^*)$. □

Man beachte, daß aus Satz 11.1 insbesondere folgt, daß $\mathcal{R}(K^*)$ nicht mit dem gesamten Raum $\mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ übereinstimmt, da für ein generisches Element $g \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ die Reihe (11.2) in der Regel nicht konvergieren wird. (Die Nenner konvergieren ja gegen Null für $n \rightarrow \infty$.)

Sind jedoch Λ_0 und Λ gegeben, so können wir prinzipiell die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\Lambda_0 - \Lambda$ bestimmen und damit für jedes $g \in \mathcal{L}_\diamond^2(\Gamma)$ anhand des Picard-Kriteriums überprüfen, ob g zu $\mathcal{R}(K^*)$ gehört oder nicht. In Verbindung mit dem zweiten, nun folgenden Kriterium wird dies zum Schlüssel der Faktorisierungsmethode. Um dieses Kriterium zu formulieren, müssen wir zuerst das sogenannte *Dipolpotential* im Punkt $z \in \Omega$ mit *Dipolmoment* $d \in \mathbb{R}^2$, $|d| = 1$, einführen:

$$w_{z,d}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(x, z + td) - G(x, z)}{t}, \quad x \neq z. \quad (11.3)$$

Hierbei ist $G(x, y)$ wie in Kapitel 2 die Grundlösung der Laplace-Gleichung. Mit Hilfe von (2.3) erhalten wir daher

$$w_{z,d}(x) = d \cdot \text{grad}_y G(x, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{d \cdot (x - z)}{|x - z|^2}. \quad (11.4)$$

Wir modifizieren nun dieses Dipolpotential, indem wir das am Einheitskreis gespiegelte Dipolpotential $w_{z,d}^*$ hinzufügen:

$$w_{z,d}^*(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(x, (z + td)^*) - G(x, z^*)}{t}, \quad x \neq z;$$

hierbei bezeichnet wieder $y^* =: S(y)$ den Spiegelpunkt (2.5) von y . Wegen

$$(z + td)^* = z^* + t d \cdot \text{grad} S(z) + O(t^2)$$

ist $w_{z,d}^*$ das Dipolpotential zu einem Dipol in z^* mit Dipolachse

$$\bar{d} := d \cdot \text{grad} S(z) = \frac{1}{|z|^4} (|z|^2 d - 2(d \cdot z) z).$$

In Analogie zu (11.4) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} w_{z,d}^*(x) &= w_{z^*,\bar{d}}(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{d} \cdot (x - z^*)}{|x - z^*|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{|z|^2 d \cdot x - d \cdot z - 2(d \cdot z)(z \cdot x - 1)}{||z|^2 x - z|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{|z|^2 d \cdot x + (1 - 2z \cdot x)d \cdot z}{||z|^2 x - z|^2}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Lemma 11.2 Sei $z \neq 0$ und seien $w_{z,d}$ bzw. $w_{z,d}^*$ durch (11.4) und (11.5) gegeben. Dann ist

$$u_{z,d} := w_{z,d} + w_{z,d}^* - \frac{1}{2\pi} \frac{d \cdot z}{|z|^2} \quad (11.6)$$

eine in $\Omega \setminus \{z\}$ harmonische Funktion mit

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u_{z,d}(x) = 0 \quad \text{und} \quad u_{z,d}(x) := 2w_{z,d}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d \cdot (x - z)}{|x - z|^2}, \quad x \in \Gamma.$$

Insbesondere ist $\int_{\Gamma} u_{z,d}(s) ds = 0$.

Beweis. Nach Konstruktion ist $w_{z,d}$ harmonisch in $\Omega \setminus \{z\}$ und $w_{z,d}^*$ harmonisch in Ω . Also ist $u_{z,d}$ harmonisch in $\Omega \setminus \{z\}$.

In Lemma 2.7 haben wir gesehen, daß für $x \in \Gamma$ und $y \in \Omega$

$$G(x, y^*) - G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log |y|,$$

wenn y^* den Spiegelpunkt von y bezeichnet. Folglich ist

$$G(x, y^*) + G(x, y) = 2G(x, y) + \frac{1}{2\pi} \log |y|.$$

Verwenden wir dieses Ergebnis für $y = z$ und $y = z + td$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} w_{z,d}(x) + w_{z,d}^*(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{G(x, z + td) + G(x, (z + td)^*)}{t} - \frac{G(x, z) + G(x, z^*)}{t} \right) \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(x, z + td) - G(x, z)}{t} + \frac{1}{2\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log |z + td| - \log |z|}{t} \\ &= 2w_{z,d}(x) + \frac{1}{2\pi} \frac{d \cdot z}{|z|^2}, \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Also ist

$$u_{z,d}(x) = 2w_{z,d}(x) = 2w_{z,d}^*(x) - \frac{1}{\pi} \frac{d \cdot z}{|z|^2}, \quad x \in \Gamma.$$

Aus der Mittelwerteigenschaft (Satz 2.4) der harmonischen Funktion $w_{z,d}^*$ und (11.5) folgt somit

$$\int_{\Gamma} u_{z,d}(s) ds = 2 \int_{\Gamma} w_{z,d}^*(s) ds - 2 \frac{d \cdot z}{|z|^2} = 4\pi w_{z,d}^*(0) - 2 \frac{d \cdot z}{|z|^2} = 0.$$

Für die Berechnung der Normalenableitung auf Γ verwenden wir ebenfalls Lemma 2.7 und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu} u_{z,d}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} (G(x, z + td) + G(x, (z + td)^*)) - \frac{\partial}{\partial \nu} (G(x, z) + G(x, z^*)) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) = 0, \quad x \in \Gamma,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Nun können wir die zweite Charakterisierung von $\mathcal{R}(K^*)$ herleiten.

Satz 11.3 *Sei $z \in \Omega$ und $d \in \mathbb{R}^2$ mit $|d| = 1$. Dann liegt*

$$g_{z,d}(x) := \frac{1}{\pi} \frac{d \cdot (x - z)}{|x - z|^2} \in \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma) \quad (11.7)$$

genau dann in $\mathcal{R}(K^)$, wenn $z \in D$.*

Beweis. Nach Lemma 11.2 gilt $g_{z,d} = u_{z,d}|_{\Gamma} \in \mathcal{L}_{\diamond}^2(\Gamma)$. Nun nehmen wir an, daß sogar $g_{z,d} \in \mathcal{R}(K^*)$, also $g_{z,d} = K^*v$ für ein $v \in \mathcal{X}$. Aufgrund von Satz 10.2 können wir o.B.d.A. annehmen, daß $v \in \mathcal{K}$, d.h. $g_{z,d}$ ist die Spur einer in $\Omega \setminus \partial D$ harmonischen Funktion v mit

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial v}{\partial \nu} \right] = 0 \quad \text{auf } \partial D,$$

vgl. Lemma 10.1. Nach Lemma 11.2 besitzt $u_{z,d}$ ebenfalls homogene Neumann-Randbedingungen auf Γ , so daß $u_{z,d}$ und v aufgrund der Eindeutigkeit des Cauchy-Problems (Satz 8.3) in $\Omega \setminus (\overline{D} \cup \{z\})$ übereinstimmen. Dann kann aber z nicht in $\Omega \setminus \overline{D}$ liegen, da sonst $u_{z,d}$ in einer Umgebung von z unbeschränkt wäre, während v dort beschränkt bleibt. Ähnlich sieht man, daß z auch nicht auf dem Rand von D liegen kann, denn v gehört zu \mathcal{X} , also $v|_{\Omega \setminus \overline{D}}$ zu $H^1(\Omega \setminus \overline{D})$, während $u_{z,d}$ in z einen Pol erster Ordnung und $|\text{grad } u_{z,d}|^2$ einen Pol vierter Ordnung auf dem Rand ∂D besitzt, so daß $|\text{grad } u_{z,d}| \notin \mathcal{L}^2(\Omega \setminus \overline{D})$ und $u \notin H_{\diamond}^1(\Omega \setminus \overline{D})$. Folglich gehört z zu D .

Sei nun $z \in D$ und

$$\varphi := \frac{\partial}{\partial \nu} u_{z,d} \quad \text{auf } \partial D.$$

Wegen $z \in D$ ist $u_{z,d}$ über den Rand von D hinaus harmonisch und φ eine wohldefinierte stetige Funktion. Nach Lemma 2.3 und Lemma 11.2 ist zudem

$$0 = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} u_{z,d} ds - \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu} u_{z,d} ds = - \int_{\partial D} \varphi ds.$$

Damit hat das Neumann-Randwertproblem

$$\Delta w = 0 \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = \varphi \quad \text{auf } \partial D, \quad \int_{\partial D} w \, ds = \int_{\partial D} u_{z,d} \, ds,$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $w \in H^1(D)$. Nun setzen wir

$$v(x) := \begin{cases} u_{z,d}(x), & x \in \Omega \setminus \overline{D}, \\ w(x), & x \in D, \end{cases}$$

und aus der Konstruktion von w folgt zunächst, daß $v \in \mathcal{X}$ und darüberhinaus, daß $v \in \mathcal{K}$. Nach Satz 10.2 ist somit $K^*v = v|_{\Gamma} = u_{z,d}|_{\Gamma} = g_{z,d}$, d.h. $g_{z,d} \in \mathcal{R}(K^*)$, was zu zeigen war. \square

Verknüpfen wir nun die beiden Charakterisierungen von $\mathcal{R}(K^*)$ aus den Sätzen 11.1 und 11.3, so erhalten wir den folgenden einfachen Test, ob ein Punkt z zu dem isolierenden Einschluß D gehört oder ob nicht:

Korollar 11.4 *Ein Punkt $z \in \Omega$ gehört genau dann zu D , wenn die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g_{z,d}, f_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)}^2}{\lambda_n}$$

konvergiert. Dabei sind f_n und λ_n die normierten Eigenfunktionen und die zugehörigen Eigenwerte von $\Lambda_0 - \Lambda$ und $g_{z,d}$ ist durch (11.7) gegeben; die konkrete Wahl von $d \in \mathbb{R}^2$, $|d| = 1$, ist unerheblich.

Beispiel 11.5 Als Beispiel ziehen wir einen kreisförmigen Einschluß $D = B_\rho(0)$ heran, d.h. der Leitfähigkeitskoeffizient σ hat die spezielle Gestalt (9.1) mit $\sigma_0 = 0$. Wie wir in Abschnitt 9 gesehen haben, sind in diesem Fall – wie im homogenen Fall, vgl. Abschnitt 6 – die trigonometrischen Basisfunktionen τ_n , $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, die Eigenfunktionen der Neumann-Dirichlet-Abbildung und die zugehörigen Eigenwerten wurden in (9.7) ausgerechnet.

Somit ist $\{\tau_n : 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}$ auch die vollständige Eigenbasis von $\Lambda_0 - \Lambda$ und die zugehörigen Eigenwerte lauten

$$\lambda_n = \lambda_{-n} = \frac{1}{n} \frac{1 + \rho^{2n}}{1 - \rho^{2n}} - \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \frac{\rho^{2n}}{1 + \rho^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man beachte, daß die Eigenwerte von $\Lambda_0 - \Lambda$ geometrisch abklingen (schneller als ρ^{2n}), während die Eigenwerte von Λ und Λ_0 nur wie $1/n$ klein werden.

Für $z = (\zeta, 0)$ mit $0 \leq \zeta \leq 1$ sowie $d = (0, 1)$ und $x = (\cos \theta, \sin \theta)$ gilt

$$\begin{aligned}
g_{z,d}(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin \theta}{|x-z|^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{e^{i\theta}}{|e^{i\theta} - \zeta|^2} = \frac{1}{\pi\zeta} \operatorname{Im} \frac{\zeta e^{i\theta} - \zeta^2}{|e^{i\theta} - \zeta|^2} \\
&= \frac{1}{\pi\zeta} \operatorname{Im} \frac{\zeta(e^{i\theta} - \zeta)}{(e^{i\theta} - \zeta)(e^{-i\theta} - \zeta)} = \frac{1}{\pi\zeta} \operatorname{Im} \frac{\zeta}{(e^{-i\theta} - \zeta)} = \frac{1}{\pi\zeta} \operatorname{Im} \frac{\zeta e^{i\theta}}{1 - \zeta e^{i\theta}} \\
&= \frac{1}{\pi\zeta} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n e^{in\theta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{n-1} \tau_n(\theta).
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\langle g_{z,d}, \tau_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} = \begin{cases} \zeta^{n-1}/\sqrt{\pi}, & n > 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

und die Reihe aus dem Kriterium von Korollar 11.4 lautet

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\zeta^{2n-2}}{\rho^{2n}} \frac{1 + \rho^{2n}}{2\pi}.$$

Sie konvergiert genau dann, wenn $0 \leq z < \rho$, also in der Tat genau dann, wenn $z \in D$.