

Differenzialdifferenzengleichungen

Jan Fuhrmann

10. August 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und Einführung	3
1.1	Herkunft von Verzögerungen	3
1.2	Dynamische Systeme	4
1.2.1	Existenz- und Eindeigkeitssätze	4
1.2.2	Abhängigkeit von Parametern und Vergleichsprinzipien	4
1.2.3	Linearisierung	5
1.2.4	Invariante Gebiete	7
1.3	Ein durchgerechnetes Beispiel	7
2	Elemente der Theorie der Differenzgleichungen	10
2.1	Notation und Vorbemerkungen	10
2.2	Lösungen für Differenzgleichungen erster Ordnung	11
2.2.1	Graphische Lösung skalarer Differenzgleichungen erster Ordnung	11
2.2.2	Gleichgewichtspunkte, Stabilität und periodische Lösungen	11
2.2.3	Einige Bemerkungen zu Verzweigungen in diskreten dynamischen Systemen	16
2.3	Lösungen allgemeinerer Differenzgleichungen	18
2.4	Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben	20
2.4.1	Gleichgewichtspunkte von $u_{n+1} = u_n^3 + u_n$	20
2.4.2	Beweis von Korollar 2.5	21
2.4.3	Gleichgewichtspunkte für die logistische Familie	21
3	Existenztheorie für Differenzialdifferenzgleichungen I	22
3.1	Diskrete Verzögerung und schrittweise Integration	22
3.2	Positivität von Lösungen und Vergleichsprinzipien	24
3.3	Stationäre Lösungen für lineare Gleichungen und Stabilität	26
3.3.1	Lösung linearer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	27
3.3.2	Charakteristische Gleichung, Fundamentallösung und Wachstumsverhalten der Lösungen	29
3.3.3	Die inhomogene Gleichung – Variation der Konstanten	35
3.4	Anhang: Spektrale Zerlegung der Fundamentallösungen	36
4	Existenztheorie für Differenzialdifferenzgleichungen II	38
4.1	Formulierung des Anfangswertproblems	38
4.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	41
4.3	Gleichgewichtslösungen und Stabilität	47
4.3.1	Einige abschließende Beispiele	51

Kapitel 1

Motivation und Einführung

1.1 Herkunft von Verzögerungen

Bei Differenzialdifferenzgleichungen (engl. *differential difference equations*, *delay differential equations*, *functional differential equations*; im folgenden: *DDE*) handelt es sich um Differenzialgleichungen, bei denen auf der rechten Seite nicht nur die unabhängige Variable (in unserem Zusammenhang meist die Zeit) und der Wert der abhängigen Variable zur aktuellen Zeit auftreten, sondern auch weitere Eigenschaften der abhängigen Variable wie etwa deren Wert zu einem früheren Zeitpunkt.

Als prototypisches Beispiel soll eine Gleichung mit einfacher diskreter Verzögerung (oder: einfach retardierte Gleichung) dienen:

$$\frac{du}{dt}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{u}(t) = F(t, u(t), u(t - \tau)), \quad (1.1.1)$$

bei der die Evolution der gesuchten Größe u zur Zeit t neben $u(t)$ selbst auch noch vom Wert zum früheren Zeitpunkt $t - \tau$ (mit gegebenem $\tau > 0$) abhängt.

Betrachten wir die bekannte logistische Gleichung

$$\dot{u} = \gamma u \left(1 - \frac{u}{K}\right) \quad (1.1.2)$$

mit freier Wachstumsrate γ und Tragfähigkeit (engl. *carrying capacity*) K . Deren Lösung zu gegebenem (vorzugsweise positivem) Anfangswert $u(0) = u_0$ ist durch

$$u(t) = \frac{u_0 K \exp[\gamma t]}{K - u_0(1 - \exp[\gamma t])}$$

gegeben und konvergiert für $t \rightarrow \infty$ monoton gegen K .

Nun ist es unter Umständen sinnvoll anzunehmen, dass die Wirkung des Ressourcenverbrauchs verzögert eintritt und die überfüllungsbedingte Verringerung der Wachstumsrate von der Populationsgröße zu einem früheren Zeitpunkt abhängt. In der Gleichung äußert sich das durch Einführung der Verzögerung τ :

$$\dot{u}(t) = \gamma u(t) \left(1 - \frac{u(t - \tau)}{K}\right). \quad (1.1.3)$$

Etwas realistischer wäre allerdings eine verteilte Verzögerung (engl.: *distributed delay*), die den Ressourcenverbrauch über einen längeren Zeitraum berücksichtigt:

$$\dot{u}(t) = \gamma u(t) \left(1 - \frac{1}{K} \int_0^\infty u(t - s) k(s) ds\right) \quad (1.1.4)$$

mit einem nicht negativen Verzögerungskern k , welcher der Normierungsbedingung

$$\int_0^\infty k(t) dt = 1$$

genügt. Ein typisches Beispiel ist $k(t) = e^{-t}$, was länger zurückliegenden Vorgängen ein geringeres Gewicht zuordnet. Für $k = \delta_\tau$ ergibt sich aus (1.1.4) wieder die einfache Gleichung (1.1.3).

1.2 Wiederholung zur Theorie dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt wollen wir einige Aussagen über Anfangswertprobleme für explizite Differenzialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0 \quad (1.2.1)$$

für $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ sammeln. Diese bezeichnet man als dynamische Systeme und interpretiert $u(t)$ als Zustand des Systems zur Zeit t . Dabei haben wir als Anfangszeit bereits 0 angesetzt, um die Notation etwas übersichtlicher zu gestalten. Selbstverständlich kann man die folgenden Aussagen sofort auf allgemeinere Anfangswertprobleme mit Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ erweitern.

1.2.1 Existenz- und Eindeutigkeitsätze

Satz 1.1. (i) *Angenommen, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und bezüglich der zweiten Variablen gleichmäßig LIPSCHITZ-stetig, d.h., es existiere ein $\lambda \geq 0$ derart, dass für alle $t \geq 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \lambda|x - y|$$

gilt. Dann besitzt (1.2.1) für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(ii) *Für eine in \mathbb{R}^{n+1} offene Umgebung Ω von $(0, u_0)$ sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich der zweiten Variablen lokal LIPSCHITZ-stetig in dem Sinne, dass für alle $(t, x) \in \Omega$ ein $\lambda_t \geq 0$ und eine Umgebung von $U \subset \Omega$ von (t, x) derart existieren, dass für alle $(s, y), (s, z) \in U$*

$$|f(s, y) - f(s, z)| \leq \lambda_t|y - z|$$

gilt. Dann existiert $T_ > 0$ (u. U. unendlich) derart, dass (1.2.1) für alle $T \in (0, T_*)$ genau eine Lösung $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, jedoch keine Lösung $u : [0, T_*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (falls T_* endlich) besitzt.*

Bemerkung 1.2. (i) *Die LIPSCHITZ-Stetigkeit ist zum Beispiel gegeben, falls f bezüglich der zweiten Variable stetig differenzierbar ist. Falls diese Ableitung beschränkt ist, dient ihr Normmaximum als LIPSCHITZ-Konstante λ .*

(ii) *Im zweiten Teil des Satzes erfüllt die behauptete Lösung $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ selbstverständlich $(t, u(t)) \in \Omega$ für jedes $t \in [0, T]$.*

Korollar 1.3. *Ist $f : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($G \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von u_0) stetig und lokal LIPSCHITZ-stetig bezüglich der zweiten Variablen, so existiert die Lösung u auf $[0, \infty)$ oder auf $[0, T_*)$, jedoch nicht auf $[0, T_*]$. Im letzteren Fall gilt*

$$\lim_{t \nearrow T_*} |u(t)| = \infty \quad \text{oder} \quad \liminf_{t \nearrow T_*} \text{dist}(u(t), \partial G) = 0.$$

Satz 1.4. *Für offenes $G \subset \mathbb{R}^n$ und ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit 0 im Inneren sei $f : I \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann existiert zu jedem $u_0 \in G$ ein $\delta > 0$ derart, dass (1.2.1) eine Lösung $u : (-\delta, \delta) \rightarrow G$ besitzt.*

Dieser letzte auf PEANO zurückgehende Existenzsatz verlangt nur die Stetigkeit von f und verzichtet auf die LIPSCHITZ-Bedingung. Dafür liefert er aber auch nur eine Existenzaussage, ohne die Eindeutigkeit garantieren zu können. Einschlägige Beispiele für Anfangswertprobleme mit stetiger rechter Seite und mehreren Lösungen finden sich in der Literatur über gewöhnliche Differenzialgleichungen. Dort findet man auch die Beweise zu den hier zitierten Sätzen.

1.2.2 Abhängigkeit von Parametern und Vergleichsprinzipien

Satz 1.5. (i) *Für die offenen Mengen $G \subset \mathbb{R}^n$ und $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$ sei die Funktion $f : \mathbb{R} \times G \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar (und damit insbesondere lokal LIPSCHITZ-stetig). Dann existieren zu gegebenen $u_* \in G$ und $\lambda_* \in \Lambda$ offene Umgebungen G_* von u_* und Λ_* von λ_* sowie eine stetig differenzierbare Funktion*

$$\varphi : I_* \times G_* \times \Lambda_* \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit einem offenen Intervall $I_ \ni 0$ derart, dass zu jedem $u_0 \in G_*$ und $\lambda_0 \in \Lambda_*$ das Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t), \lambda_0) \quad \text{für } t \in I_*, \quad u(0) = u_0 \quad (1.2.2)$$

die eindeutige Lösung $u(t) = \varphi(t, u_0, \lambda_0)$ hat. Diese Lösung kann eindeutig auf ein von u_0 und λ_0 abhängiges maximales Existenzintervall $I_0 \supset I_$ fortgesetzt werden. Die Funktion φ ist von der gleichen Regularität wie f .*

(ii) *Ein analoges Resultat gilt für stetiges und bzgl. u LIPSCHITZ-stetiges f . Dann hängt φ stetig von u_0 und λ_0 ab.*

Lemma 1.6. Auf $[0, T]$ seien die stetigen, nicht negativen Funktionen g, φ und ψ gegeben. Zusätzlich sei g stetig differenzierbar in $(0, T)$ mit nicht negativer Ableitung. Falls für alle $t \in [0, T]$

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_0^t \varphi(s)\psi(s) \, ds$$

gilt, so gilt auch

$$\varphi(t) \leq g(t) \exp\left(\int_0^t \psi(s) \, ds\right)$$

für alle $t \in [0, T]$.

Bemerkung 1.7. Oft benötigt man nur den Spezialfall

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta t},$$

für stetige φ und $\alpha \geq 0, \beta > 0$.

Satz 1.8. Zur stetigen und in ihrem zweiten Argument LIPSCHITZ-stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und beliebigem $u_0 \in \mathbb{R}$ sei $u : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems (1.2.1). Dann gilt für jede stetig differenzierbare Funktion $v : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $v(0) \leq u_0$ und $v'(t) \leq f(t, v(t))$ auf $(0, T)$

$$v(t) \leq u(t).$$

Falls die zweite vorausgesetzte Ungleichung strikt ist, so gilt dies auch in der Behauptung. Eine analoge Aussage gilt mit umgekehrten Ungleichungen.

Korollar 1.9. Betrachtet man die Anfangswertprobleme

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{v} = g(t, v), \quad v(0) = v_0$$

mit LIPSCHITZ-stetigen $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so folgt aus $u_0 \leq v_0$ und $f(t, x) \leq g(t, x)$ für alle t, x auch

$$u(t) \leq v(t)$$

für die Lösungen für alle $t \geq 0$.

1.2.3 Linearisierung

In diesem Unterabschnitt betrachten wir nur autonome Systeme der Form

$$\dot{u}(t) = f(u(t)), \quad u(0) = u_0 \tag{1.2.3}$$

mit stetig differenzierbarem $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dieses habe den isolierten Gleichgewichtspunkt u_* , d.h., $f(u_*) = 0$ und $f \neq 0$ auf einer punktierten Umgebung von u_* .

Satz 1.10. (i) Falls alle Eigenwerte von $A := f'(u_*) = \mathfrak{J}_{u_*} f$ negativen Realteil haben, so ist u_* (lokal) asymptotisch stabil.

(ii) Hat ein Eigenwert von A positiven Realteil, so ist u_* instabil.

Bemerkung 1.11. (i) Für $n = 2$ ergeben sich Knoten, Foki, Sättel.

(ii) Für $n = 1$ ist $f'(u_*)$ reell und es sind keine Oszillationen möglich.

(iii) Die gesuchten Eigenwerte ergeben sich als Lösungen der polynomialen Gleichung $0 = \det(\lambda \mathbb{I} - A)$ vom Grad n . Diese hat nur endlich viele Lösungen.

Der Satz wirft natürlich sofort die Frage auf, was geschieht, wenn wir f derart abändern, dass sich das Vorzeichen des Realteils eines oder mehrerer der genannten Eigenwerte ändert. Das ist der Gegenstand der Verzweigungstheorie, die parameterabhängige Probleme der Form

$$\dot{u}(t) = f(u(t), \mu) \tag{1.2.4}$$

untersucht. Dabei ist μ ein Parameter (reell oder aus \mathbb{R}^p), und es wird nach der Anzahl und Stabilität der Gleichgewichtspunkte in Abhängigkeit vom Wert von μ gefragt.

Wir wollen dieses am Beispiel der Heugabelverzweigung illustrieren. Dazu sehen wir uns die speziellen Probleme

$$\dot{u}(t) = u(t)(\mu - u(t)^2) =: f_\mu(u(t)) \tag{1.2.5}$$

und

$$\dot{u}(t) = \mu - u(t)^2 =: g_\mu(u(t)) \quad (1.2.6)$$

an und lesen für (1.2.5) sofort den Gleichgewichtspunkt $u_* = 0$ ab ($f_\mu(0) = 0$, und zwar unabhängig von μ). Die weiteren Lösungen der Gleichung $f_\mu(u) = 0$ sind $u_\pm^* = \pm\sqrt{\mu}$ und sind nur für $\mu \geq 0$ reell. Für $\mu = 0$ fallen alle diese Lösungen zusammen, für negative μ gibt es nur einen Gleichgewichtspunkt 0 und für positive μ derer drei.

Für (1.2.6) erhalten wir nur die beiden Gleichgewichtspunkte u_\pm^* , haben also insbesondere für $\mu < 0$ überhaupt keinen.

Oft ändert sich mit der Anzahl der Gleichgewichtspunkte auch die Stabilität einiger solcher, die für alle Werte des Parameters existieren. Das ist auch hier der Fall, wie wir leicht nachweisen, indem wir

$$f'_\mu(u) = \mu - 3u^2 \quad \text{und} \quad g'_\mu(u) = -2u \quad (1.2.7)$$

berechnen und feststellen, dass $f'_\mu(0) = \mu$ das gleiche Vorzeichen wie μ hat, und für positive μ die dann reellen Gleichgewichtspunkte u_\pm^*

$$f'_\mu(u_\pm^*) = \mu - 3\mu = -2\mu < 0 \quad \text{bzw.} \quad g'_\mu(u_\pm^*) = \mp 2\sqrt{\mu}$$

erfüllen.

Wir finden also, dass für (1.2.5) die Null ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist, falls $\mu < 0$ ist und für $\mu > 0$ instabil wird. Dafür tauchen für $\mu > 0$ zwei weitere Gleichgewichtspunkte u_\pm^* auf, die beide stabil sind. Für (1.2.6) haben wir nur im Fall $\mu \geq 0$ überhaupt reelle Gleichgewichtspunkte, die für positive μ gegensätzliches Stabilitätsverhalten haben. An $\mu = 0$ sind die Ableitungen von f_μ und g_μ am dort einzigen (mehrfachen) Gleichgewichtspunkt stets Null und erlauben daher keine Rückschlüsse auf das Stabilitätsverhalten.

Erinnert man sich daran, dass die rechte Seite eines solchen Systems oftmals als Kraftfeld betrachtet wird, das von einem Potenzial herrührt, etwa

$$f_\mu(u) = -F'_\mu(u),$$

so erkennt man an der Form des Potenzials, wie die Stabilität zustande kommt.

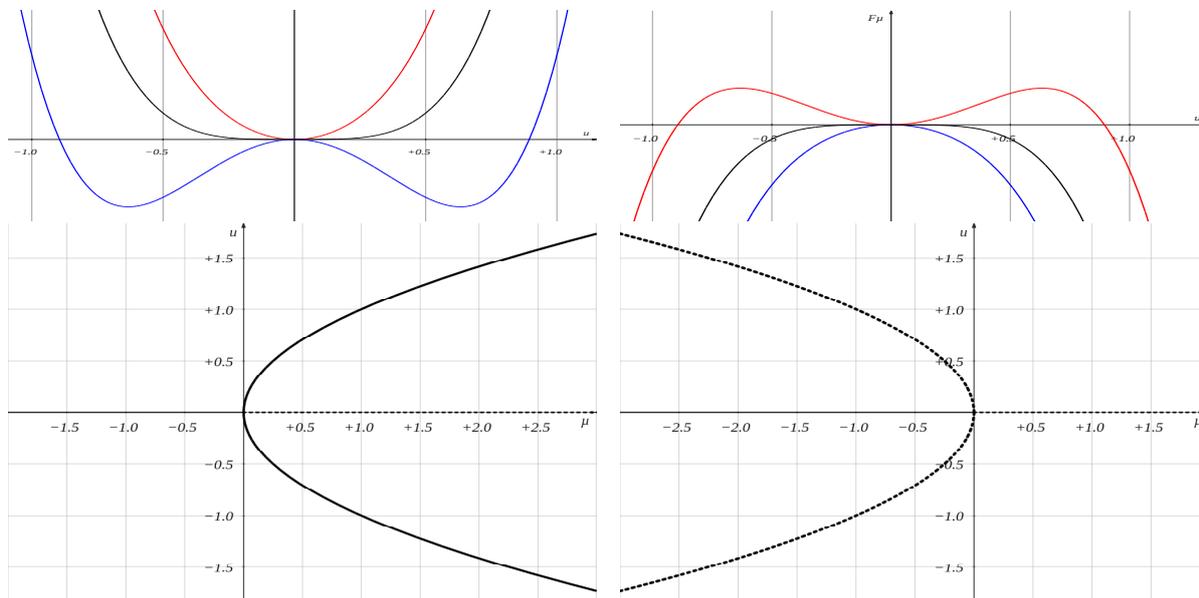


Abbildung 1.1: Potenziale F_μ (oben) und Verzweigungsdiagramme (unten) für die superkritische (links, $f_\mu = u(\mu - u^2)$) und subkritische (rechts, $f_\mu = -u(\mu + u^2)$) Heugabelverzweigung. Die Werte für μ sind $\mu_0 = 0$ (schwarz) und ± 0.4 (blau, rot). Gestrichelte Kurven entsprechen instabilen Gleichgewichtspunkten, durchgezogene stehen für stabile Gleichgewichtspunkte in Abhängigkeit von μ .

Häufig treten derartige Verzweigungen etwas versteckter auf und sind am ehesten daran zu erkennen, dass an einem Parameterwert μ_0 (in unseren Beispielen Null) ein Gleichgewichtspunkt u_0 (bei uns ebenfalls Null) von (1.2.4) existiert, an dem die Ableitung

$$\partial_u f(u, \mu)|_{(u_0, \mu_0)}$$

verschwindet. Um welche Art von Verzweigung es sich handelt, erkennt man dann an anderen Ableitungen von f an der Stelle (u_0, μ_0) . Für unsere Heugabelverzweigung geben wir die entsprechenden Bedingungen im folgenden Satz an.

Satz 1.12. *Angenommen, das System (1.2.4) habe für $\mu = \mu_0$ den Gleichgewichtspunkt $u_* = 0$ und es gelte*

$$\partial_u f(0, \mu_0) = 0, \quad \partial_{uu} f(0, \mu_0) = 0, \quad \partial_{uuu} f(0, \mu_0) \neq 0, \quad \partial_\mu f(0, \mu_0) = 0, \quad \partial_{\mu u} f(0, \mu_0) \neq 0 \quad (1.2.8)$$

sowie $f(-u, \mu) = -f(u, \mu)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ und $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$.

Dann hat das System (1.2.4) für beliebige Werte von μ den Gleichgewichtspunkt $u_* = 0$, der für hinreichend kleine $\sigma > 0$ stabil für $\mu = \mu_0 - \sigma$ und instabil für $\mu = \mu_0 + \sigma$ ist. Ferner gibt es im Fall

$$\partial_{uuu} f(0, \mu_0) \begin{cases} > \\ < \end{cases} 0$$

für

$$\mu = \mu_0 \begin{cases} - \\ + \end{cases} \sigma$$

zwei zusätzliche Gleichgewichtspunkte $u_\pm^*(\mu)$, die instabil im Fall $\partial_{uuu} f(0, \mu_0) > 0$ und stabil im Fall $\partial_{uuu} f(0, \mu_0) < 0$ sind.

1.2.4 Invariante Gebiete

Definition. Für

$$\dot{u} = f(t, u(t)) \quad \text{mit } f : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^d$$

($G \subset \mathbb{R}^d$ offen) heißt die abgeschlossene Menge $D \subset G$ mit nicht leerem Inneren ein (*vorwärts*) *invariantes Gebiet*, falls für alle $u_0 \in D$ jede Lösung des Anfangswertproblems (1.2.1) für alle $t \geq 0$, für welche diese Lösung existiert, $u(t) \in D$ erfüllt.

Satz 1.13. *Eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge $D \subset G$ mit nicht leerem Inneren ist genau dann invariant für $\dot{u} = f$ mit stetigem $f : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^d$, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in \partial D$ und alle äußeren Normalenvektoren \mathbf{n} an D in x*

$$\mathbf{n}^T f(t, x) \leq 0$$

gilt.

Zum Beweis dieses Satzes und der Definition von äußeren Normalenvektoren sei auf die Literatur (z.B. [3], [10]) verwiesen.

1.3 Ein durchgerechnetes Beispiel

Wir betrachten das lineare Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = \gamma u(t), \quad u(0) = u_0 > 0, \quad (1.3.1)$$

dessen Lösung wir sehr schnell als

$$u(t) = u_0 e^{\gamma t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{falls } \gamma < 0 \\ \infty & \text{falls } \gamma > 0 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

angeben können. Insbesondere stirbt die Lösung für $\gamma = -1$ asymptotisch aus.

Nun betrachten wir das gleiche System mit Verzögerung. Die kann zum Beispiel davon herrühren, dass man bei Interpretation des Systems als Evolutionsgleichung für eine biologische Population eine endliche Zeit für die Fortpflanzung ansetzt:

$$\dot{u}(t) = -u(t - \tau). \quad (1.3.3)$$

Alternativ kann man diese Gleichung als Beschreibung für ein Kontrollsystem lesen, dessen Zielgröße u auf 0 eingestellt werden soll. Weicht das System von diesem Sollwert ab, versucht ein Kontrollmechanismus, dessen Stärke proportional zu dieser Abweichung ist, es wieder dorthin zurückzutreiben

(zum Beispiel durch Heizen/Kühlen, wenn u eine Temperatur ist). Die endliche Reaktionszeit des Kontrollsystems (auslesen des aktuellen Werts, bestimmen des einzustellenden Treibers, Dauer für dessen Aufheizen/Abkühlen, etc.) äußert sich dann in der Verzögerung $\tau > 0$.

Nun stellen wir sofort fest, dass uns als Anfangsbedingung $u(0)$ nicht ausreicht. Um mit der Integration der Gleichung beginnen zu können benötigen wir $\dot{u}(0) = u(-\tau)$ (als rechtsseitige Ableitung zu lesen) und im weiteren Verlauf alle weiteren Werte $u(s)$ für $s \in [-\tau, 0]$, die wir daher vorgeben müssen. Die Anfangsbedingungen lauten also

$$u(s) = \phi(s) \quad \text{für } s \in [-\tau, 0]. \quad (1.3.4)$$

Für unser einführendes Beispiel wählen wir $\phi \equiv 1$.

Damit können wir beginnen, die Gleichung explizit zu lösen. Für $t \in [0, \tau]$ ist dann nämlich

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -u(\underbrace{t-\tau}_{\in [-\tau, 0]}) = -1, \\ &\in [-\tau, 0] \end{aligned}$$

also

$$u(t) = u(0) + \int_0^t -1 \, ds = 1 - t \quad \text{für } t \in [0, \tau]. \quad (1.3.5)$$

Da nun u auf $[0, \tau]$ bekannt ist, können wir zur Berechnung von u auf $(\tau, 2\tau]$ übergehen, wo wir $u(t - \tau) = 1 - (t - \tau)$ und damit

$$u(t) = u(\tau) + \int_{\tau}^t -(1 - s + \tau) \, ds \quad (1.3.6)$$

$$= 1 - \tau + \left[-s + \frac{s^2}{2} - \tau s \right]_{s=\tau}^t = 1 - t + \frac{(t - \tau)^2}{2} \quad (1.3.7)$$

finden.

Dieser Vorgang lässt sich induktiv fortführen und liefert

$$u(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(t - (k-1)\tau)^k}{k!} \quad \text{für } t \in ((n-1)\tau, n\tau]. \quad (1.3.8)$$

Das Verhalten dieser Lösungen hängt nun qualitativ von τ ab. Für hinreichend kleine τ ähnelt das Verhalten der Lösung noch dem für die gewöhnliche Differentialgleichung, nämlich ein monotoner Abfall gegen den Gleichgewichtspunkt 0 (zum präzisen Begriff des Gleichgewichtspunkts für DDE kommen wir später noch).

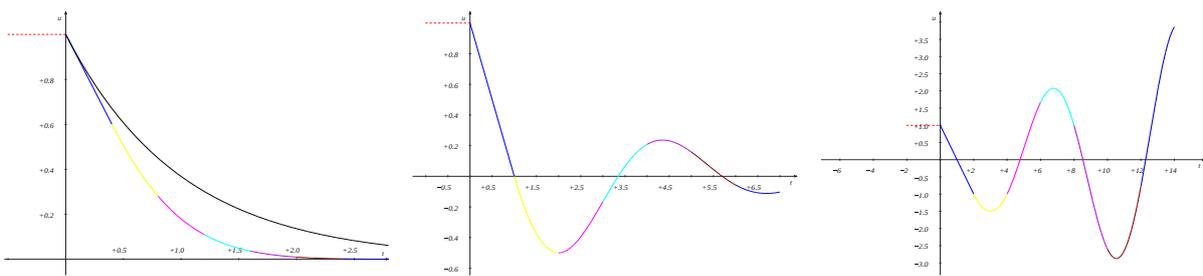


Abbildung 1.2: Lösungen des Anfangswertproblems $\dot{u}(t) = -u(t - \tau)$ mit Anfangsbedingungen $u \equiv -1$ auf $[-\tau, 0]$ für Werte $\tau = 0.4$ (links), $\tau = 1$ (Mitte) und $\tau = 2$ (rechts). Im linken Diagramm ist zum Vergleich auch die Lösung des Anfangswertproblems für die reine gewöhnliche Differentialgleichung dargestellt (schwarz).

Für etwas größere Verzögerungen beobachten wir Oszillationen (die wir für autonome gewöhnliche Differentialgleichungen ausgeschlossen hatten), die jedoch gedämpft werden, so dass die Lösung letztlich doch gegen Null geht. Besonderes Augenmerk sei an dieser Stelle auf den Umstand gerichtet, dass im Gegensatz zur gewöhnlichen Differentialgleichung die Lösung ihr Vorzeichen wechselt. Das verbietet natürlich die Interpretation als Populationsmodell. Genauer, hört dieses System natürlich spätestens in dem Moment auf, ein sinnvolles Modell für eine Populationsgröße zu sein, wenn u negative Werte annimmt. Man mag aber aus dem Vorzeichenwechsel darauf schließen, dass sich nach diesem Modell verhaltende Populationen nicht nur asymptotisch, sondern in endlicher Zeit aussterben können.

Lassen wir τ weiter wachsen, so lässt die Dämpfung der Oszillationen nach bis sie schließlich für hinreichend große τ gar nicht mehr abfallen, sondern ins Unendliche wachsen.

Eine weitere Beobachtung, die sich aus der speziellen Form der Lösung ergibt, ist die Glättungseigenschaft der Gleichung. Während an $t = 0$ die Ableitung der Lösung noch einen Sprung macht, ist sie bei $t = \tau$ bereits stetig. Genauer rechnet man nach, dass an den Punkten $n\tau$ ($n \in \mathbb{N}_0$) die ersten n Ableitungen der Lösung stetig sind, während die $(n + 1)$ ste Ableitung eine Sprungstelle hat. Mit zunehmender Dauer der Evolution wird die Lösung also immer regulärer (abseits der Stellen $n\tau$ ist sie als Polynom natürlich ohnehin glatt).

Es ist nämlich für $m = 1, \dots, n + 1$:

$$\frac{d^m u}{d^m t} = \sum_{l=0}^{n-m} (-1)^{l+m} \frac{(t - (l + m - 1)\tau)^l}{l!} \quad \text{auf } ((n - 1)\tau, n\tau),$$

und

$$\frac{d^m u}{d^m t} = \sum_{l=0}^{n+1-m} (-1)^{l+m} \frac{(t - (l + m - 1)\tau)^l}{l!} \quad \text{auf } ((n - 1)\tau, n\tau),$$

und damit für die Differenz der rechts- und linksseitigen Ableitung am fraglichen Punkt $t = n\tau$, nachdem alle Summanden bis auf einen einander aufheben:

$$\lim_{t \searrow n\tau} \frac{d^m u}{d^m t} - \lim_{t \nearrow n\tau} \frac{d^m u}{d^m t} = \lim_{t \searrow n\tau} (-1)^{n+1} \frac{(t - n\tau)^{n+1-m}}{(n + 1 - m)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n + 1 - m)!} \lim_{t \searrow n\tau} (t - n\tau)^{n+1-m}.$$

Dieses verschwindet für $m < n + 1$, da in diesem Fall der letzte Grenzwert Null ist. Für $m = n + 1$ ist hingegen

$$(t - n\tau)^{n+1-m} = 1$$

für alle $t > n\tau$, was sich in den Grenzwert überträgt. Wir erhalten also tatsächlich den behaupteten Sprung.

Kapitel 2

Elemente der Theorie der Differenzengleichungen

2.1 Notation und Vorbemerkungen

Bevor wir uns genauer mit den DDE befassen, wollen wir zunächst einige Aussagen über die Lösung von Differenzengleichungen erarbeiten. Im Sinne der Einführung handelt es sich dabei im einfachsten Fall um eine Gleichung der Form

$$u(t) = f(t, u(t - \tau)), \quad (2.1.1)$$

wobei $\tau > 0$ wieder konstant ist. Hier steht nun auf der linken Seite nicht mehr die Ableitung von u zur Zeit t , sondern u selbst (daher fehlt der Zusatz *Differenzial-* in der Bezeichnung der Gleichung). Um den Zusammenhang zu den im folgenden Kapitel betrachteten DDE herzustellen, können wir noch

$$F(t, x, y) := f(t, y) - x$$

einführen und die Gleichung zu

$$0 = F(t, u(t), u(t - \tau)) \quad (2.1.2)$$

umschreiben. Für kompliziertere F ist dies nun eine implizite Differenzengleichung.

Das ganze wird erneut mit der Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ versehen und liefert als Lösung lediglich die Werte von u an den Zeitpunkten $t = n\tau$ ($n \in \mathbb{N}$).

Üblicherweise bezeichnet man diese Werte mit

$$u_n := u(n\tau)$$

und kann die Gleichung zu der vermutlich bekannteren Form

$$u_n = f(n\tau, u_{n-1}) =: f_n(u_{n-1}) \quad (n \geq 1) \quad (2.1.3)$$

mit Anfangsbedingung u_0 umschreiben. Das kennt man als dynamisches System mit diskreter Zeit, wobei man es oft mit autonomen Systemen zu tun hat, bei denen f nicht explizit von der Zeit abhängt (d.h., $f = f_1 = f_2 = f_3 = \dots$):

$$u_n = f(u_{n-1}).$$

In diesem Fall können wir unter Verwendung der Schreibweise

$$g^{\circ 2}(u) := g(g(u)) \equiv g \circ g(u), \quad g^{\circ 3}(u) := g(g(g(u))), \quad g^{\circ n}(u) := g(g(\dots g(u))\dots)$$

den n -ten Schritt der Rekursion kompakt als

$$u_n = f^{\circ n}(u_0)$$

schreiben, wobei man oft auch die Notation $f^n(u_0)$ findet.

Beispiel 2.1. Ist für ein autonomes diskretes dynamisches System die Funktion f affin-linear, so erhält man die lineare Gleichung

$$u_n = au_{n-1} + b, \quad (2.1.4)$$

die für gegebenes u_0 die Lösung

$$u_n = \begin{cases} a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} & \text{falls } a \neq 1 \\ u_0 + nb & \text{falls } a = 1 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

hat.

Noch zu bemerken ist, dass im Unterschied zu dynamischen Systemen in kontinuierlicher Zeit für diskrete dynamische Systeme die Gleichgewichtszustände nicht durch Nullstellen, sondern durch Fixpunkte u_* der rechten Seite gegeben sind: $f(u_*) = u_*$. Für die lineare Gleichung (2.1.4) finden wir zum Beispiel im Fall $a \neq 0$ das Gleichgewicht $\frac{b}{1-a}$ und für $a = 1, b \neq 0$ keinen Fixpunkt. Im Fall $a = 1, b = 0$ ist jede reelle Zahl ein Gleichgewichtspunkt der Gleichung.

2.2 Lösungen für Differenzgleichungen erster Ordnung

2.2.1 Graphische Lösung skalarer Differenzgleichungen erster Ordnung

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich die Lösung von

$$u_n = f(u_{n-1}) \quad (2.2.1)$$

zu gegebenem u_0 einfach auf graphischem Weg ermitteln. Dazu zeichnet man einfach die Graphen von f und der Identität. Die Iteration beginnt auf der Abszisse im Punkt $(u_0, 0)$. Von dort geht man senkrecht bis man den Graphen von f im Punkt $(u_0, f(u_0))$ erreicht. Von dort geht man waagerecht zur Diagonalen und erreicht den Punkt $(f(u_0), f(u_0)) = (u_1, u_1)$. Für den zweiten Iterationsschritt geht es wieder senkrecht zum Graphen von f (Punkt $(u_1, f(u_1))$) und anschließend waagerecht zur Diagonalen $((f(u_1), f(u_1)) = (u_2, u_2))$.

Dieser Prozess setzt sich fort. Vom Punkt (u_n, u_n) erreicht man auf senkrechtem Weg zum Graphen von f den Punkt $(u_n, f(u_n))$ und anschließend auf waagerechtem Weg zur Diagonalen den Punkt $(f(u_n), f(u_n)) = (u_{n+1}, u_{n+1})$. Für nicht allzu komplizierte Funktionen f erkennt man anhand der Trajektorie dieses Iterationsprozesses bereits, ob das dynamische System einem Gleichgewichtspunkt zustrebt. Dabei handelt es sich dann notwendigerweise um einen Schnittpunkt der beiden im Diagramm eingezeichneten Kurven.

Man beachte, dass jeder Schritt dieser Iteration eindeutig durchgeführt werden kann. Das ergibt sich für die senkrechten Schritte aus der Eindeutigkeit der Zuordnung $u \mapsto f(u)$ und für die waagerechten Schritte aus der Bijektivität der Identität. Diese Art von Darstellung bezeichnet man aus offensichtlichen Gründen als Spinnennetzdiagramm (engl. *cobweb plot*).

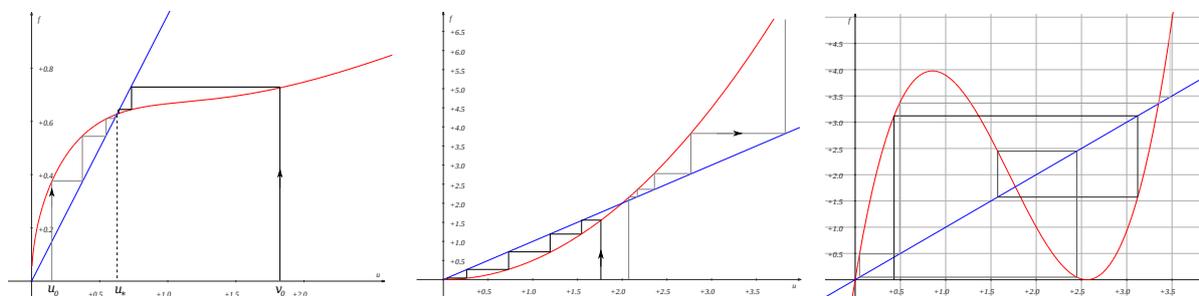


Abbildung 2.1: Spinnennetzdiagramme für $f(u) = \sqrt{u} - u^2/(1 - u^2)$, $f(u) = 0.5u^2$, $f(u) = \frac{8}{5}u(u - \frac{64}{25})^2$ (von links nach rechts). Im ersten Fall haben wir es mit einem einzigen positiven Gleichgewichtspunkt zu tun, der auch stabil ist. Im zweiten Fall ist der einzige positive Gleichgewichtspunkt $u_* = 2$ instabil und da $f - \text{id}$ dort monoton wachsend ist, bewegen sich die Lösungen monoton von diesem Fixpunkt weg. Falls $u_0 > 2$ ist, so divergiert die Lösung gegen unendlich (graue Trajektorie im Beispiel), für $0 < u_0 < 2$ konvergiert die Lösung gegen den stabilen Fixpunkt 0 . Beim dritten Beispiel haben wir die drei instabilen Gleichgewichtspunkte $0, \frac{64}{25} \pm \frac{1}{4}\sqrt{10}$.

Dass eine autonome Differenzgleichung erster Ordnung zu gegebenem Anfangswert eine eindeutige Lösung hat, sollte nicht überraschen. Es handelt sich bei dieser Lösung ja gerade um die durch die Gleichung rekursiv definierte Zahlenfolge. Anders als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann die Lösung insbesondere nicht in endlicher Zeit divergieren, sondern existiert für alle Zeiten.

2.2.2 Gleichgewichtspunkte, Stabilität und periodische Lösungen

Spannender ist die Frage nach Gleichgewichtspunkten und deren Stabilität sowie dem asymptotischen Verhalten der Lösungen. Erste Andeutungen dazu sehen wir bereits anhand der Skizzen zur Iteration. Wir hatten bereits erkannt, dass die Gleichgewichtspunkte an den Schnittpunkten des Graphen von f mit der Diagonalen abgelesen werden können. Um ihre Stabilität zu erahnen, sehen wir uns einige lokal (um den Gleichgewichtspunkt) lineare Funktionen f an.

Dabei fällt auf, dass die Trajektorien im Spinnennetzdiagramm zum Gleichgewichtspunkt hin streben, falls der Graph von f in der Nähe dieses Punktes hinreichend flach verläuft. Das kann man natürlich auch rechnerisch zeigen. Dazu entwickeln wir die nunmehr als mindestens stetig differenzierbar angenommene Funktion f um den Gleichgewichtspunkt u_* herum nach TAYLOR:

$$f(u) = f(u_*) + f'(u_*)(u - u_*) + o(|u - u_*|), \quad (2.2.2)$$

und da $f(u_*) = u_*$ ist, folgt für $u_n \approx u_*$:

$$|u_{n+1} - u_*| = |f(u_n) - u_*| = |f'(u_*)(u_n - u_*) + o(|u_n - u_*|)| \leq |f'(u_*)||u_n - u_*| + o(|u_n - u_*|) \quad (2.2.3)$$

Ist also $|f'(u_*)| < 1$, so wird tatsächlich u_{n+1} näher an u_* liegen als u_n . Das passt zu unserer qualitativen Beobachtung, dass u_* stabil sein sollte, falls der Graph von f hinreichend flach verläuft, und wir fassen zusammen.

Satz 2.2. *Die Differenzengleichung*

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

mit stetig differenzierbarem f habe den isolierten Gleichgewichtspunkt u_* (d.h., $f(u_*) = u_*$). Dann ist u_* stabil, falls $|f'(u_*)| < 1$ und instabil, falls $|f'(u_*)| > 1$.

Bemerkung 2.3. (i) Ein stabiler Gleichgewichtspunkt u_* wird Attraktor genannt. Gilt sogar $f'(u_*) = 0$, so wird u_* gelegentlich als Superattraktor bezeichnet. Die Menge der Anfangswerte u_0 , zu denen die Lösungen gegen u_* konvergieren, wird dann als Einzugsgebiet von u_* (engl. basin of attraction) bezeichnet und enthält eine Umgebung von u_* .

(ii) Bei einem stabilen Gleichgewichtspunkt u_* sagt uns das Vorzeichen der Ableitung etwas über das Monotonieverhalten der Lösungen bei der Annäherung an den Fixpunkt. Man erkennt anschaulich in den Spinnennetzdiagrammen, dass im Fall $f'(u_*) < 0$ die Iterationen in den Fixpunkt hineinspiralen, während die Annäherung im Fall $f'(u_*) > 0$ monoton ist. Das Verhältnis der Vorzeichen von $u_n - u_*$ zu $u_{n+1} - u_*$ in Abhängigkeit des Vorzeichens von $f'(u_*)$ kann man auch an der TAYLORentwicklung ablesen:

$$u_{n+1} - u_* = f'(u_*)(u_n - u_*) + o(|u_n - u_*|).$$

(iii) Ganz anders als bei kontinuierlichen dynamischen Systemen in einer Dimension ist es bei den hier untersuchten diskreten Gleichungen nicht nur in degenerierten Fällen möglich, dass mehrere stabile oder instabile Fixpunkte vorliegen können, ohne dass es welche der anderen Art gäbe. Das dritte Beispiel in Abbildung 2.1 besitzt etwa drei instabile, jedoch keinen stabilen Gleichgewichtspunkt.

(iv) Ein weiterer, im gleichen Beispiel beobachtbarer Unterschied zu kontinuierlichen Systemen ist die Möglichkeit, dass Lösungen über einen oder sogar mehrere instabile Gleichgewichtspunkte hinweg springen können. Das ergibt sich aus den diskreten Orbits, die keine Probleme damit haben, einander nicht schneiden zu können. Vergleicht man dieses Beispiel mit dem in Abbildung 2.2, so erkennt man, dass das Überspringen des größeren instabilen Gleichgewichtspunkts nur dadurch gelingt, dass f an seinem lokalen Maximum einen größeren Wert annimmt als am fraglichen Gleichgewichtspunkt.

Beispiel 2.4. *Zum System*

$$u_{n+1} = u_n^3 + 0.75u_n$$

stellen wir zunächst fest, dass die Halbachsen $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$ invariante Gebiete sind. Ferner finden wir die Fixpunkte $u_* = 0$ und $u_*^\pm = \pm \frac{1}{2}$. Der erste ist wegen

$$f'(0) = \frac{3}{4}$$

stabil, die beiden anderen sind instabil:

$$f' \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 3 \left(\pm \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Wie bei Differenzialgleichungen auch hilft uns die Linearisierung nicht weiter, wenn die Ableitung gerade an der Grenze der Stabilitätsbedingung liegt. In diesem Fall sind die höheren Ableitungen zu berücksichtigen, wie folgendes Beispiel zeigt.

Übungsaufgabe. Man berechne alle Gleichgewichtspunkte des Systems

$$u_{n+1} = u_n^3 + u_n$$

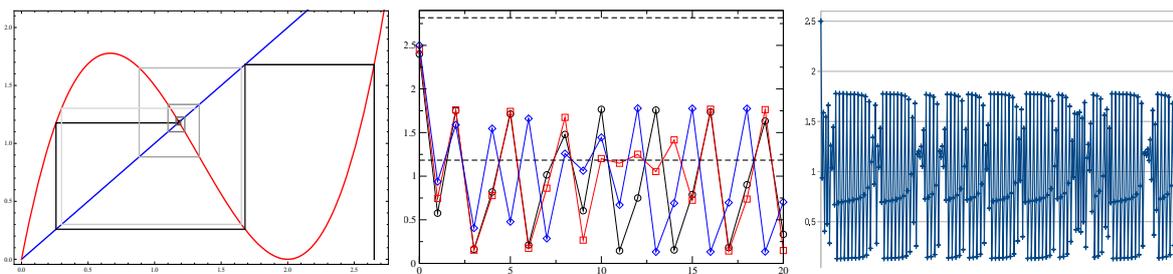


Abbildung 2.2: Verschiedene Aspekte der Lösungen des Systems $u_{n+1} = 1.5u_n(u_n - 2)^2$. Links: Spinnennetzdiagramm für $u_0 = 2.65$. Man beachte, dass hier die Lösungen zwischen den Fixpunkten 0 und $u^* \approx 2.8165$ beschränkt bleiben, jedoch nicht etwa gegen den Punkt $u_* = 1.1835$ konvergieren. Selbst wenn, wie in diesem Beispiel, die Lösung sehr nah an den Fixpunkt herankommt, entfernt sie sich wieder davon. Mitte: Lösungen für sehr ähnliche Anfangsbedingungen $u_0 = 2.4$, $u_0 = 2.45$, $u_0 = 2.5$. Man beachte die stark unterschiedlichen Lösungen. Die Fixpunkte sind durch gestrichelte Linien angedeutet. Rechts: Dieses System liefert auch ein Beispiel für fast periodische Lösungen (hier für $u_0 = 2.5$). Der Wechsel zwischen fast periodischen Abschnitten und kurzen Brücken nahe eines Fixpunkts ist ein typisches Phänomen in diskreten dynamischen Systemen.

und bestimme deren Stabilität!

N.B.! Satz 2.2 ist hier nicht anwendbar.

Hinweis. Man führe die in Punkt (ii) angegebene TAYLOR-Entwicklung für höhere Ordnungen durch.

Der Beweis der folgenden interessanten Folgerung ist ebenfalls eine einfache *Übungsaufgabe*.

Korollar 2.5. Die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sei zweimal stetig differenzierbar, erfülle $f''(u) < 0$ für alle $u > 0$, $f(0) = 0$ und habe ferner den Fixpunkt $u_* > 0$. Ist $f'(u_*) \geq 0$, so ist u_* ein Attraktor und sein Einzugsgebiet ist die gesamte positive Halbachse $(0, \infty)$.

Im Gegensatz zu Differentialgleichungen ist die Untersuchung periodischer Lösungen für autonome Differenzgleichungen kaum von der Untersuchung von Gleichgewichtspunkten zu unterscheiden. Eine periodische Lösung ist nämlich eine solche, für welche eine natürliche Zahl N derart existiert, dass für alle $n \geq 0$

$$u_n = u_{n+N}$$

gilt. Falls die zu untersuchende Gleichung tatsächlich autonom ist, bedeutet das nichts anderes als

$$u_n = f^{\circ N}(u_n) \quad \text{für alle } n,$$

wobei $f^{\circ N}$ die N -fache Verkettung von f mit sich selbst bezeichnet.

Ist also etwa u_* ein Fixpunkt von $f^{\circ N}$, so finden wir für $u_0 = u_*$:

$$u_N = f^{\circ N}(u_0) = u_0, \quad u_{N+1} = f(u_N) = f(u_0) = u_1, \quad u_{N+2} = f(u_{N+1}) = f(u_1) = u_2, \dots$$

Damit erhalten wir tatsächlich eine periodische Lösung. Ist insbesondere $N > 1$ und gilt $f^{\circ n}(u_*) \neq u_*$ für alle natürlichen Zahlen $n < N$ (man bezeichnet dann N als die – eindeutig bestimmte – Periode der Lösung), so hat $f^{\circ N}$ notwendigerweise $N-1$ weitere Fixpunkte, nämlich $f(u_*)$, $f(f(u_*))$, \dots , $f^{\circ N-1}(u_*)$.

Die Stabilität einer solchen periodischen Lösung lässt sich auch sehr leicht untersuchen. Wir betrachten nämlich einfach die Gleichung

$$v_{n+1} = g(v_n) \equiv f^{\circ N}(v_n) \tag{2.2.4}$$

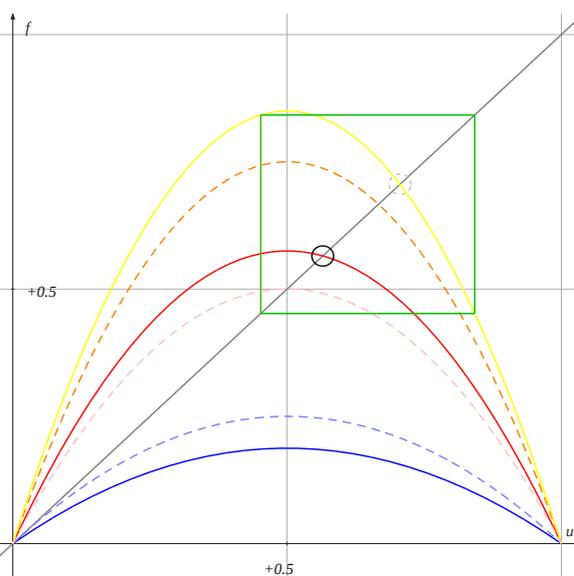
mit f^N als rechter Seite. Verglichen mit der ursprünglichen Gleichung gilt damit also $v_n = u_{nN}$. Nun ist selbstverständlich u_* ein Gleichgewichtspunkt dieser neuen Gleichung, dessen Stabilität wir an der Ableitung von $f^{\circ N}$ ablesen können (man beachte, dass die Verkettung nichts an der stetigen Differenzierbarkeit ändert). Auch hier stellen wir fest, dass wir einen beliebigen anderen der Fixpunkte von $f^{\circ N}$ hätten wählen können, ohne dass sich das Ergebnis ändern könnte:

$$\begin{aligned} g'(u_0) &= \frac{d}{du} \Big|_{u_0} (f \circ f \circ \dots \circ f)(u_0) = f'(\underbrace{f^{\circ N-1}(u_0)}_{= u_{N-1}}) (f^{\circ N-1}(u_0))' \\ &= \dots = f'(u_{N-1})f'(u_{N-2}) \dots f'(u_1)f'(u_0). \end{aligned}$$

Um das Bild abzurunden, stellen wir noch fest, dass ein Gleichgewichtspunkt einer autonomen Differenzgleichung erster Ordnung auch als periodische Lösung der Periode $N = 1$ betrachtet werden kann. Das erklärt auch die Analogie zwischen Gleichgewichts- und periodischen Lösungen.

Graphisch erkennt man eine 2-periodische Lösung als achsenparalleles Rechteck im Spinnennetzdiagramm, dessen Ecken je zur Hälfte auf der Diagonalen und dem Graphen von f liegen.

Abbildung 2.3: Verschiedene Graphen von f_μ für $\mu = 0.75, 1, 2, 2.3, 3, 3.4$ (von unten nach oben) für die logistische Gleichung. Gestrichelte Kurven entsprechen Grenzfällen in für das Verhalten der Lösungen. Für $\mu = 2.3$ und $\mu = 3.4$ sind die Fixpunkte (stabil = schwarz, durchgezogen, instabil = grau, gepunktet) durch Kreise markiert. Für $\mu = 3.4 > 1 + \sqrt{5}$ ist der stabile 2-periodische Orbit grün angedeutet (im Fall $\mu < 1 + \sqrt{5}$ wäre die linke obere Ecke rechts vom Maximum von f_μ , für $\mu = 1 + \sqrt{5}$ im Maximum). Den Superattraktor für $\mu = 2$ im Punkt $u = 0.5$ erkennt man ebenfalls daran, dass der Schnittpunkt mit der Diagonalen gerade der Scheitel der Kurve ist. Beobachtet man das Verhalten der Graphen in der Nähe des Ursprungs, so erkennt man auch graphisch, wie die Entstehung des zusätzlichen Gleichgewichtspunkts für $\mu > 1$ mit der Destabilisierung der Null als Gleichgewichtspunkt einhergeht.



Beispiel 2.6. Am einfachsten veranschaulicht man das Konzept periodischer Lösungen an der linearen Gleichung

$$u_{n+1} = f(u_n) = a - u_n \quad (2.2.5)$$

mit beliebiger Konstante a . Hier ist nun $f^{\circ 2} = \text{id}$, also ist jedes $u_* \in \mathbb{R}$ ein Fixpunkt von $f^{\circ 2}$, es gibt also ein ganzes Kontinuum 2-periodischer Lösungen. Eine Stabilitätsaussage kann hier natürlich nicht getroffen werden, $f^{\circ 2}$ die Ableitung 1 hat.

Beispiel 2.7. Ein nicht triviales Beispiel liefern die Funktionen $f_\mu(u) = \mu u(1 - u)$ der logistischen Familie, die durch den positiven Parameter μ charakterisiert werden. Wir bemerken zunächst, dass unabhängig von μ die Funktion f die Nullstellen 0 und 1 hat und ihr Maximum $\frac{\mu}{4}$ im Punkt $u = \frac{1}{2}$ annimmt. Insbesondere bildet f_μ für $0 < \mu \leq 4$ das Intervall $[0, 1]$ in sich selbst ab. Beginnen wir also mit $u_0 \in [0, 1]$, so bleiben die Lösungen u_n stets in diesem Intervall.

Als Gleichgewichtspunkte finden wir $u^* = 0$ und für den Fall $\mu > 1$ $u_* = 1 - \frac{1}{\mu}$. Die Ableitungen von f_μ in diesen Gleichgewichtspunkten berechnen wir als

$$f'_\mu(u) = \mu(1 - 2u), \quad f'_\mu(0) = \mu, \quad f'_\mu(u_*) = 2 - \mu.$$

Die Eigenschaften der Fixpunkte ändern sich also mit dem Parameter μ . Für kleine μ sei dies als Übungsaufgabe belassen.

Übungsaufgabe. Man diskutiere die Existenz und Stabilität der Gleichgewichtspunkte 0 und u_* separat für die Werte $\mu \in (0, 1)$, $\mu = 1$ $\mu \in (1, 3)$ des Parameters. Man untersuche ferner die Monotonie der Lösungen für $\mu \in (1, 2)$ sowie für $\mu \in (2, 3)$ (was geschieht z.B. im Fall $\mu < 2$ mit Lösungen zu Anfangsbedingungen $u_0 < u_*$ vs. $u_0 \in (u_*, \frac{1}{\mu})$ vs. $u_0 > \frac{1}{\mu}$? Was passiert speziell für $u_0 = \frac{1}{\mu}$?).

Auf der Suche nach periodischen Lösungen der Periode 2 betrachten wir

$$f_\mu^{\circ 2}(u) = f_\mu(\mu u(1 - u)) = \mu^2 u(1 - u)(1 - \mu u + \mu u^2)$$

und finden auf der Suche nach dessen Fixpunkten die Gleichung

$$0 = \mu^2 u(1 - u)(1 - \mu u + \mu u^2) - u = \mu^2 u \left(1 - \frac{1}{\mu^2} - (\mu + 1)u + 2\mu u^2 - \mu u^3 \right).$$

Zwei Lösungen dieser Gleichung, nämlich $u = 0$ und $u = u_* = 1 - \frac{1}{\mu}$ kennen wir bereits, und wir dividieren letztere von dem Term in der Klammer ab:

$$\left(u^3 - 2u^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) u - \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \right) : \left(u - \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \right) = u^2 - \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) u + \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\nu := \frac{1}{\mu} + 1,$$

so ergeben sich die beiden verbleibenden Fixpunkte von $f^{\circ 2}$ als Lösungen der quadratischen Gleichung

$$0 = u^2 - \nu u + \nu(\nu - 1).$$

Diese Lösungen sind reell, falls die Diskriminante

$$\Delta = \nu^2 - 4\nu(\nu - 1) = \nu(4 - 3\nu)$$

nicht negativ, also

$$\frac{1}{\mu} + 1 = \nu \leq \frac{4}{3}$$

ist. Das übersetzen wir zu $\mu \geq 3$. Im Fall der Gleichheit ergibt sich eine doppelte Lösung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3},$$

die also auch noch mit dem bereits bekannten Fixpunkt u_* zusammenfällt. Wird μ hingegen größer als 3, ergeben sich nun zwei Punkte p_{\pm} derart, dass $u_* \in (p_-, p_+)$ gilt.

Da ferner $\nu(\nu - 1) > 0$ für alle infrage kommenden ν ist, werden stets beide Wurzeln, sofern sie überhaupt reell sind, positiv sein, und wir finden tatsächlich stets zwei nicht triviale Fixpunkte von $f_{\mu}^{\circ 2}$, falls $\mu > 3$ ist.

Außerdem stellen wir fest, dass für $\mu > 3$ auch die Ableitung $f'(u_*) = 2 - \mu$ kleiner als -1 wird, dieser Gleichgewichtspunkt also seine Stabilität verliert. Da es sich für $2 < \mu < 3$ um einen stabilen Fixpunkt handelte, in den die Lösungen hineinszillierten, wundert es in Erinnerung an die HOPF-Verzweigung nicht, dass sich im Moment der Destabilisierung eine periodische Lösung (in unserem Fall der Periode 2) ausbildet. Man spricht im Rahmen der Theorie diskreter dynamischer Systeme auch vom Phänomen der Periodenverdopplung.

Zusatz. Die nächste Periodenverdopplung findet statt, wenn μ den Wert $1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ überschreitet. Das ergibt sich aus der Berechnung der Ableitung

$$\frac{df_{\mu}^{\circ 2}}{du}(p_{\pm}) = -\mu^2 + 2\mu + 4,$$

die für $\mu_1 = 3$ den Wert 1 annimmt, für wachsende μ kleiner wird, bei $\mu = 1 + \sqrt{5} \approx 3.236$ verschwindet und bei $\mu_2 = 1 + \sqrt{6}$ den Wert -1 erreicht.

Dort wird die bis dato periodische Lösung

$$u_n = \begin{cases} p_- & \text{falls } n \text{ gerade} \\ p_+ & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

instabil und eine $2^2 = 4$ -periodische Lösungen (d.h., zusätzliche reelle Lösungen der Gleichung $f_{\mu}^{\circ 4}(u) = u$) tauchen auf. Für wachsende μ wiederholt sich dieser Vorgang der Periodenverdopplung in immer kürzeren Abständen, und die mit $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1 + \sqrt{6}$ beginnende Folge (μ_k) der Werte, an denen die 2^{k-1} -periodischen Lösungen instabil werden und 2^k -periodischen Platz machen, konvergiert gegen $\mu_{\infty} \approx 3.57$.

N.B. Die Instabilität eines Gleichgewichtspunkts u_* bedeutet nicht, dass es keine Anfangswerte gäbe, für welche die Lösungen gegen u_* konvergierten. Genauer wird es üblicherweise spezielle Anfangswerte u_0 geben, für die die Lösung nach endlich vielen (sagen wir k) Schritten genau den Punkt $u_k = u_*$ trifft. Eine solche Lösung bleibt dann natürlich in diesem Punkt stecken. Man erinnere sich daran, dass auch für kontinuierliche dynamische Systeme Lösungen gegen instabile Fixpunkte konvergieren können (etwa auf stabilen Mannigfaltigkeiten von Sattelpunkten). Allerdings ist die Menge der möglichen Anfangsbedingungen, deren zugehörige Lösungen zu einem instabilen Gleichgewichtspunkt streben, in beiden Fällen in gewissem Sinne klein.

Bemerkung 2.8. Die meisten der hier gegebenen Aussagen lassen sich problemlos auf Systeme von Differenzgleichungen erster Ordnung erweitern. Die Unterschiede sind sogar geringer als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, da für die hier betrachteten diskreten Systeme in den Dimensionen eins und zwei keine Beschränkungen aus dem Verbot einander schneidender Orbits folgen. Daher können Phänomene wie periodische Lösungen, komplizierte Verzweigungen und Chaos, die im kontinuierlichen Fall mindestens zwei oder gar drei Dimensionen voraussetzen, im diskreten Fall bereits für eindimensionale Systeme beobachtet werden.

2.2.3 Einige Bemerkungen zu Verzweigungen in diskreten dynamischen Systemen

Im letzten Beispiel hatten wir gesehen, dass die Existenz und Stabilität von Fixpunkten und periodischen Lösungen eines dynamischen Systems

$$u_{n+1} = F(u_n, \mu), \quad (2.2.6)$$

dessen rechte Seite neben dem Zustand u_n auch noch von einem Parameter μ abhängt, ganz wesentlich vom Wert dieses Parameters abhängt. Gibt es einen Wert $\bar{\mu}$ derart, dass sich für $\mu \lesssim \bar{\mu}$ und $\mu \gtrsim \bar{\mu}$ verschiedene Lösungstypen ergeben, so spricht man von einer Verzweigung.

Der erste spannende Wert im Beispiel 2.7 war $\mu = 1$, an dem der Gleichgewichtspunkt $u^* = 0$ seine Stabilität verlor und durch das neu auftretende Gleichgewicht $u_* = 1 - \frac{1}{\mu}$ ersetzt wurde. Dabei handelte es sich aber streng genommen nicht um eine Verzweigung, da beide Gleichgewichtspunkte schon für $\mu < 1$ existierten, bei $\mu = 1$ zusammen fielen und für $\mu > 1$ schlicht ihr Stabilitätsverhalten getauscht hatten. Den für $\mu < 1$ negativen Punkt u_* hatten wir nur nicht auf der Rechnung, weil wir von positiven Anfangswerten ausgegangen waren, deren Lösungen den stabilen Gleichgewichtspunkt 0 nicht überschreiten konnten.

Die vermutlich einfachste „echte“ Verzweigung ist die Faltenverzweigung, die sich dadurch auszeichnet, dass bei Durchschreiten eines kritischen Parameterwerts $\bar{\mu}$ zwei Gleichgewichtspunkte entgegengesetzter Stabilität auftauchen. Wir illustrieren dies zunächst an einem Beispiel und zitieren dann den relevanten Satz.

Beispiel 2.9. *Die Familie*

$$u_{n+1} = u_n^2 + \mu \quad (2.2.7)$$

quadratischer Gleichungen ($F(u, \mu) = u^2 + \mu$) besitzt als Fixpunkte die reellen Lösungen der Gleichung

$$u \stackrel{!}{=} F(u, \mu) = u^2 + \mu,$$

also

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\mu} \right). \quad (2.2.8)$$

Diese sind tatsächlich reell, falls $\mu \leq \frac{1}{4}$ ist, andernfalls gibt es keine Fixpunkte. Wir erkennen das auch graphisch im Spinnennetzdiagramm, und zwar daran, dass die den Graphen von $F(\cdot, \mu)$ beschreibende Parabel für $\mu > \frac{1}{4}$ komplett oberhalb der Diagonalen liegt, diese für $\mu = \frac{1}{4}$ berührt und für $\mu < \frac{1}{4}$ zwei Schnittpunkte mit ihr hat.

Deren Stabilität berechnen wir auch zügig durch

$$\partial_u F(u_{\pm}, \mu) = 2u_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - 4\mu}.$$

Dieser Wert ist für u_+ stets größer und für u_- kleiner als 1. Solange also μ nicht zu klein wird (der kritische Wert hierfür ist $-\frac{3}{4}$, dann ist $1 - \sqrt{1 - 4\mu} = -1$), haben wir also einen stabilen Fixpunkt u_- und einen instabilen u_+ .

Am Wert $\bar{\mu} = \frac{1}{4}$ selbst haben wir natürlich genau einen Fixpunkt $\bar{u} = \frac{1}{2}$ mit $\partial_u F(\bar{u}, \bar{\mu}) = 1$.

Die hier an einem besonders einfachen Beispiel angestellten Beobachtungen wollen wir verallgemeinern.

Satz 2.10. *Die Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar bezüglich des ersten und einmal stetig differenzierbar bezüglich des zweiten Arguments, und erfülle im Punkt $(\bar{u}, \bar{\mu})$ die Bedingungen*

$$F(\bar{u}, \bar{\mu}) = \bar{u}, \quad \partial_u F(\bar{u}, \bar{\mu}) = 1, \quad \partial_{uu} F(\bar{u}, \bar{\mu}) > 0, \quad \partial_{\mu} F(\bar{u}, \bar{\mu}) > 0. \quad (2.2.9)$$

Dann existieren $\mu_1 < \bar{\mu}$, $\mu_2 > \bar{\mu}$ und $d > 0$ derart, dass die Gleichung (2.2.6)

(i) für alle $\mu \in (\mu_1, \bar{\mu})$ zwei Fixpunkte $u_{\pm}(\mu) \in (\bar{u} - d, \bar{u} + d)$ entgegengesetzter Stabilität besitzt und

(ii) für alle $\mu \in (\bar{\mu}, \mu_2)$ keine Fixpunkte in $(\bar{u} - d, \bar{u} + d)$ besitzt.

Der (hier nicht ausgeführte) Beweis beruht im wesentlichen auf dem Satz über implizite Funktionen, der die eindeutige Auflösung der Gleichung $F(u, \mu) = u$ um den Punkt $(\bar{u}, \bar{\mu})$ nach $u \mapsto \mu(u)$ erlaubt und aus den angegebenen Werten der Ableitungen Aussagen über das lokale Verhalten dieser Kurve in der u - μ -Ebene ergibt.

Das zweite Verzweigungsereignis in Beispiel 2.7 war die Periodenverdopplung. Dort hatten wir am kritischen Wert $\mu_1 = 3$ den einzelnen Fixpunkt $u_* = \frac{2}{3}$ mit zugehöriger Ableitung $\partial_u F(u_*, 3) = f'_3(u_*) = -1$. Für kleinere Werte von μ ist dieser Fixpunkt stabil, für größere instabil. Das wollen wir nun wieder allgemeiner fassen, wobei wir die Variablen derart verschieben, dass F bei $\bar{\mu} = 0$ den Fixpunkt $\bar{u} = 0$ mit der Ableitung $\partial_u F(0, 0) = -1$ hat. Das erlaubt eine etwas weniger überladene Notation.

Satz 2.11. Die Funktion $F \in C^3(\mathbb{R}^2)$ erfülle

$$F(0,0) = 0, \quad \partial_u F(0,0) = -1, \quad 2\partial_{uuu}F(0,0) + 3(\partial_{uu}F(0,0))^2 > 0.$$

Die lokale Auflösung von $F(u, \mu) = 0$ nach $u = v(\mu)$ erfülle

$$\frac{d}{d\mu} \Big|_{\mu=0} \partial_u F(v(\mu), \mu) > 0.$$

Dann existieren $\mu_1 < 0$ und $\mu_2 > 0$ sowie $d > 0$ derart, dass das System (2.2.6)

(i) für alle $\mu \in (\mu_1, 0)$ im Intervall $(-d, d)$ einen instabilen Fixpunkt $v(\mu)$ und eine stabile 2-periodische Lösung $p_{\pm}(\mu)$ besitzt und

(ii) für alle $\mu \in (0, \mu_2)$ im Intervall $(-d, d)$ einen stabilen Fixpunkt $v(\mu)$ besitzt, der sich als einziger Fixpunkt von $u \mapsto F(F(u, \mu), \mu)$ in diesem Intervall ergibt.

Bevor wir uns der Existenztheorie für allgemeinere Differenzgleichungen zuwenden, wollen wir noch ein weiteres bei der logistischen Gleichung

$$u_{n+1} = \mu u_n(1 - u_n) \tag{2.2.10}$$

auf tretendes Phänomen erwähnen. Dabei handelt es sich um Lösungen der Periode 3 und Folgerungen aus deren Existenz. Wir hatten gesehen, dass die Gleichung für $0 < \mu < 1$ als einzigen nicht negativen Gleichgewichtspunkt $u^* = 0$ hat und dieser stabil ist. Für $1 < \mu < 3$ hatten wir die 0 als instabilen und $u_* = 1 - \frac{1}{\mu}$ als stabilen Fixpunkt identifiziert. Weiter ging es für $3 < \mu < \mu_{\infty} \approx 3.57$ mit stabilen periodischen Lösungen mit Zweierpotenzen als Periode. Für $\mu \geq \mu_{\infty}$ werden all diese periodischen Lösungen instabil und das System wird chaotisch.

Spannend wird es dann wieder für $\mu = 1 + \sqrt{8} \approx 3.8284$. Bei diesem Wert berührt nämlich der Graph von $f_{\mu}^{\circ 3}$ die Diagonale in einem von u_* und 0 verschiedenen Punkt und wir finden drei zusätzliche reelle Fixpunkte von $f_{\mu}^{\circ 3}$ für $\mu \gtrsim 1 + \sqrt{8}$, erhalten also einen (wie man nachrechnen kann, zunächst stabilen) 3-periodischen Orbit. (Wir finden sogar 6 zusätzliche Fixpunkte von $f_{\mu}^{\circ 3}$, von denen drei den stabilen und drei weitere einen instabilen 3-periodischen Orbit bilden).

Nun besagt der Satz von SARKOVSKY, dass ein diskretes dynamisches System mit einem 3-periodischen Orbit notwendigerweise auch periodische Orbits jeder anderen Periode (insbesondere auch Fixpunkte) besitzt. Damit hat die logistische Gleichung für $\mu > 1 + \sqrt{8}$ periodische Orbits jeder Periode.

Das wollen wir kurz beweisen, wozu wir ein paar Hilfsaussagen benötigen.

Lemma 2.12. Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle $[a, b] \subset f([a, b])$. Dann hat f in $[a, b]$ einen Fixpunkt.

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es $\alpha, \beta \in [a, b]$ mit $f(\alpha) = a \leq \alpha$ und $f(\beta) = b \geq \beta$. Also wechselt $f - \text{id}$ zwischen α und β das Vorzeichen, hat dort also eine Nullstelle u_* : $f(u_*) - u_* = 0$. \square

Lemma 2.13. Für kompakte Intervalle I und $[a, b]$ sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $[a, b] \subset f(I)$. Dann gibt es ein kompaktes Intervall $J \subset I$ mit $[a, b] = f(J)$.

Beweis. Sei $\alpha := \max\{x \in I \mid f(x) = a\}$. Falls $f(x) = b$ für gewisse $x > \alpha$, wähle

$$\beta = \min\{x \in I \mid \alpha < x, f(x) = b\}.$$

Dann erfüllt $J = [\alpha, \beta]$ die Behauptung.

Andernfalls gilt $f(x) = b$ für mindestens ein $x < \alpha$ in I . Von diesen nehmen wir nun wieder das größte: $\beta := \max\{x \in I \mid x < \alpha, f(x) = b\}$. Wählen wir nun noch $\gamma := \{x \in I \mid x > \beta, f(x) = a\}$, so erfüllt $J = [\beta, \gamma]$ die Behauptung. \square

Nun formulieren und beweisen wir den Satz von SARKOVSKY.

Satz 2.14. Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiere ein 3-periodischer Orbit, d.h., es gebe paarweise verschiedene $u, v, w \in \mathbb{R}$ mit

$$v = f(u), \quad w = f(v), \quad u = f(w).$$

Dann existiert zu jedem $N \geq 1$ ein N -periodischer Orbit für f .

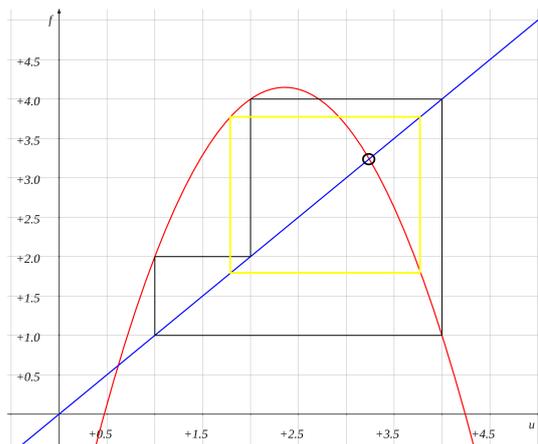


Abbildung 2.4: Illustration zu 3-periodischen Lösungen. Die Funktion f (rot) wurde derart gewählt, dass $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ und $f(4) = 1$ gilt. Das führt zum schwarz als Spinnennetzdiagramm eingezeichneten 3-periodischen Orbit. Den vom Satz vorhergesagten Fixpunkt in $I_1 = [2, 4]$ haben wir eingekreist und den 2-periodischen Orbit in gelb angedeutet.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $u < v < w$ an. Die übrigen möglichen Reihenfolgen können wir daraus durch Spiegelung an der Null und zyklisches Vertauschen der Namen in der Voraussetzung erreichen.

Nun setzen wir $I_0 = [u, v]$ und $I_1 = [v, w]$. Dann ist (wegen $f(u) = v$ und $f(v) = w$) $I_1 \subset f(I_0)$ und (wegen $f(w) = u$ und $f(v) = w$) $I_0 \cup I_1 = [u, w] \subset f(I_1)$.

Nach obigem Lemma finden wir wegen $I_1 \subset f(I_1)$ ein kompaktes Intervall $J_1 \subset I_1$ mit $f(J_1) = I_1$ und weiter wegen $J_1 \subset I_1 = f(J_1)$ ein anderes kompaktes Intervall $J_2 \subset J_1$ mit $f(J_2) = J_1$. Zusammen haben wir also

$$J_2 \subset J_1 \subset I_1, \quad f^{\circ 2}(J_2) = f(f(J_2)) = f(J_1) = I_1.$$

Induktiv finden wir also zu gegebenem $n \geq 4$ kompakte Intervalle $I_1 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_{n-2}$.

Dann haben wir wegen $J_{n-2} \subset I_1 \subset f(I_0)$ ein kompaktes Intervall $J_{n-1} \subset I_0$ mit $f(J_{n-1}) = J_{n-2}$ und wegen $J_{n-1} \subset I_0 \subset f(I_1)$ ein kompaktes Intervall $J_n \subset I_1$ mit $f(J_n) = J_{n-1}$.

Wir finden also zu beliebigem n eine Sequenz

$$I_1 \supset J_n \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_{n-2} \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} J_2 \xrightarrow{f} J_1 \xrightarrow{f} I_1,$$

wobei jeder Schritt surjektiv ist, also bildet $f^{\circ n} I_1$ auf eine Obermenge seiner selbst ab und hat damit nach dem ersten obigen Lemma einen Fixpunkt $u_* \in I_1$.

Nun liegt aber $f(u_*)$ für u_* in $J_{n-1} \subset I_0$, während alle weiteren Iterationen bis zur n -ten in den $J_{n-k} \subset I_1$ liegen. Da $v = I_0 \cap I_1$ nicht als $f(u_*)$ infrage kommt (sonst wäre $f^{\circ 3}(u_*) = f^{\circ 2}(v) = f(w) = u \notin I_1$), kann die Periode des aus $u_*, f(u_*), \dots, f^{\circ n-1}(u_*)$ bestehenden Orbits nicht kleiner als n sein. Wir haben also zu gegebenem $n \geq 4$ einen n -periodischen Orbit gefunden.

Schließlich besitzt f wegen $I_1 \subset f(I_1)$ auch einen Fixpunkt und wegen $I_1 \subset f(I_0)$ und $I_0 \subset f(I_1)$ (also $I_0 \subset f^{\circ 2}(I_0)$) einen 2-periodischen Orbit, von denen ein Punkt in I_0 liegt und damit kein Fixpunkt von f selbst sein kann (finde $A \subset I_0$ mit $f(A) = I_1$, dann ist $I_0 \subset f(I_1) = f(f(A))$, also existiert Fixpunkt u^* von $f^{\circ 2}$ in A , aber wegen $f(A) = I_1$ ist $f(u^*) \notin I_0$). \square

Bemerkung 2.15. Das volle SARKOVSKY-Theorem sagt allgemeiner aus, dass ein System mit einem n -periodischen Orbit ungerader Periode n auch periodische Orbits jeder höheren Periode sowie jeder kleineren geraden Periode aufweist. Aus einer weiteren Verfeinerung dieser Aussage schließt man sogar, dass in einem System mit nur endlich vielen periodischen Orbits deren Perioden notwendigerweise Zweierpotenzen sein müssen, wie wir es für die logistische Gleichung mit $\mu < \mu_\infty \approx 3.57$ beobachtet haben.

2.3 Lösungen allgemeinerer Differenzgleichungen

Nun betrachten wir Differenzgleichungen höherer Ordnung k

$$F(n, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.3.1)$$

hier in impliziter Form mit $F : \mathbb{N} \times I^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dabei ist $I \subset \mathbb{R}$ der Zustandsraum (meist ein Intervall oder ganz \mathbb{R}) und die Lösung ist wieder eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in I .

Erneut gibt es die Gleichung auch in autonomer Form, wenn F nicht explizit von n abhängt.

Führt man den Differenzenoperator Δ

$$\Delta u_n := u_{n+1} - u_n \quad (2.3.2)$$

ein, den man durch

$$\Delta^2 u_n := \Delta(\Delta u_n) = \Delta(u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n, \dots \quad (2.3.3)$$

$$\Delta^k u_n := \Delta(\Delta^{k-1} u_n) = \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} u_{n+l} \quad (2.3.4)$$

vollkommen intuitiv iterieren kann, lässt sich (2.3.1) auch in einer an Differenzialgleichungen erinnernden Form

$$G(n, \Delta u_n, \dots, \Delta^k u_n) = 0 \quad (2.3.5)$$

schreiben.

Bemerkung 2.16. *Der Differenzenoperator Δ kommt in der Numerik bei der Diskretisierung von Differenzialgleichungen im Verfahren finiter Differenzen vor. Diese sind auch eine reichhaltige Quelle von Differenzengleichungen.*

In vielen Anwendungsfällen lassen sich diese impliziten Gleichungen nach der höchstindizierten Variablen u_{n+k} oder nach $\Delta^k u_n$ auflösen, was dann auf die Normalform (oder explizite Gleichung)

$$u_{n+k} = f(n, u_n, \dots, u_{n+k-1}) \quad (2.3.6)$$

führt. Diese lässt sich nach Angabe von Anfangsbedingungen u_0, \dots, u_{k-1} wieder iterativ lösen, und die Lösung existiert ganz offensichtlich global, wenn f in den Zustandsraum I abbildet. Gelingt es uns also, eine Differenzengleichung in explizite Form zu bringen, so ist der wesentliche Schritt zum Auffinden einer Lösung bereits getan.

Beispiel 2.17. *Ein bereits bekanntes Beispiel einer autonomen Differenzengleichung zweiter Ordnung in bereits expliziter Form ist die Bildungsvorschrift für die FIBONACCI-Zahlen:*

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 1. \quad (2.3.7)$$

Die Lösung ist durch

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}}$$

gegeben.

Wie von Differenzialgleichungen bekannt, kann man auch eine Differenzengleichung k -ter Ordnung in ein System von k Gleichungen erster Ordnung, also in ein k -dimensionales dynamisches System umschreiben. Dazu definiert man die Folgen $(v_n^0), \dots, (v_n^{k-1})$ als

$$v_n^i := u_{n+i} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, i = 0, \dots, k-1,$$

insbesondere $(v_n^0) = (u_n)$. Das liefert dann anstelle von (2.3.6) die Gleichungen

$$v_{n+1}^0 = v_n^1, \quad v_{n+1}^1 = v_n^2, \dots, \quad v_{n+1}^{k-2} = v_n^{k-1}, \quad v_{n+1}^{k-1} = f(n, v_n^0, \dots, v_n^{k-1}). \quad (2.3.8a)$$

Für nicht autonome Gleichungen wird es im allgemeinen schwer, eine geschlossene Lösung anzugeben. In speziellen Fällen gelingt es aber doch und wir wollen einige Beispiele angeben.

Beispiel 2.18. *(lineare Gleichungen erster Ordnung)*

Für die nicht autonome, inhomogene Gleichung

$$u_{n+1} = a_n u_n + b_n, \quad u_0 = c \quad (2.3.9)$$

mit $a_n \neq 0$ (jedes $a_n = 0$ führt zu einem Reset des Problems mit Anfangswert b_n , sodass wir nur Probleme mit nicht verschwindenden a_n betrachten müssen). Wir dividieren die Gleichung mit $\prod_{k=0}^n a_k$ durch, setzen

$$v_n := \frac{u_n}{\prod_{k=0}^{n-1} a_k}$$

und erhalten

$$v_{n+1} - v_n = \frac{b_n}{\prod_{k=0}^n a_k}.$$

Summieren dieser Teleskopsumme von 0 bis N ergibt

$$v_{N+1} - v_0 = \sum_{n=0}^N \frac{b_n}{\prod_{k=0}^n a_k},$$

also

$$u_N = \prod_{k=0}^{N-1} a_k v_N = \prod_{k=0}^{N-1} a_k \left(c + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{b_n}{\prod_{k=0}^n a_k} \right)$$

Die allgemeine Theorie von Anfangs- oder gar Randwertproblemen für Differenzgleichungen höherer Ordnung setzt einen Differenzkalkül voraus, dessen Einführung – sofern nicht aus der Numerik bekannt – eine eigene Vorlesung beanspruchte und daher hier nicht ausgeführt werden kann.

2.4 Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben

2.4.1 Gleichgewichtspunkte von $u_{n+1} = u_n^3 + u_n$

Wir suchen Lösungen der Gleichung

$$u_n = u_n^3 + u_n = f(u_n),$$

also $u_n^3 = 0$. Das liefert $u_* = 0$ als einzigen Gleichgewichtspunkt. Dessen Stabilität können wir nicht nach Satz 2.2 bestimmen, da $f'(u) = 3u^2 + 1$, also $f'(0) = 1$ ist. Wir können aber leicht die (nach dem dritten Glied abbrechende) TAYLOR-Entwicklung aufschreiben, indem wir $f''(u) = 6u$, $f'''(u) = 6$ und $f^{(n)}(u) = 0$ für alle $n \geq 4$ nutzen:

$$f(u) - f(u_*) = (3u_*^2 + 1)(u - u_*) + \frac{6u_*^2}{2}(u - u_*)^2 + \frac{6}{6}(u - u_*)^3.$$

Man beachte, dass hier kein Restglied auftritt, da die Entwicklung abbricht. Es handelt sich also nicht um eine Approximation, sondern um Gleichheit. Wenig überraschend erhalten wir nun für $u_* = 0$ und $u = u_n$:

$$u_{n+1} = f(u_n) - 0 = f(u_n) - f(0) = (u_n - 0) + 0(u_n - 0)^2 + 1(u_n - 0)^3 = u_n + u_n^3,$$

was gerade wieder unsere ursprüngliche Gleichung ist. Diese Diskussion der TAYLOR-Entwicklung ist also für diesen Fall gar nicht nötig. (Das liegt natürlich daran, dass wir das einfachste mögliche Beispiel gewählt haben. Bei komplizierteren Fällen ist die Approximation durchaus hilfreich).

Nun interessieren wir uns dafür, wie sich Lösungen verhalten, für die $u_n \approx 0$ ist. Dazu stellen wir fest, dass für $u_n > 0$

$$|u_{n+1} - u_*| = u_{n+1} = u_n + u_n^3 > u_n = |u_n - u_*|$$

ist, während für $u_n < 0$

$$|u_{n+1} - u_*| = |u_{n+1}| = |u_n + u_n^3| = -u_n - u_n^3 > -u_n = |u_n - u_*|$$

gilt. Dies liefert gemäß unserer Diskussion zu Satz 2.2 die Instabilität des Gleichgewichtspunkts $u_* = 0$.

Allgemeiner kann man sich merken, dass im $|f'(u_*)| = 1$ die Stabilität des Gleichgewichtspunkts davon abhängt, ob die Linearisierung

$$f(u) \approx f(u_*) + f'(u_*)(u - u_*)$$

den Betrag von $f(u)$ in einer Umgebung von u_* über- oder unterschätzt. Genauer ist ein solcher Gleichgewichtspunkt instabil, wenn die erste nicht verschwindende höhere Ableitung $f^{(n)}(u_*)$ bei geradem n auftritt oder im Fall ungeraden n s das gleiche Vorzeichen hat wie $f'(u_*)$ und stabil, falls sie bei ungeradem n auftritt und das zu $f'(u_*)$ entgegengesetzte Vorzeichen hat.

2.4.2 Beweis von Korollar 2.5

Wegen der strikten Konkavität von f ist $f'(0) > 1$, da andernfalls $f'(u) < 1$ und $f(u) < u$ für alle $u > 0$ wäre. Das würde aber der Existenz des positiven Gleichgewichtspunkts u_* mit $f(u_*) = u_*$ widersprechen. Also ist für kleine $u > 0$ $f(u) > u$. Da die Funktion $u \mapsto f(u) - u$ die Nullstellen 0 und $u_* > 0$ hat, verschwindet ihre Ableitung $f'(u) - 1$ für einen Wert $\hat{u} \in (0, u_*)$ (Satz von ROLLE), und wieder wegen der strikten Konkavität von f ist dann $f'(u) < f'(\hat{u}) = 1$ für alle $u > \hat{u}$, insbesondere im Punkt $u_* > \hat{u}$.

Nun kann aber f' auch nicht negativ werden. Angenommen $f'(\bar{u}) = \alpha < 0$ für ein $\bar{u} > 0$. Dann wäre $f'(u) < \alpha$ für alle $u > \bar{u}$ und damit nach Integration auch $f(u) < f(\bar{u}) + \alpha(u - \bar{u})$. Für $u > \bar{u} - \frac{f(\bar{u})}{\alpha}$ wäre das dann negativ im Widerspruch zur Bedingung $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Also ist $0 \leq f'(u_*) < 1$ und u_* ein Attraktor.

Ferner folgt aus der Konkavität und der Monotonie ($f' > 0$) auch noch, dass u_* der einzige positive Gleichgewichtspunkt und insbesondere

$$u_* = f(u_*) > f(u) > u \quad \text{für } u \in (0, u_*)$$

und

$$u_* = f(u_*) < f(u) < u \quad \text{für } u \in (u_*, \infty)$$

ist. Damit gilt also für $u_n \in (0, u_*)$:

$$u_* > u_{n+1} = f(u_n) > u_n$$

und für $u_n \in (u_*, \infty)$

$$u_* < u_{n+1} = f(u_n) < u_n,$$

bei den Lösungen handelt es sich also um (strikt) monotone, durch u_* in die geeignete Richtung beschränkte Folgen, die demnach konvergieren müssen. Da die der Grenzwert u_∞ die Gleichung

$$u_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} f(u_\infty)$$

respektieren muss, kann es sich dabei nur um die einzige positive Lösung dieser Gleichung, nämlich u_* handeln. Dieser ist also Attraktor für alle Anfangsbedingungen $u_0 > 0$.

2.4.3 Gleichgewichtspunkte für die logistische Familie

Wir haben bereits diskutiert, dass der positive Gleichgewichtspunkt $u_* = 1 - \frac{1}{\mu}$ nur für $\mu > 1$ existiert (für $\mu = 1$ fällt er mit dem trivialen $u^* = 0$ zusammen).

Im Fall $\mu < 1$ ist 0 der einzige Gleichgewichtspunkt und wegen $f'_\mu(0) = \mu < 1$ auch stabil.

Für $\mu = 1$ ist dann auch $f'_1(0) = 1$, jedoch ist dieser Gleichgewichtspunkt wegen $f_1(u) < u$ für $u > 0$ stabil (wenn das System nur in $[0, 1]$ betrachtet wird).

Für $\mu > 1$ ist $f'_\mu(0) > 1$, die Null also instabil. Hingegen ist für $1 < \mu < 3$

$$f'_\mu(u_*) = 2 - \mu \in (-1, 1)$$

und u_* damit stabil.

Nun untersuchen wir noch die Monotonie der Lösungen.

Für $\mu \in (1, 2)$ ist der Punkt u_* kleiner als $\frac{1}{2}$ (zur Erinnerung: hier nimmt f_μ sein Maximum an) und $f'_\mu(u_*)$ ist positiv. Wegen der strikten Konkavität ist damit $u < f_\mu(u) < u_*$ für $u \in (0, u_*)$ und die Lösungen mit $u_0 \in (0, u_*)$ konvergieren monoton gegen u_* . Für $u \in (u_*, \frac{1}{2}]$ ist $u_* < f_\mu(u) < u$ und damit die Lösung für $u_0 \in (u_*, \frac{1}{2}]$ monoton fallend (gegen u_*). Das gleiche gilt für $u_0 \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{\mu})$, da für diese Werte $u_1 = f_\mu(u_0) \in (u_*, \frac{1}{2})$ ist und die Lösung also weiter fällt. Falls jedoch $u_0 \in (\frac{1}{\mu}, 1)$ ist, so wird $u_1 < u_*$ sein und die Lösung nach dem anfänglichen Fall auf u_1 monoton gegen u_* wachsen. In den Grenzfällen $u_0 = \frac{1}{\mu}$ bzw. $u_0 = 1$ ist $u_1 = u_*$ bzw. $u_1 = 0$ und die Lösungen ändern sich dann selbstverständlich nicht mehr.

Im Fall $\mu \in (2, 3)$ ergibt sich ein anderes Bild. Dann ist nämlich $u_* > \frac{1}{2}$ und $f'_\mu(u_*) < 0$.

Kapitel 3

Existenztheorie für Differenzialdifferenzengleichungen I

3.1 Diskrete Verzögerung und schrittweise Integration

Wir beginnen mit expliziten skalaren Gleichungen, die eine einzelne diskrete Verzögerung $\tau > 0$ enthalten:

$$\dot{u}(t) = F(t, u(t), u(t - \tau)) \quad (3.1.1)$$

für $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. An die Funktion F stellen wir folgende ständige Anforderung.

Bedingung 3.1. $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und bezüglich seines zweiten Arguments stetig differenzierbar.

Nun suchen wir zu gegebenen Anfangsbedingungen $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung u von (3.1.1), die

$$u(s) = \phi(s) \quad \text{für } s \in [-\tau, 0] \quad (3.1.2)$$

erfüllt. Unter einer solchen Lösung verstehen wir eine Funktion $u : [-\tau, T) \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $[0, T)$ stetig, auf $(0, T)$ stetig differenzierbar und in $t = 0$ rechtsseitig differenzierbar ist, für alle $t \in [0, T)$ die Gleichung (3.1.1) (in $t = 0$ im Sinne der rechtsseitigen Ableitung) und ferner (3.1.2) erfüllt.

Da wir nun schon (3.1.2) fordern, können wir für $t \in [0, \tau]$ die Gleichung (3.1.1) als gewöhnliche Differenzialgleichung lesen, indem wir feststellen, dass dann $t - \tau \in [-\tau, 0]$ liegt und daher die Lösung auf diesem Intervall das Anfangswertproblem

$$\dot{v}_0(t) = F(t, v_0(t), \phi(t - \tau)) =: f_0(t, v_0(t)), \quad v_0(0) = \phi(0) \quad (3.1.3)$$

erfüllt. Dabei ist f_0 gemäß Bedingung 3.1 zusammen mit seiner Ableitung nach dem zweiten Argument stetig, falls ϕ stetig ist. Damit f_0 ist insbesondere LIPSCHITZ-stetig bezüglich des zweiten Arguments und der Satz von PICARD und LINDELÖF garantiert uns eine lokale Lösung $v_0 : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ für hinreichend kleines $\delta > 0$. Falls $\delta = \tau$ gilt (größer kann es nicht sein, da f_0 für größere Zeiten nicht definiert ist), so erhalten wir eine (stetige, auf $(0, \tau]$ stetig differenzierbare) Lösung des Anfangswertproblems (3.1.3) und damit eine Lösung von (3.1.1), (3.1.2) auf $[-\tau, \tau]$.

In diesem Fall wird (3.1.1), (3.1.2) auf $[\tau, 2\tau]$ zum Anfangswertproblem

$$\dot{v}_1(t) = F(t, v_1(t), v_0(t - \tau)) =: f_1(t, v_1(t)), \quad v_1(\tau) = v_0(\tau) \quad (3.1.4)$$

für welches (mit der Stetigkeit von v_0) die obige Argumentation wieder geführt werden kann. Falls sich die Existenz wieder für das gesamte Intervall $[\tau, 2\tau]$ ergibt, kann die gesamte Prozedur für das Intervall $[2\tau, 3\tau]$ wiederholt werden und so fort.

Diese Iteration liefert durch Zusammensetzen der Lösungen der Anfangswertprobleme eine Lösung des Problems (3.1.1), (3.1.2) auf einem maximalen Intervall $[-\tau, T_{max})$, wobei $T_{max} = \infty$ ist, falls alle der Anfangswertprobleme auf dem gesamten Intervall $[n\tau, (n+1)\tau]$ lösbar sind. Falls jedoch für ein $n_0 \geq 0$ die Lösung maximal für $[n_0\tau, n_0\tau + \delta)$ mit $\delta \leq \tau$ existiert, so ist $T_{max} = n_0\tau + \delta$. Wir erhalten also folgenden Satz, der stark an den analogen Satz für Anfangswertprobleme von gewöhnlichen Differenzialgleichungen erinnert, und wie wir gesehen haben auch mit exakt den gleichen Methoden bewiesen werden kann.

Satz 3.2. Zu $\tau > 0$ sei $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und F erfülle Bedingung 3.1. Dann existiert $T_{max} > 0$ (evtl. $T_{max} = \infty$) derart, dass (3.1.1), (3.1.2) für jedes $T \in (0, T_{max})$ eine eindeutige Lösung $u : [-\tau, T) \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, jedoch keine Lösung auf $[-\tau, T]$ für $T \geq T_{max}$.

Bemerkung 3.3. (i) Von Bedingung (3.1) benutzen wir nur, dass F stetig und im zweiten Eintrag LIPSCHITZ-stetig ist.

(ii) Allgemeiner erhält man eine Lösung $[t_0 - \tau, t_0 + T]$ für $T < T_{max}$, wenn man $\phi : [t_0 - \tau, t_0]$ als Anfangswerte vorgibt. Bei gegebenem F wird sich dabei im allgemeinen ein anderes T_{max} ergeben.

(iii) Dass es ein maximales T_{max} gibt, ergibt sich auch analog zum entsprechenden Beweis für gewöhnliche Differenzialgleichungen. Sind nämlich $u_i : [-\tau, T_i] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) Lösungen, so stimmen sie auf $[-\tau, \min\{T_1, T_2\})$ überein, und wir nennen u_2 eine Fortsetzung von u_1 , falls $T_2 \geq T_1$. Das liefert eine Halbordnung auf der Menge aller Lösungen von (3.1.1), (3.1.2) (auf abgeschlossenen oder halboffenen Intervallen) vermöge

$$(u_1 : [-\tau, T_1] \rightarrow \mathbb{R}) \preceq (u_2 : [-\tau, T_2] \rightarrow \mathbb{R}) \quad : \iff \quad T_1 \leq T_2.$$

Nach dem ZORNschen Lemma hat diese Menge der Lösungen also ein maximales Element $u_{max} : [-\tau, T_{max}] \rightarrow \mathbb{R}$, und dieses ist eine auf einem rechtsseitig offenen Intervall definierte Lösung, da andernfalls der Satz von PICARD und LINDELÖF eine weitere Fortsetzung garantierte.

Analog zur Folgerung 1.3 erhalten wir auch für Differenzialdifferenzgleichungen folgende Aussage über nicht globale Lösungen.

Satz 3.4. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2 sei $u_{max} : [-\tau, T_{max}] \rightarrow \mathbb{R}$ die maximale Lösung von (3.1.1), (3.1.2). Dann gilt $T_{max} = \infty$ oder

$$\lim_{t \nearrow T_{max}} |u(t)| = \infty.$$

Beweis. Angenommen, $T_{max} < \infty$. Dann ist $n\tau < T_{max} \leq (n+1)\tau$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $u|_{[n\tau, T_{max}]}$ ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{v}(t) = F(t, v(t), u(t - \tau)) =: f_n(t, v(t)), \quad v(n\tau) = u(n\tau)$$

auf $[n\tau, T_{max})$. Da nach Bedingung 3.1 das Gebiet $G = \mathbb{R}^1$ im Sinne von 1.3 die gesamte reelle Achse ist, liefert diese Folgerung sofort die Behauptung. \square

Wie auch für gewöhnliche Differenzialgleichungen stören kleine Änderungen der Daten die Lösung nur leicht.

Satz 3.5. Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^p \ni (t, x, y, \lambda) \mapsto F(t, x, y, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$$

sei stetig differenzierbar. Dann existieren zu gegebenem $\lambda_* \in \mathbb{R}^p$ und stetigem $\phi_* : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$ von λ_* sowie $\delta > 0$ derart, dass für alle $\lambda_0 \in \Lambda$ und stetige $\phi_0 : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\max_{-\tau \leq s \leq 0} |\phi_0(s) - \phi_*(s)| < \delta$$

die maximalen Lösungen $u_* : [-\tau, T_*] \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$\dot{u}_*(t) = F(t, u_*(t), u_*(t - \tau), \lambda_*), \quad u_*|_{[-\tau, 0]} = \phi_*$$

und $u_0 : [-\tau, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$\dot{u}_0(t) = F(t, u_0(t), u_0(t - \tau), \lambda_0), \quad u_0|_{[-\tau, 0]} = \phi_0$$

folgendes erfüllen.

(i) $T_* = T_0 = \infty$ oder $T_* = \infty, T_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ oder $T_* - T_0 < \varepsilon$

(ii) Es existiert ein $T \leq \min\{T_*, T_0\}$ derart, dass gilt

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u_*(t) - u_0(t)| < \varepsilon.$$

Beweis. (Idee – ein Beweis für einen analogen Satz für allgemeinere Gleichungen folgt später)

Bei der schrittweisen Integration über die Intervalle $[n\tau, (n+1)\tau)$ folgt die differenzierbare Abhängigkeit der Lösung von der gewöhnlichen Differenzialgleichungen von den Parametern aus Satz 1.5. Dabei liefert dieser Satz sofort Eigenschaft (i) für die maximale Existenzzeit.

Wegen der Differenzierbarkeit der Lösung bezüglich der Daten ist für kompakte Teilintervalle von $[-\tau, \min\{T_*, T_0\})$ die Abschätzung (ii) für hinreichend kleine δ auch leicht zu erhalten. \square

Bemerkung 3.6. (i) Fordert man im soeben bewiesenen Satz zusätzlich, dass die Ableitung von F bezüglich x global durch eine (von λ in einer Umgebung von λ_* unabhängige) Konstante beschränkt ist, so gilt statt Behauptung (i) sogar $T_0 - T_* = \infty$. Unter den Bedingungen des Satzes kann die Existenzzeit bei leichter Variation der Parameter durchaus von endlich nach unendlich wechseln oder umgekehrt.

Beispiele gibt es schon im Rahmen gewöhnlicher Differenzialgleichungen. So ist etwa für

$$\dot{u} = u + \lambda^2 u^2, \quad u(0) = 1$$

globale Existenz der Lösung im Fall $\lambda_* = 0$ gesichert, für beliebige $\lambda_0 \neq 0$ hingegen nicht. Allerdings geht die von λ_0 abhängige Existenzzeit für $\lambda_0 \rightarrow 0$ gegen unendlich. Dies entspricht dem zweiten Fall in Behauptung (i) des Satzes.

Umgekehrt existiert die Lösung von

$$\dot{u} = u^2 - \lambda^2 u^3, \quad u(0) = 1$$

für $\lambda_* = 0$ nur für $t < 1$ während sie für beliebige $\lambda \neq 0$ global existiert. Das ist ein Beispiel für den dritten Fall (hier: $T_* - T_0 = -\infty < \varepsilon$).

(ii) Wie für gewöhnliche Differenzialgleichungen können die obigen Sätze ohne weiteres auf n -dimensionale Systeme (mit $F : \mathbb{R}^{1+2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$) ausgeweitet werden, ohne wesentlich neue Methoden einzuführen. Die Beweise für diesen Fall nachzuvollziehen ist eine gute Übung.

(iii) Analog kann man die Aussagen auf Systeme mit mehreren diskreten Verzögerungen

$$\dot{u}(t) = F(t, u(t), u(t - \tau_1), u(t - \tau_2), \dots, u(t - \tau_k))$$

mit $F : \mathbb{R}^{1+(k+1)n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ erweitern. Da hier die Anfangsbedingungen auf $[-\max\{\tau_1, \dots, \tau_k\}, 0]$ vorgegeben sein müssen, ändert sich an den Beweisen nahezu nichts.

3.2 Positivität von Lösungen und Vergleichsprinzipien

In Abschnitt 1.3 hatten wir bereits für ein sehr einfaches Beispiel negative Lösungen bei nicht negativen Anfangsbedingungen beobachtet. Das würde bei der Anwendung in Populationsmodellen, Epidemiologie oder Biochemie natürlich zu absurden Ergebnissen führen. Daher ist unser nächstes Ziel, Bedingungen zu finden, die für nicht negative Anfangsbedingungen auch die Nichtnegativität der Lösungen garantieren.

Notation. Für $x \in \mathbb{R}^n$ schreibe $x \geq 0$ (bzw. $x \leq 0$), falls $x^i \geq 0$ (bzw. $x^i \leq 0$) für alle $i = 1, \dots, n$ gilt. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ schreibe $x \leq y$, falls $y - x \geq 0$ gilt.

Wir erinnern uns, dass

$$\dot{u}(t) = \gamma u(t) \quad \text{auf } [0, \infty), \quad u(0) = u_0 \quad (3.2.1)$$

positive Lösungen hat, falls $u_0 > 0$ ist, während die Lösung

$$u(t) = c + \gamma ct = (1 + \gamma t)c$$

von

$$\dot{u}(t) = \gamma u(t - \tau) \quad \text{auf } [0, \tau), \quad u(s) = c \text{ auf } [-\tau, 0] \quad (3.2.2)$$

auf $[0, \tau)$ trotz $c > 0$ negativ wird, falls $\gamma < 0$ und $|\gamma\tau| > 1$ ist.

Ein weiteres Beispiel liefert folgende

Übungsaufgabe. Man löse die Anfangswertprobleme

$$\dot{u}(t) = v(t) - u(t - \tau), \quad \dot{v}(t) = v(t) \quad \text{für } t \geq 0 \quad (3.2.3a)$$

$$v(0) = v_0 \geq 0, \quad u(s) = \phi(s) \quad \text{für } s \in [-\tau, 0] \quad (3.2.3b)$$

einerseits für $\tau = 0$ (als Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen; Hinweis: Variation der Konstanten für die erste Gleichung) mit beliebigem Anfangswert $u(0) = \phi(0) \geq 0$ und andererseits für $\tau > 0$ mit $v_0 = 0$ und

$$\phi(s) = -\frac{s}{\tau}!$$

Was ist über das Vorzeichen der Lösungen zu sagen?

Glücklicherweise gibt es durchaus einfach zu überprüfende Bedingungen für die Positivität von Lösungen zu positiven Anfangswerten. Diese liefert der folgende Satz.

Satz 3.7. Die Funktion $F : \mathbb{R}^{1+2n} \ni (t, x, y) \mapsto F(t, x, y) \in \mathbb{R}^n$ erfülle die zu 3.1 analoge

Bedingung 3.8. $F : \mathbb{R}^{1+2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig und stetig differenzierbar bezüglich x , d.h.,

$$\frac{\partial F(t, x, y)}{\partial x^i}$$

ist stetig auf \mathbb{R}^{1+2n} für jedes $i = 1, \dots, n$

sowie

$$\text{Für alle } i = 1, \dots, n, t \in \mathbb{R}, x, y \in [0, \infty)^n \text{ gilt } F^i(t, x, y) \geq 0 \text{ falls } x^i = 0. \quad (3.2.4)$$

Dann ist zu stetigen Anfangswerten $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow [0, \infty)^n$ die Lösung von (3.1.1), (3.1.2) nicht negativ auf $[-\tau, T_{max}]$.

Bemerkung 3.9. (i) Unter den übrigen Bedingungen des Satzes (inklusive Positivität der Anfangswerte) genügt es, wenn F lediglich auf $[0, \infty) \times [0, \infty)^{2n}$ definiert ist.

(ii) Man vergleiche Bedingung (3.2.4) mit der Bedingung dafür, dass der positive Sektor ein invariantes Gebiet für das dynamische System $\dot{u} = f(t, u)$ ist. Entsprechend dieser Analogie ist auch der Beweis praktisch wörtlich zu übernehmen.

Beweis. (von Satz 3.7)

Die Lösung u erfüllt auf $[0, \min\{\tau, T_{max}\})$ die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$\dot{v} = F(t, v_0(t), \phi(t - \tau)) =: f_0(t, v_0) \quad \text{mit nicht negativen Anfangsbedingungen } v_0(0) = \phi(0).$$

Wie in der Bemerkung bereits angedeutet, ist nun $[0, \infty)^n$ ein invariantes Gebiet für dieses System, da alle äußeren Normalenvektoren in $x_0 \in \partial G$ aus $\text{lin}\{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$ mit nicht positiven Koeffizienten sind, falls $x_0^{j_1} = \dots = x_0^{j_k} = 0$ und $x_0^i > 0$ für die übrigen i ist. Nun ist in diesem Fall mit der als

$$\mathbf{n}^T = \sum_{l=1}^k \alpha_{j_l} e_{j_l}^T \quad (\alpha_{j_l} \leq 0)$$

bezeichneten Normalen

$$\mathbf{n}^T f_0(t, x_0) = \sum_{l=1}^k \alpha_{j_l} f_0^{j_l}(t, x_0) = \sum_{l=1}^k \underbrace{\alpha_{j_l}}_{\leq 0} \underbrace{F^{j_l}(t, x_0, \phi(t - \tau))}_{\geq 0 \text{ n.V.}} \leq 0. \quad (3.2.5)$$

Damit bleibt die Lösung dieses Anfangswertproblems nicht negativ.

Wie bereits bei der Diskussion der Existenz von Lösungen funktioniert dieser Beweis iterativ für $[n\tau, \min\{(n+1)\tau, T_{max}\})$, da die neuen Anfangsbedingungen

$$u|_{[(n-1)\tau, n\tau]}$$

wieder nicht negativ sind. □

Bemerkung 3.10. Analog zu gewöhnlichen Differenzialgleichungen ist die Bedingung (3.2.4) auch notwendig für die Invarianz des Gebiets $[0, \infty)^d$. Angenommen, $F^i(t_0, x_0, y_0) < 0$ für gewisse t_0, x_0, y_0 mit $x_0^i = 0$ für ein i . Mit den glatten, nicht negativen Anfangswerten

$$\phi(s) = \left(1 - \frac{t_0 - s}{\tau}\right) x_0 + \frac{t_0 - s}{\tau} y_0 \quad \text{auf } [t_0 - \tau, t_0]$$

ergibt sich $u(t_0) = x_0$, insbesondere $u^i(t_0) = 0$, aber

$$\dot{u}^i(t_0) = f^i(t_0, u(t_0), 0 \cdot x_0 + y_0) < 0,$$

also $u^i(t) < 0$ für $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$ für kleine ε .

Wie bereits für gewöhnliche Differenzialgleichungen erhalten wir auch für Differenzialdifferenzialgleichungen recht schnell ein Vergleichsprinzip, das wir zwecks Sparsamkeit der Notation nur für skalare Probleme formulieren.

Satz 3.11. Die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle Bedingung 3.1 und sei bezüglich des dritten Arguments monoton wachsend [fallend]. Dann gilt für die auf $[-\tau, T]$ definierte Lösung u von (3.1.1), (3.1.2) und jede stetige, auf $[0, T]$ differenzierbare Funktion $\tilde{u} : [-\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\dot{\tilde{u}}(t) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} F(t, \tilde{u}(t), \tilde{u}(t - \tau)) \quad \text{auf } [0, T] \quad (3.2.6a)$$

$$\tilde{u}(t) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \phi(t) \quad \text{auf } [-\tau, 0] \quad (3.2.6b)$$

stets

$$\tilde{u}(t) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} u(t) \quad \text{auf } [0, T]. \quad (3.2.7)$$

Falls die Ungleichungen in (3.2.6) strikt sind, so gilt dies auch für die Behauptung.

Beweis. (I) Angenommen, es existiere $t_0 \in (0, T]$ mit $u(t) < \tilde{u}(t)$ für $0 \leq t < t_0$ und $u(t_0) = \tilde{u}(t_0)$. Wegen der Differenzierbarkeit von u und \tilde{u} in t_0 gilt dann $\dot{u}(t_0) \geq \dot{\tilde{u}}(t_0)$ (zunächst für die linksseitige Ableitung, und wegen der Differenzierbarkeit auch für die Ableitung selbst). Falls nun (3.2.6) strikt gilt, so ist

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_0) = F(t_0, u(t_0), \underbrace{u(t_0 - \tau)}_{< \tilde{u}(t_0 - \tau)}) &\stackrel{(\text{Monotonie})}{\leq} F(t_0, \underbrace{u(t_0)}_{= \tilde{u}(t_0)}, \tilde{u}(t_0 - \tau)) < \dot{\tilde{u}}(t_0) \end{aligned}$$

im Widerspruch zum eben diskutierten.

Also folgt aus der strikten Ungleichung in (3.2.6) auch die strikte Ungleichung in der Behauptung

(II) Um die Aussage im nicht strikten Fall zu zeigen, wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und definieren u_ε als Lösung von

$$\dot{u}_\varepsilon(t) = F(t, u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t - \tau)) - \varepsilon =: F_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t - \tau)), \quad u_\varepsilon(s) = \phi(s) - \varepsilon \text{ auf } [-\tau, 0].$$

Dann ist (wegen $F_\varepsilon < F$) nach Schritt (I) $u_\varepsilon(t) < \tilde{u}(t)$ für alle $t \in [0, T]$, für welche u_ε existiert.

(III) Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ existiert u_ε auf ganz $[0, T]$ (mit gegebenem, festen $T < T_{max}$, d.h. $T_{max} \geq T + \delta$; $T = T_{max}$ ist nicht möglich, da das maximale Existenzintervall offen ist). Das folgt aus der stetigen Abhängigkeit des maximalen Existenzintervalls von den Daten, d.h., u_ε existiert für hinreichend kleine ε mindestens auf $[-\tau, T + \frac{\delta}{2}]$.

Da auch die Lösung stetig von Parametern abhängt, konvergiert u_ε auf $[0, T]$ für $\varepsilon \searrow 0$ gleichmäßig gegen u , und die für u_ε strikte Ungleichung bleibt im Grenzübergang (im allgemeinen nicht strikt) für u erhalten. \square

3.3 Stationäre Lösungen für lineare Gleichungen und Stabilität

Wir haben schon im einführenden Beispiel gesehen, dass die Lösung einer DDE

$$\dot{u}(t) = F(t, u(t), u(t - \tau)) \quad (3.3.1)$$

durchaus einen Punkt $u = u^*$ durchlaufen kann, für den $F(t, u^*, u^*) = 0$ für alle t gilt. Es genügt zur Charakterisierung einer stationären Lösung u^* also nicht, lediglich Nullstellen der rechten Seite anzugeben. Vielmehr ist es für die Stationarität nötig, dass die Lösung einen solchen Wert u^* mindestens auf einem Intervall der Länge τ annimmt.

Wegen der zu fordernden Stetigkeit der Lösung ist auch Funktionen, die stückweise verschiedene solche Werte annehmen, die Bezeichnung als stationäre Lösung zu verweigern. Wir einigen uns daher auf folgende Begrifflichkeiten, die wir später noch verfeinern werden.

Definition. Ein Gleichgewichtspunkt für (3.1.1) ist ein Punkt u^* , für den $F(t, u^*, u^*) = 0$ für alle t gilt. Eine Gleichgewichtslösung ist eine Funktion $u : [-\tau, \infty)$, die für alle $t \geq 0$ $F(t, u(t), u(t - \tau)) = 0$ erfüllt.

Wir bemerken natürlich sofort, dass eine solche Gleichgewichtslösung sehr wohl konstant sein und einen Gleichgewichtspunkt als Wert annehmen muss. Der wesentliche Unterschied zu Differenzialgleichungen liegt darin, dass ein Anfangswertproblem für eine Differenzialdifferenzengleichung im allgemeinen nur dann durch eine Gleichgewichtslösung $u \equiv u^*$ gelöst wird, wenn die Anfangsbedingungen $\phi(s) = u^*$ für alle $s \in [-\tau, 0]$ lauten.

Wir erinnern uns daran, dass wir zur Charakterisierung der Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Fall von Differenzialgleichungen oder Differenzengleichungen gefragt haben, wie sich die Lösungen für in der Nähe des Gleichgewichtspunkts liegende Anfangswerte verhalten. Die relevanten Verhalten waren die Konvergenz zum Gleichgewichtspunkt für große Zeiten (Stabilität) sowie das Verbleiben in dessen Nähe (LYAPUNOV-Stabilität).

Nun stellt sich die Frage, was wir mit *in der Nähe* des Gleichgewichtspunkts meinen, wenn wir als Anfangsdaten eine Funktion $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben haben. Bedeutet ein Abstand der Anfangswerte ϕ zu u^* von weniger als ε , dass $|\phi(s) - u^*| < \varepsilon$ für alle $s \in [-\tau, 0]$? Das entspräche dem Abstand im Raum $C^0([-\tau, 0])$ unter der Supremumnorm. Oder dürfen die Anfangswerte vielleicht auch kurzzeitig stärker von u^* abweichen, wenn nur ein geeignetes Produkt von Dauer und Stärke der Abweichung hinreichend klein bleibt? Dann würden wir uns in einem Raum mit einer Integralnorm bewegen, etwa in $L_1([-\tau, 0])$ (genauer, im aus Funktionen mit stetigem Repräsentanten bestehenden Teilraum von L_1).

Um das zu klären, führen wir im folgenden Kapitel einen allgemeineren Lösungsbegriff ein. Dessen Definition liefert dann schon die Antwort auf die hier gestellten Fragen.

3.3.1 Lösung linearer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Zuvor wollen wir uns aber einen ersten Eindruck verschaffen, indem wir lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten untersuchen. Um die Analogie zu Systemen von Differenzialgleichungen besser herausstellen zu können, betrachten wir dazu Systeme der Form

$$\dot{u}(t) = Au(t) + Bu(t - \tau) + a(t), \quad (3.3.2)$$

für $u : [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, konstanten $n \times n$ -Matrizen A und B sowie einem eventuell vorhandenen, stückweise stetigen Antrieb $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Für $B = \mathbf{0}_{n \times n}$ ergibt sich die lineare Differenzialgleichung

$$\dot{u}(t) = Au(t) + a(t), \quad (3.3.3)$$

die zu gegebenem Anfangswert $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Lösung

$$u(t) = \exp[At]u_0 + \int_0^t \exp[A(t-s)]a(s) \, ds \quad (3.3.4)$$

besitzt.

Von dieser Lösung wissen wir, dass sich ihr Langzeitverhalten im Fall $a \equiv 0$ aus den Eigenwerten von A ablesen lässt. Falls nämlich alle diese als Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(\lambda \mathbb{I} - A) = 0 \quad (3.3.5)$$

gegebenen Eigenwerte negativen Realteil haben, wird die Lösung gegen den (einzigen) Gleichgewichtspunkt $u^* = 0$ streben, falls jedoch nur ein einziger dieser Eigenwerte positiven Realteil hat, wird die Lösung für generische Anfangsbedingungen ins Unendliche wachsen.

Die Existenz einer eindeutigen Lösung zum Anfangswertproblem (3.3.2) mit stetigen Anfangsbedingungen

$$u(s) = \phi(s) \quad \text{für } s \in [-\tau, 0]; \quad \phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.3.6)$$

erhalten wir aus Satz 3.2 zusammen mit der Bemerkung über die Verallgemeinerung auf Systeme oder durch direkte schrittweise Integration. Hier können wir aber noch einiges über die Regularität der Lösung aussagen.

Satz 3.12. Für stetiges $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ und stetige Anfangswerte $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3.3.2), (3.3.6) stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$ und hat genau dann eine stetige erste Ableitung in $t = 0$, wenn ϕ eine (linksseitige) Ableitung $\dot{\phi}(0)$ in $s = 0$ besitzt, die

$$\dot{\phi}(0) = A\phi(0) + B\phi(-\tau) + a(0) \quad (3.3.7)$$

erfüllt. Falls a beliebig oft differenzierbar ist, wird die Lösung mit zunehmender Zeit glatter.

Beweis. Die stetige Differenzierbarkeit auf $(0, \infty)$ sowie die zunehmende Glättung ergibt sich wie für Differenzialgleichungen sofort daraus, dass die Ableitung laut (3.3.2) für $t \in [0, \tau]$ eine stetige, für $t \in [\tau, 2\tau]$ eine stetig differenzierbare und für $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$ eine n -mal stetig differenzierbare Funktion ist. Die Notwendigkeit der Bedingung (3.3.7) für die stetige Differenzierbarkeit in der Null ergibt sich durch simples Nachrechnen, indem man bedenkt, dass wir die rechtsseitige Ableitung der Lösung u in der Null auch aus (3.3.2) ablesen können. Dass u dann tatsächlich stetig differenzierbar in der Null ist, rechnet man auch leicht nach. \square

Eine weitere Eigenschaft, die wir noch nicht untersucht haben, aber in diesem Fall schnell überprüfen können, ist die rückwärtige Lösbarkeit. Da die Lösung mit zunehmender Zeit glatter wird, mag es nicht überraschen, dass wir im allgemeinen keine Lösung für Zeiten $t < \tau$ erwarten dürfen.

Satz 3.13. Falls B regulär ist, existiert genau dann eine stetige Lösung $u : [-\tau - \varepsilon, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (3.3.2), (3.3.6) für $\varepsilon \in (0, \tau)$ (mit stetigem $a : [-\varepsilon, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$), wenn ϕ auf $[-\varepsilon, 0]$ stetig differenzierbar ist und (3.3.7) erfüllt.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen an ϕ ergibt sich wieder direkt aus der Gleichung (3.3.2).

Nehmen wir also an, die auf $[-\varepsilon, 0]$ stetig differenzierbare Funktion ϕ erfülle die angegebene Bedingung (3.3.7) und schreiben (3.3.2) zu

$$u(t - \tau) = B^{-1}(\dot{u}(t) - Au(t) - a(t))$$

um. Für $t \in [-\varepsilon, 0)$ können wir nun für u die Anfangswerte ϕ einsetzen, von denen wir stetige Differenzierbarkeit gefordert haben, was uns auf der rechten Seite tatsächlich etwas stetiges liefert. Unter der Bedingung (3.3.7) ist die so berechnete Lösung u dann auch an der Stelle $-\tau$ stetig. \square

Bemerkung 3.14. Um die Lösung über -2τ hinaus in die Vergangenheit fortsetzen zu können, muss man höhere Differenzierbarkeit von ϕ und a sowie zusätzliche Kompatibilitätsbedingungen vom Typ (3.3.7) in $t = 0$ fordern. Die Glättungseigenschaft vorwärts in der Zeit wird also durch eine schwächere Regularität für die Lösungen rückwärts in der Zeit erkauft.

Übungsaufgabe: Man formuliere notwendige und hinreichende Bedingungen für die stetige Fortsetzbarkeit der Lösung auf $[-3\tau, \infty)$!

Lsg.: Neben der stetigen Differenzierbarkeit von a auf $[-\tau, \infty)$ und der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit von ϕ auf $[-\tau, 0]$ handelt es sich neben der bereits angegebenen Bedingung um die weitere Kompatibilitätsbedingung

$$\ddot{\phi}(0) \stackrel{!}{=} A\dot{\phi}(0) + B\dot{\phi}(-\tau) + \dot{a}(0) = A^2\phi(0) + AB\phi(-\tau) + Aa(0) + B\dot{\phi}(-\tau) + \dot{a}(0).$$

Für die Lösungen des Anfangswertproblems können wir nun auch noch speziellere Abschätzungen als in Satz 3.11 angeben.

Satz 3.15. Für die Lösung u des Anfangswertproblems (3.3.2), (3.3.6) mit stetigen a und ϕ gilt für alle $t \geq 0$

$$|u(t)| \leq \alpha e^{\beta t} \left(\sigma + \int_0^t |a(s)| \, ds \right), \tag{3.3.8}$$

wobei $\sigma = \max_{-\tau \leq s \leq 0} |\phi(s)|$, $\alpha = 1 + \|B\|\tau$, $\beta = \|A\| + \|B\|$ sind.

N.B. Die Norm einer $n \times n$ -Matrix A ist dabei bezüglich des EUKLIDISCHEN Betrags zu verstehen:

$$\|A\| = \sup \{ |Ax| \mid x \in S^{n-1} \} = \max \{ |\lambda| \mid \lambda \text{ ein Eigenwert von } A \}.$$

Beweis. Aufintegrieren der Gleichung (3.3.2) ergibt mit $u(0) = \phi(0)$

$$u(t) = \phi(0) + \int_0^t Au(s) + Bu(s - \tau) + a(s) \, ds, \tag{3.3.9}$$

also

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |\phi(0)| + \int_0^t |Au(s)| \, ds + \int_{-\tau}^t |Bu(s)| \, ds + \int_0^t |a(s)| \, ds \\ &\leq \sigma + \int_{-\tau}^0 \|B\| |\phi(s)| \, ds + \int_0^t \|A\| |u(s)| \, ds + \int_0^t \|B\| |u(s)| \, ds + \int_0^t |a(s)| \, ds \\ &\leq (1 + \|B\|\tau)\sigma + \int_0^t |a(s)| \, ds + \int_0^t (\|A\| + \|B\|) |u(s)| \, ds. \end{aligned}$$

Nun wenden wir Lemma 1.6 mit der nicht negativen, monoton wachsenden und für $t > 0$ differenzierbaren Funktion

$$g(t) = \alpha\sigma + \int_0^t |a(s)| \, ds = (1 + \|B\|\tau)\sigma + \int_0^t |a(s)| \, ds$$

sowie

$$\psi(s) \equiv \beta = \|A\| + \|B\|$$

und

$$\varphi(s) = |u(s)|$$

an und erhalten die Behauptung

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq g(t) \exp\left(\int_0^t \beta s \, ds\right) \\ &= \left(\alpha\sigma + \int_0^t |a(s)| \, ds\right) \exp(\beta t) \\ &\stackrel{\alpha \geq 1}{\leq} \alpha \exp(\beta t) \left(\sigma + \int_0^t |a(s)| \, ds\right). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.16. (i) Die Beweise des Existenzsatzes sowie der Abschätzung funktionieren ganz ähnlich, falls a nicht stetig sondern nur lokal integrierbar ist. Dann wird die Lösung selbstverständlich nicht mehr differenzierbar, sondern nur absolut stetig sein, jedoch immer noch die angegebene Abschätzung erfüllen. An eine stetige Fortsetzung der Lösung auf Zeiten $t < -\tau$ ist dann aber im allgemeinen nicht mehr zu denken.

(ii) Die Umformung der Gleichung (3.3.2) zu (3.3.9) liefert für $a \equiv 0$ eine offensichtlich lineare Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten. Falls nämlich u die Lösung zu Anfangswerten ϕ und v diejenige zu Anfangswerten ψ , so lesen wir für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ab

$$\begin{aligned} \alpha u(t) + \beta v(t) &= \alpha\phi(0) + \alpha \int_0^t Au(s) + Bu(s - \tau) \, ds + \beta\psi(0) + \beta \int_0^t Av(s) + Bv(s - \tau) \, ds \\ &= \alpha\phi(0) + \beta\psi(0) + \int_0^t A(\alpha u(s) + \beta v(s)) + B(\alpha u(s - \tau) + \beta v(s - \tau)) \, ds, \end{aligned}$$

das heißt, die Lösung zu den Anfangswerten $\alpha\phi + \beta\psi$ ist $\alpha u + \beta v$. Darin erkennen wir (für die homogene Gleichung) das von linearen Differenzialgleichungen bekannte Superpositionsprinzip wieder.

Die Abschätzung nach Satz 3.15 ist nun in vielen Fällen sehr pessimistisch. Vielmehr erwarten wir unter bestimmten Bedingungen (insbesondere $a \equiv 0$) sogar ein Schrumpfen der Lösungen gegen 0 und nicht etwa ein Anwachsen. Dass diese Erwartung durchaus gerechtfertigt ist, sehen wir im folgenden.

3.3.2 Charakteristische Gleichung, Fundamentallösung und Wachstumsverhalten der Lösungen

Dazu erinnern wir uns daran, dass wir zur Herleitung der charakteristischen Gleichung einer linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten eine Lösung der Form $\exp(\lambda t)\eta$ angesetzt hatten, wobei $\eta \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter, von Null verschiedener Vektor und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine konstante Wachstumsrate sein sollte. Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung lieferte dann nach Multiplikation mit $\exp(-\lambda t)$ die gesuchte charakteristische Gleichung. Das gleiche versuchen wir nun auch für unsere Differenzialdifferenzialgleichung und setzen ein:

$$\lambda \exp(\lambda t)\eta = \dot{u}(t) \stackrel{!}{=} Au(t) + Bu(t - \tau) = \exp(\lambda t)A\eta + \exp(\lambda(t - \tau))B\eta. \quad (3.3.10)$$

Erneut dividieren wir durch $\exp(\lambda t)$ und finden genau dann eine nicht triviale Lösung η , wenn die verbleibende Matrix

$$C(\lambda) = \lambda\mathbb{I} - A - \exp(-\lambda\tau)B$$

singulär ist, also λ die charakteristische Gleichung

$$\zeta(\lambda) := \det(\lambda\mathbb{I} - A - \exp(-\lambda\tau)B) = 0 \quad (3.3.11)$$

erfüllt. Hier erkennen wir nun den grundlegenden Unterschied zwischen Differenzial- und Differenzialdifferenzialgleichungen, der darin besteht, dass die charakteristische Gleichung nicht etwa ein Polynom, sondern wegen des Faktors $e^{-\lambda\tau}$ bereits im skalaren Fall transzendent ist. Insbesondere ist die Anzahl von Lösungen üblicherweise unendlich.

Beispiel 3.17. Für unser einführendes Beispiel war $n = 1, A = 0$. Die charakteristische Gleichung lautet also

$$\lambda = e^{-\lambda\tau}B.$$

Deren Lösungen hängen selbstverständlich von den Parametern τ und B ab. Es gilt

- Falls $B > 0$ ist, so hat die charakteristische Gleichung genau eine reelle Lösung und diese ist positiv.
- Falls $0 > \tau B > -\frac{\pi}{2}$ ist, so haben alle Lösungen negativen Realteil.
- Falls $\tau B = -\frac{\pi}{2}$ ist, so sind $\pm i\frac{\pi}{2\tau}$ Lösungen der charakteristischen Gleichung.
- Falls $\tau B < -\frac{\pi}{2}$ ist, so existieren Lösungen $\lambda = \xi \pm i\eta$ mit $\xi > 0$ und $\frac{\pi}{2\tau} < \eta < \pi$.

Übungsaufgabe. Man weise diese Eigenschaften der Lösungen durch Nachrechnen nach.

Wie sich diese verschiedenen Lösungen der charakteristischen Gleichung auf die Stabilität der Lösung $u \equiv 0$ auswirken, ahnen wir natürlich schon, werden es aber erst später nachweisen. Überraschend mag aber hier schon sein, dass die Lösungen bei gegebenem τ für kleine negative B negativen Realteil haben, während für größere B Lösungen mit positivem Realteil hinzukommen.

Uns interessieren besonders die Realteile der Lösungen, da diese ja das Langzeitverhalten der speziellen Lösungen $u(t) = e^{\lambda t}$ bestimmen. Dies untersuchen wir nun für den skalaren Fall, d.h. $A, B \in \mathbb{R}$.

Lemma 3.18. Zu gegebenen $A, B \in \mathbb{R}$ und $\tau > 0$ existiert ein $c \in \mathbb{R}$ derart, dass alle Lösungen λ der Gleichung

$$\lambda - A - Be^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.3.12)$$

$\operatorname{Re}\lambda < c$ erfüllen. Ferner ist die Anzahl der Lösungen in jedem vertikalen Streifen

$$S_{m,M} = \{z \in \mathbb{C} \mid m < \operatorname{Re}z < M\} \quad (m, M \in \mathbb{R}, m < M)$$

der komplexen Ebene endlich.

Beweis. Für den Betrag der Lösungen gilt

$$|\lambda - A| = |Be^{-\lambda\tau}| = |B| \exp(-\tau \operatorname{Re}\lambda).$$

Falls also $|\lambda|$ groß wird, so muss $-\tau \operatorname{Re}\lambda$ groß, also $\operatorname{Re}\lambda$ klein werden (d.h., $\operatorname{Re}\lambda \rightarrow -\infty$).

Nun sind die Nullstellen der analytischen Funktion

$$\lambda \mapsto \lambda - A - \beta e^{-\lambda\tau}$$

isoliert, häufen sich also in keinem Punkt. Damit muss für jede Folge $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Lösungen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$$

gelten (es gäbe sonst eine beschränkte und davon eine konvergente Teilfolge). Nach der obigen Abschätzung folgt dann aber $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\lambda_k = -\infty$. Daraus folgen sofort beide Behauptungen. \square

Wie für gewöhnliche Differenzialgleichungen können wir aus Lösungen der charakteristischen Gleichung auch Lösungen der homogenen Gleichung

$$\dot{u}(t) = Au(t) + Bu(t - \tau) \quad (3.3.13)$$

ablesen.

Satz 3.19. Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Lösung k -ter Ordnung von (3.3.12) ist, dann löst für jedes $l = 0, \dots, k-1$ die Funktion $t \mapsto t^l e^{\lambda t}$ die Gleichung (3.3.13).

Beweis. Für $u(t) = t^l e^{\lambda t}$ ist

$$e^{-\lambda t} (\dot{u}(t) - Au(t) - Bu(t - \tau)) = t^l \lambda + l t^{l-1} - At^l - B(t - \tau)^l e^{-\lambda\tau}$$

Ausschreiben des Terms $(t - \tau)^l$ nach dem binomischen Lehrsatz zeigt, dass dieses gleich

$$\sum_{j=0}^l \binom{l}{j} t^{l-j} \frac{d^j}{d\lambda^j} \zeta(\lambda)$$

ist, wobei $\zeta(\lambda) = \lambda - A - Be^{-\lambda\tau}$ die charakteristische Funktion ist. Für eine Lösung λ k ter Ordnung der charakteristischen Gleichung ist diese Summe nun aber Null, da sämtliche darin auftretenden Ableitungen von ζ an dieser Stelle verschwinden. Da $e^{-\lambda t}$ stets positiv ist, folgt daraus, dass die Klammer

$$(\dot{u}(t) - Au(t) - Bu(t - \tau)),$$

verschwindet und die gegebene Funktion u die Gleichung (3.3.13) löst. \square

Bemerkung 3.20. Wegen der Linearität der Gleichung (3.3.13) wird diese natürlich auch durch sämtliche Linearkombinationen von Lösungen wie im letzten Satz angegeben gelöst. Anders als im Fall gewöhnlicher Differenzialgleichungen erstreckt sich dieses auch auf unendliche Linearkombinationen derartiger Lösungen (die charakteristische Gleichung hat unendlich viele Lösungen), sofern die Koeffizienten die Konvergenz dieser Summen garantieren. Das ist auch wenig überraschend, da wir ja nicht nur für jeden reellen Anfangswert $u(0)$ eine Lösung finden müssen, sondern zu jeder stetigen Funktion $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. \mathbb{R}^n im mehrdimensionalen Fall).

Ebenfalls von der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen bekannt ist das Konzept der Fundamentallösung, deren Kenntnis die Berechnung der Lösungen zu beliebigen Anfangsbedingungen und möglichen Inhomogenitäten a in (3.3.2) erlaubt. Die Fundamentallösung Φ der Gleichung (3.3.13) ist die Lösung der Gleichung zu den Anfangsbedingungen

$$\phi = \chi_{\{0\}}$$

also $\phi(s) = 0$ für $s \in [-\tau, 0)$ und $\phi(0) = 1$. Dass eine solche Lösung tatsächlich existiert, obwohl die Anfangsbedingungen nicht stetig sind und die Sätze 3.2 und 3.12 nicht anwendbar sind, rechnet man leicht explizit nach. Für die schrittweise Integration genügt es schließlich, dass ϕ integrierbar ist.

Der Zusammenhang zwischen dieser Fundamentallösung und der charakteristischen Funktion ζ ist auch der bereits bekannte. Die LAPLACE-Transformierte der Fundamentallösung Φ ist nämlich gerade $\frac{1}{\zeta}$.

Einschub: Laplace-Transformation

Zur Wiederholung oder Information zitieren wir an dieser Stelle ohne Beweis einige Sätze zur LAPLACE-Transformation.

Satz 3.21. (und Def.) Für jede messbare Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die für gewisse $M \geq 0$ und $\sigma \in \mathbb{R}$ der Abschätzung

$$|g(t)| \leq M e^{\sigma t} \quad \text{für } t \in [0, \infty) \quad (3.3.14)$$

genügt (wir nennen eine solche Funktion im folgenden zulässig), ist durch

$$\mathcal{L}g(\lambda) := \int_0^\infty e^{\lambda t} g(t) dt \quad (3.3.15)$$

eine analytische Funktion $\mathcal{L}g : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \sigma\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert. Diese wird als LAPLACE-Transformierte von g bezeichnet.

Selbstverständlich ist die LAPLACE-Transformation linear, es gilt also für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle zulässigen Funktionen $g, h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\alpha g + \beta h) = \alpha \mathcal{L}g + \beta \mathcal{L}h.$$

Die Wirkung auf die Faltung zweier Funktionen ist eine besondere.

Lemma 3.22. (LAPLACE-Transformation und Faltung) Für zulässige Funktionen $g, h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Faltung $g * h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ von g und h durch

$$(g * h)(t) = \int_0^t g(t-s)h(s) ds$$

definiert. Es gilt

$$\mathcal{L}(g * h) = \mathcal{L}g \mathcal{L}h$$

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation erfordert etwas mehr Arbeit.

Lemma 3.23. Für jede Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit auf jedem kompakten Intervall beschränkter Variation derart, dass für eine Konstante $\beta > 0$

$$\int_0^\infty g(t)e^{-\beta t} dt$$

existiert, gilt für jedes $\gamma > \beta$

$$\int_{(\gamma)} \mathcal{L}g(\lambda)e^{\lambda t} d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(t-0) + g(t+0)) & \text{für } t > 0 \\ \frac{1}{2}g(+0) & \text{für } t = 0 \end{cases}. \quad (3.3.16)$$

Inbesondere ist in den Stetigkeitspunkten von g die rechte Seite gleich $g(t)$.

Notation. Im vorigen Lemma ist das Integral als

$$\int_{(\gamma)} \varphi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \varphi(\lambda) d\lambda \quad (3.3.17)$$

zu lesen.

Die Schreibweise $g(t \pm 0)$ bezeichnet den Grenzwert von g im Punkt t bei Annäherung von rechts bzw. links.

Bemerkung 3.24. *Funktionen beschränkter Variation $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind genau diejenigen, die sich als Differenz zweier monotoner Funktionen schreiben lassen. Zum Beispiel ist jede LIPSCHITZ-stetige Funktion von beschränkter Variation auf jedem kompakten Intervall. Insbesondere hat jede Funktion beschränkter Variation in jedem Punkt die im Lemma angegebenen rechts- und linksseitigen Grenzwerte. Ebenso ist für jede integrierbare Funktion f das Integral $t \mapsto \int_{t_0}^t f(s) ds$ von beschränkter Variation auf $[t_0, t_0 + T]$.*

Die LAPLACE-Transformation erlaubt uns nun die Berechnung der Fundamentallösung.

Satz 3.25. *Die Lösung von (3.3.13) mit Anfangsdaten $\phi = \chi_{\{0\}}$ ist die auf $(0, \infty)$ durch*

$$\Phi(t) = \int_{(\gamma)} e^{\lambda t} \frac{d\lambda}{\zeta(\lambda)} \quad (3.3.18)$$

gegebene Funktion, wobei $\gamma > |A| + |B|$ (vgl. Satz 3.15) beliebig ist.

Beweis. Analog zu Satz 3.15 wächst die Lösung Φ höchstens exponentiell:

$$|\Phi(t)| \leq \alpha \exp(\beta t)$$

mit $\beta = |A| + |B|$. Für $\operatorname{Re} \lambda > \beta$ ist $\mathcal{L}\Phi$ also analytisch. Wir multiplizieren die zu

$$0 = -\dot{\Phi}(t) + A\Phi(t) + B\Phi(t - \tau)$$

umgeschriebene Gleichung (3.3.13) mit $e^{-\lambda t}$ und integrieren von 0 bis ∞ :

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \dot{\Phi}(t) dt + \int_0^\infty A e^{-\lambda t} \Phi(t) dt + \int_0^\infty B e^{-\lambda t} \Phi(t - \tau) dt \\ &= \Phi(0) - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \Phi(t) dt + A \mathcal{L}\Phi(\lambda) + B \int_{-\tau}^\infty e^{-\lambda s - \lambda \tau} \Phi(s) ds \\ &\quad (\text{beachte: } \Phi \equiv 0 \text{ auf } [-\tau, 0)) \\ &= 1 - (\lambda - A - B e^{-\lambda \tau}) \mathcal{L}\Phi(\lambda). \end{aligned}$$

Das zeigt

$$\mathcal{L}\Phi(\lambda) = \frac{1}{\zeta(\lambda)}$$

und die Behauptung folgt dann aus der Anwendung der Inversionsformel aus Lemma 3.23 auf die durch schrittweise Integration zu berechnende (also von beschränkter Variation) und nach Satz 3.15 höchstens exponentiell schnell wachsende und damit zulässige Funktion Φ . \square

Nun kommen wir zu einem wesentlichen Ergebnis, das uns die Abschätzung der Fundamentallösung in Abhängigkeit von den Lösungen der charakteristischen Gleichung liefert.

Satz 3.26. *Für alle*

$$\sigma > \sigma_0 := \max \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \zeta(\lambda) = 0 \}$$

existiert ein M derart, dass die Fundamentallösung von (3.3.13) für alle $t \geq 0$

$$|\Phi(t)| \leq M e^{\sigma t} \quad (3.3.19)$$

erfüllt.

Beweis. (I) Für hinreichend großes $\gamma \in \mathbb{R}$ ist nach dem letzten Satz

$$\Phi(t) = \int_{(\gamma)} \frac{e^{\lambda t}}{\zeta(\lambda)} d\lambda.$$

Wir können $\gamma > \sigma$ wählen und erhalten dann

$$\Phi(t) = \int_{(\sigma)} \frac{e^{\lambda t}}{\zeta(\lambda)} d\lambda.$$

Beide Integrale sind gleich, da der Integrand in jedem durch die Geraden $\{\operatorname{Re}\lambda = \sigma\}$, $\{\operatorname{Re}\lambda = \gamma\}$ und $\{\operatorname{Im}\lambda = \pm R\}$ begrenzten Rechteck analytisch ist und daher das umlaufende Kurvenintegral verschwindet und die Integrale über die waagerechten Kanten für $R \rightarrow \infty$ gegen Null streben.

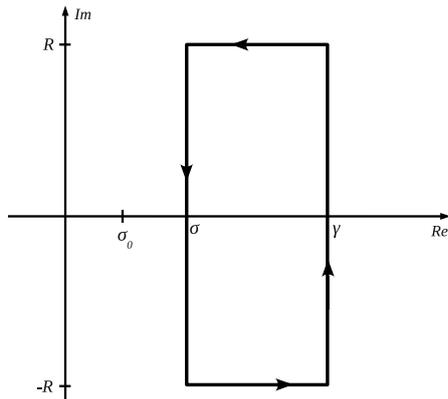


Abbildung 3.1: Skizze des Rechtecks, über dessen Rand integriert wird für gegebene $\gamma > \sigma > \sigma_0$ und $R > 0$.

Wählt man nämlich R so groß, dass

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{R^2}} - \frac{|A| + |B|e^{-\alpha\tau}}{R} \geq \frac{1}{2}$$

ist (man beachte: die linke Seite ist monoton wachsend in $R \in (0, \infty)$ und strebt gegen 1 für $R \rightarrow \infty$), dann ist für alle $\lambda = \rho + \imath R$ mit $\sigma \leq \rho < \gamma$

$$|\zeta(\lambda)^{-1}| \leq \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + R^2} - |A| - |B|e^{\rho\tau}} \leq \frac{2}{R}$$

und damit für das Integral

$$\begin{aligned} \left| \int_{[\sigma + \imath R, \gamma + \imath R]} e^{\lambda t} \frac{1}{\zeta(\lambda)} d\lambda \right| &\leq \int_{[\sigma + \imath R, \gamma + \imath R]} \underbrace{|e^{\lambda t}|}_{\leq e^{\gamma t}} \underbrace{\frac{1}{|\zeta(\lambda)|}}_{\leq \frac{2}{R}} d\lambda \leq \frac{2}{R} e^{\gamma t} (\gamma - \sigma) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \\ &\leq e^{\gamma t} \leq \frac{2}{R} \end{aligned}$$

wohlgemerkt unabhängig von t .

Analog verschwindet auch das Integral über die untere Kante für $R \rightarrow \infty$.

(II) Nun betrachten wir die durch

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\zeta(\lambda)} - \frac{1}{\lambda - \sigma_0}$$

definierte Hilfsfunktion ξ , welche für $\lambda = \sigma + \imath R$ mit hinreichend großem $|R|$ wie in Schritt (I) als

$$|\xi(\lambda)| \leq \frac{2}{R^2} (|A| + |B|e^{-\sigma\tau} + |\sigma_0|)$$

abgeschätzt werden kann. Damit ist

$$\int_{(\sigma)} |\xi(\lambda)| d\lambda < \infty$$

und für alle $t > 0$

$$\left| \int_{(\sigma)} e^{\lambda t} \xi(\lambda) d\lambda \right| \leq M_1 e^{\sigma t}$$

mit einer Konstante M_1 . Ferner ist

$$\left| \int_{(\sigma)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \sigma_0} d\lambda \right| \leq M_2 e^{\sigma t}.$$

Kombinieren wir diese Abschätzungen mit der Unabhängigkeit des Integrals von σ (solange $\sigma > \sigma_0$ ist), so erhalten wir die Behauptung mit $M = M_1 + M_2$. \square

Wieder erkennen wir sofort die Analogie zu (Systemen von) linearen gewöhnlichen Differenzialgleichungen, bei denen das Wachstum der Lösung der homogenen Gleichung durch diejenige Lösung der charakteristischen Gleichung mit größtem Realteil bestimmt wird.

Wie für die gewöhnlichen Differenzialgleichungen können wir die Lösung der homogenen Gleichung nun auch in Eigenräume der charakteristischen Gleichung zerlegen. Genauer sind die in Satz 3.19 und Bemerkung 3.20 angegebenen Lösungen bereits alle möglichen Lösungen der Gleichung (3.3.13). Den Beweis für diese Aussage, der im wesentlichen auf dem Residuensatz beruht, verbannen wir in den Anhang zu diesem Kapitel.

Was wir an dieser Stelle noch nachtragen wollen, sind einige Aussagen zu den Lösungen der charakteristischen Gleichung für skalare lineare Gleichungen der Form (3.3.13) in Abhängigkeit von $A, B \in \mathbb{R}$. Wir schreiben die zu suchende Lösung als $\lambda = \xi + i\eta$ und lösen die zugehörige charakteristische Gleichung (3.3.12) getrennt nach Real- und Imaginärteil. Das führt zu

$$0 = \xi - A - Be^{-\xi\tau} \cos(\eta\tau) \quad \text{und} \quad 0 = \eta + Be^{-\xi\tau} \sin(\eta\tau). \quad (3.3.20)$$

Das lässt sich natürlich immer noch nicht geschlossen lösen, wir erinnern uns aber nun daran, dass wir uns vor allem für das Vorzeichen von ξ interessieren.

Genauer können wir nach der (notwendig endlichen) Zahl von Lösungen fragen, deren Realteil ξ positiv ist. Wegen der Analytizität der charakteristischen Funktion bezüglich ihrer Parameter und bezüglich λ wird sich die Zahl der (mit Vielfachheit gezählten) Lösungen positiven Realteils bei Variation der Parameter A, B und τ nur dadurch ändern können, dass vorhandene Lösungen die imaginäre Achse überschreiten. Wir suchen also zunächst nach rein imaginären Lösungen $\lambda = i\eta$.

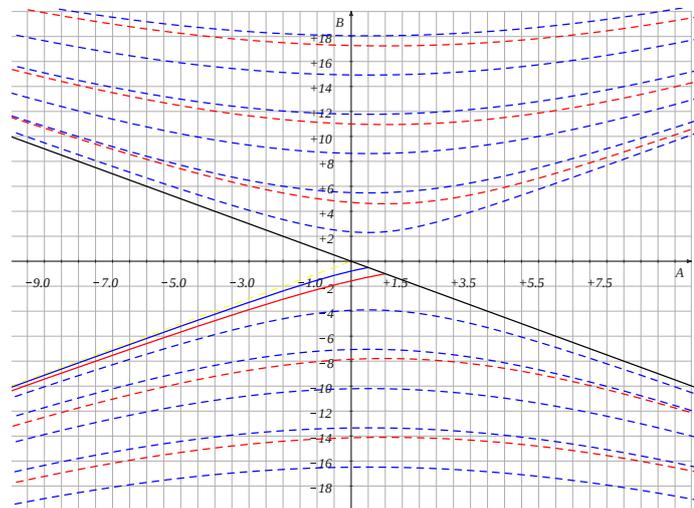


Abbildung 3.2: Kurven im $A - B$ -Parameterraum, entlang derer die charakteristische Gleichung (3.3.12) Lösungen mit verschwindendem Realteil hat. Rot: für $\tau = 1$, blau: für $\tau = 2$, schwarz; für alle $\tau > 0$.

Besonders schnell erkennen wir, dass $\lambda = 0$ genau dann eine Lösung ist, wenn $A + B = 0$ gilt. Das ist die schwarze Linie in Abbildung 3.2. Lösungen $\lambda = i\eta$ auf der imaginären Achse mit nicht verschwindendem Imaginärteil erfüllen die Gleichungen

$$0 = -A - B \cos(\eta\tau), \quad 0 = \eta + B \sin(\eta\tau)$$

und existieren genau dann, wenn die Parameter

$$B = -\frac{\eta}{\sin(\eta\tau)}, \quad A = -B \cos(\eta\tau) = \eta \cot(\eta\tau)$$

für irgendein $\eta \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{\tau}\mathbb{Z}$ erfüllen. Jede der farbigen Kurven in Abbildung 3.2 entspricht einer solchen Kurve, parametrisiert in einem Intervall $(k\frac{\pi}{\tau}, (k+1)\frac{\pi}{\tau})$ für $\tau = 1$ oder $\tau = 2$.

Die Kurven zerlegen nun also den zweidimensionalen Parameterraum (zu gegebenem τ) in offene Zusammenhangskomponenten, auf denen die Anzahl der (mit Vielfachheit gezählten) Lösungen λ mit positivem Realteil konstant ist. Wie wir sofort erkennen (siehe auch Theorie der gewöhnlichen Differenzialgleichungen), ist für $A < 0$ und $B = 0$ die einzige Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda = A < 0$. Also ist der Stabilitätsbereich die keilförmige Fläche links der durchgezogenen Linie in Abbildung 3.2.

Da sich für wachsende τ der erste nicht triviale Zweig von Lösungen asymptotisch der Diagonalen $A = B$ annähert und für $\tau \searrow 0$ im Unendlichen verschwindet, lesen wir aus der Abbildung folgende Stabilitätseigenschaften ab.

Satz 3.27. Gleichung (3.3.12) hat für $\tau > 0$

(i) nur Lösungen negativen Realteils, falls $A < 0$ und $B \in [-A, A)$ ist und

(ii) mindestens eine Lösung positiven Realteils, wenn $A + B > 0$ ist.

Falls $B < 0$ und $A \in (-B, B)$ ist, so existiert ein (von A und B abhängiges) $\tau_0 > 0$ derart, dass Gleichung (3.3.12) für $0 < \tau < \tau_0$ keine Lösungen positiven Realteils besitzt, für $\tau > \tau_0$ hingegen mindestens eine solche.

3.3.3 Die inhomogene Gleichung – Variation der Konstanten

Bisher haben wir die Fundamentallösung der homogenen Gleichung (3.3.13) zu Anfangsbedingungen $\phi = \chi_{\{0\}}$ beschrieben. Unser eigentliches Interesse gilt natürlich der Lösung der inhomogenen Gleichung (3.3.2) mit (stückweise) stetigem Antrieb a zu beliebigen stetigen Anfangsbedingungen ϕ . Diese ergibt sich durch Faltung der Grundlösung mit dem Antrieb.

Satz 3.28. Für stetige $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3.3.2) mit $u = \phi$ auf $[-\tau, 0]$ durch

$$u(t) = u^\phi(t) + \int_0^t \Phi(t-s)a(s) ds \quad (t \geq 0) \quad (3.3.21)$$

gegeben, wobei Φ die Fundamentallösung und

$$u^\phi(t) = \Phi(t)\phi(0) + B \int_{-\tau}^0 \Phi(t-s-\tau)\phi(s) ds \quad (3.3.22)$$

die Lösung der homogenen Gleichung mit Anfangswerten ϕ sind.

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass a höchstens exponentiell wächst. Andernfalls können wir a zu beliebigem $T > 0$ zu einer beschränkten (und damit exponentiell beschränkten) Funktion abändern, die auf $[0, T]$ mit a übereinstimmt und auf $(2T, \infty)$ verschwindet. Die Lösung des so abgeänderten Problems stimmt dann auf $[0, T]$ mit der ursprünglichen überein. Wegen der Beliebigkeit von T erhalten wir die Lösung also auf $[0, \infty)$.

Da wir aus Satz 3.12 schon wissen, dass es eine eindeutige Lösung gibt, müssen wir nur noch zeigen, dass diese die angegebene Form hat. Wir nennen die Lösung des Anfangswertproblems also u , setzen sie in die Gleichung (3.3.2) ein und multiplizieren diese mit $e^{-\lambda t}$ mit hinreichend großem $\operatorname{Re} \lambda$ (rechts von allen Lösungen der charakteristischen Gleichung). Dann integrieren wir von 0 bis ∞ und erhalten mittels

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \dot{u}(t) dt &= -u(0) + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} u(t) dt = -\phi(0) + \lambda \mathcal{L}u, \\ \int_0^\infty e^{-\lambda t} B u(t-\tau) dt &= \int_{-\tau}^\infty e^{-\lambda(s+\tau)} u(s) ds = B e^{-\lambda \tau} \int_{-\tau}^0 e^{-\lambda s} \phi(s) ds + B e^{-\lambda \tau} \mathcal{L}u \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\zeta(\lambda) \mathcal{L}u(\lambda) = \phi(0) + B e^{-\lambda \tau} \int_{-\tau}^0 e^{-\lambda s} \phi(s) ds + \mathcal{L}a(\lambda). \quad (3.3.23)$$

Teilen durch $\zeta(\lambda)$ und Ansetzen der Inversionsformel aus Lemma 3.23 liefert nun für hinreichend großes γ

$$u(t) = \int_{(\gamma)} \frac{e^{\lambda t}}{\zeta(\lambda)} \left(\phi(0) + B e^{-\lambda \tau} \int_{-\tau}^0 e^{-\lambda s} \phi(s) ds + \mathcal{L}a(\lambda) \right) d\lambda$$

Wir sammeln die Terme ein und stellen fest, dass der erste gerade

$$\int_{(\gamma)} \frac{e^{\lambda t}}{\zeta(\lambda)} \phi(0) \, d\lambda = \phi(0)\Phi(t),$$

also die Fundamentallösung ist (erster Term in (3.3.21)), im letzten Term gerade das Produkt der LAPLACE-Transformierten von Φ und a im Integranden steht, dessen inverse LAPLACE-Transformation die Faltung

$$\int_{(\gamma)} \frac{e^{\lambda t}}{\zeta(\lambda)} \mathcal{L}a(\lambda) \, d\lambda = \int_{(\gamma)} e^{\lambda t} \mathcal{L}\Phi(\lambda) \mathcal{L}a(\lambda) \, d\lambda = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}\Phi \mathcal{L}a)(t) = (\Phi * a)(t) = \int_0^t \Phi(t-s)a(s) \, ds$$

liefert, was wir als ersten Term in (3.3.22) wieder finden.

Im zweiten Term vertauschen wir die Integrationen bezüglich λ und s und sammeln die Exponentialterme:

$$\begin{aligned} \int_{(\gamma)} \frac{e^{\lambda t}}{\zeta(\lambda)} B e^{-\lambda \tau} \int_{-\tau}^0 e^{-\lambda s} \phi(s) \, ds \, ds &= B \int_{-\tau}^0 \phi(s) \left(\int_{(\gamma)} e^{\lambda(t-\tau-s)} \frac{1}{\zeta(\lambda)} \, d\lambda \right) ds \\ &= B \int_{-\tau}^0 \phi(s) \quad \Phi(t-\tau-s) \quad ds. \end{aligned}$$

Dies erkennen wir als zweiten Term in (3.3.22) wieder und haben damit alle Terme in der Behauptung identifiziert. \square

Diese Darstellung der Lösung liefert uns nun endlich die gesuchte Abschätzung der Lösungen der homogenen Gleichung (mit $a \equiv 0$) anhand der Lösungen der charakteristischen Gleichung.

Satz 3.29. *Zur charakteristischen Funktion ζ der Gleichung (3.3.13) seien $\sigma_0 := \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \zeta(\lambda) = 0\}$ und u^ϕ die Lösung des Anfangswertproblems zu (3.3.13) mit gegebenen Anfangswerten ϕ . Dann existiert zu jedem $\sigma > \sigma_0$ eine Konstante $M \geq 0$ (abhängig von σ , jedoch unabhängig von ϕ !) derart, dass für alle $t \geq 0$*

$$|u^\phi(t)| \leq M e^{\sigma t} \|\phi\|_{C^0([- \tau, 0])}. \quad (3.3.24)$$

Beweis. Man kombiniere die Darstellungsformel aus Satz 3.28 mit der Abschätzung aus Satz 3.26. Das liefert sofort die gewünschte Abschätzung. \square

Korollar 3.30. *Haben insbesondere alle Lösungen der charakteristischen Gleichung negativen Realteil, so ist $\sigma_0 < 0$ und wir können ein $\sigma < 0$ für die Abschätzung im letzten Satz wählen, um zu folgern, dass alle Lösungen der homogenen Gleichung für große Zeiten exponentiell gegen Null fallen müssen. In diesem Fall ist die Nulllösung also asymptotisch stabil.*

Beispiel 3.31. *Kehren wir zu unserem einführenden Beispiel*

$$\dot{u}(t) = Bu(t - \tau)$$

zurück, so können wir aus der Diskussion in Beispiel 3.17 folgern, dass die Nulllösung asymptotisch stabil sein wird, wenn $0 > 2\tau B > -\pi$ ist.

3.4 Anhang: Spektrale Zerlegung der Fundamentallösungen

Wie versprochen wollen wir zeigen, dass die Fundamentallösung die Form

$$\Phi(t) = \sum_j p_j(t) \exp(\lambda_j t) \quad (3.4.1)$$

hat, wobei die Summation über alle Lösungen λ_j der charakteristischen Gleichung läuft und jedes der p_j ein Polynom ist, dessen Grad der Vielfachheit von λ_j als Wurzel der charakteristischen Gleichung minus 1 entspricht.

Wie im Beweis von Satz 3.26 stellen wir zunächst fest, dass die charakteristische Gleichung in

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - A| > |B| \exp(-\tau \operatorname{Re}\lambda)\}$$

keine Lösungen hat und wählen dann wieder ein durch $\{\operatorname{Re}\lambda = \sigma\}$, $\{\operatorname{Re}\lambda = \gamma\}$ und $\{\operatorname{Im}\lambda = \pm R\}$ begrenztes Rechteck Γ und achten nun darauf, dass σ

$$(\sigma - A)^2 + R^2 > B^2 \exp(-2\sigma\tau)$$

erfüllt. Dann haben wir dank dieser Abschätzung

$$\left| \int_{[\sigma+iR, \gamma+iR]} \frac{e^{\lambda t}}{\zeta(\lambda)} d\lambda \right| \leq \frac{2}{R} e^{\gamma t} (\gamma - \sigma) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

und analog für das entsprechende Integral über $[\sigma - iR, \gamma - iR]$.

Nun wählen wir uns eine monoton fallende Folge (σ_k) reeller Zahlen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = -\infty$ derart, dass keine Lösungen der charakteristischen Gleichung den Realteil σ_k für ein k haben.

Nach dem Residuensatz ist nun das Integral über ein wie oben beschriebenes Rechteck mit vertikalen Kanten $\{\operatorname{Re}\lambda = \sigma_k\}$ und $\{\operatorname{Re}\lambda = \sigma_l\}$ ($k < l$) für hinreichend große R (derart, dass alle im entsprechenden vertikalen Streifen liegenden Lösungen der charakteristischen Gleichung in Γ liegen) durch

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\zeta(t)} d\lambda = 2\pi i \sum_{m=k+1}^l \sum_{j=1}^{\nu_m} \operatorname{Res}(\exp(t \cdot) \zeta^{-1}, \lambda_j),$$

wobei ν_m die Zahl der im Streifen $\{\sigma_m < \operatorname{Re}\lambda < \sigma_{m-1}\}$ liegenden verschiedenen Nullstellen von ζ ist. Jedes der vorkommenden Residuen ist dann wie behauptet von der Form $p_j(t) \exp(\lambda_j t)$ mit einem Polynom dessen Grad der Ordnung des Pols von ζ^{-1} minus 1 entspricht.

Da die Integrale über die horizontalen Kanten für $R \rightarrow \infty$ verschwinden, erhalten wir also für hinreichend großes γ

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_{(\gamma)} \frac{e^{\lambda t}}{\zeta(\lambda)} d\lambda = \underbrace{\int_{\sigma_k} \frac{e^{\lambda t}}{\zeta(\lambda)} d\lambda}_{=: \Psi_k(t)} + \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{\nu_m} p_j(t) e^{\lambda_j t} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Für die Ψ_k gilt wie gehabt eine Abschätzung der Form

$$|\Psi_k(t)| \leq M \exp(\sigma_k t) \quad \text{für } t \geq 0.$$

Definieren wir nun

$$\Psi_{\infty}(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k(t) \quad \text{für } t \geq 0,$$

so stellen wir fest, dass Ψ_{∞} schneller als exponentiell gegen Null fällt und im vorliegenden Fall tatsächlich für alle $t > 0$ verschwindet. Daher ist also die Fundamentallösung Φ tatsächlich eine (unendliche) Summe von Termen der Form $p_j(t) \exp(\lambda_j t)$.

Kapitel 4

Existenztheorie für Differenzialdifferenzengleichungen II

4.1 Formulierung des Anfangswertproblems

Die im vorigen Kapitel unternommene Lösung durch schrittweise Integration funktionierte hervorragend für Gleichungen mit diskreter Verzögerung. Bei allgemeineren Gleichungen mit verteilter Verzögerung wie etwa

$$\dot{u}(t) = -u(t) + \int_{t-\tau}^t u(s) ds \quad (4.1.1)$$

oder

$$\dot{u}(t) = - \sup_{t-\tau \leq s \leq t} u(s) \quad (4.1.2)$$

funktioniert dieser Ansatz nicht mehr, da das verzögerte Argument bis an den aktuellen Zeitpunkt heran reicht.

In Erinnerung an durch gewöhnliche Differenzialgleichungen definierte dynamische Systeme versuchen wir die Lösung einer solchen Gleichung als Trajektorie in einem Zustandsraum zu beschreiben, wobei der Zustand zum Zeitpunkt t_0 ausreichen soll, um die inkrementelle Änderung der Lösung zum gegebenen Zeitpunkt zu beschreiben.

Für eine Differenzialgleichung

$$\dot{u} = f(t, u(t)) \quad (f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n)$$

benötigen wir zu Bestimmung von $\dot{u}(t_0)$ lediglich den Wert der Lösung u zum Zeitpunkt t_0 . Als Zustandsraum eignet sich also der \mathbb{R}^n .

In den obigen Beispielen ist zu jedem Zeitpunkt t_0 zur Bestimmung der Ableitung $\dot{u}(t_0)$ die Kenntnis von u auf dem gesamten Intervall $[t_0 - \tau, t_0]$ nötig. Also sollte der Zustandsraum, in dem sich die Lösung entwickelt, ein Raum von Funktionen auf einem Intervall der Länge τ sein. Nun erinnern wir uns daran, dass wir von unseren Anfangsbedingungen ϕ gefordert hatten, dass sie auf $[-\tau, 0]$ stetig sein sollten und wählen daher als Zustandsraum

$$C := C^0([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n),$$

versehen mit der üblichen Supremumnorm

$$\|u\|_0 := \max_{-\tau \leq s \leq 0} |u(s)|, \quad (4.1.3)$$

wobei $|\cdot|$ den EUKLIDISCHEN Betrag im \mathbb{R}^n bezeichnen soll.

Zu einer gegebenen stetigen Funktion $u : [t_0 - \tau, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir für $t \in [0, T]$ mit u_t die durch

$$u_t(s) := u(t + s), \quad -\tau \leq s \leq 0 \quad (4.1.4)$$

definierte Funktion $u_t : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, von der wir sofort sehen, dass sie in C liegt und die Norm

$$\|u_t\|_0 = \max_{t_0 - \tau \leq s \leq t_0} |u(s)| \quad (4.1.5)$$

hat.

Eine allgemeine Differentialgleichung mit verzögertem Argument, die auch als Funktionaldifferentialgleichung bezeichnet wird und die wir der Einfachheit halber weiterhin mit DDE abkürzen, lautet dann

$$\dot{u}(t) = f(t, u_t), \quad (4.1.6)$$

wobei die Ableitung stets als rechtsseitige zu lesen ist und $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall I und einer geeigneten Teilmenge $\Omega \subset C$ unseres Funktionenraums definiert ist. Oft ist $\Omega = C$, es kann sich aber zum Beispiel auch um eine Umgebung der Anfangsbedingungen (etwa eine Kugel der Form $\{v \in C \mid \|v\|_0 < m\}$) oder einen linearen Teilraum wie $C^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ – den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen – handeln.

Diese Gleichung wird dann von Trajektorien der Form $t \mapsto u_t \in \Omega$ gelöst.

Beispiel 4.1. 1. In den obigen Beispielen sind die rechten Seiten nicht explizit zeitabhängig und lauten

$$f(v) = -v(0) + \int_{-\tau}^0 v(s) \, ds$$

bzw.

$$f(v) = - \max_{-\tau \leq s \leq 0} v(s).$$

Solche Gleichungen nennen wir autonom. Außerdem ist die erste auch noch linear, da für deren rechte Seite

$$f(t, \alpha v + \beta w) = \alpha f(t, v) + \beta f(t, w) \quad \text{für alle } t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, v, w \in C$$

gilt, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Die zweite Gleichung ist nicht linear, wie man am Beispiel $\tau = 1$, $v(s) = (s + \frac{1}{2})^2$, $w(s) = -(s + \frac{1}{2})^2$ sieht. Dann ist nämlich $v + w \equiv 0$ und damit

$$\max_{-1 \leq s \leq 0} v(s) + \max_{-1 \leq s \leq 0} w(s) = \frac{1}{4} + 0 \neq 0 = \max_{-1 \leq s \leq 0} (v(s) + w(s)).$$

2. Auch Gleichungen der Form

$$\dot{u}(t) = Au(t) + \int_{t-\tau}^t K(s-t)u(s) \, ds \quad (4.1.7)$$

zu gegebenem integrierbarem Kern $K : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind linear und autonom mit

$$f(v) = Av(0) + \int_{-\tau}^0 K(s)v(s) \, ds.$$

3. Hingegen ist die ganz ähnliche Gleichung

$$\dot{u}(t) = Au(t) + \int_{t-\tau}^t K(s)u(s) \, ds \quad (4.1.8)$$

mit nun gegebenem $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ für nicht konstantes K keineswegs mehr autonom, da hier

$$f(t, v) = Av(0) + \int_{-\tau}^0 K(s+t)v(s) \, ds$$

via K explizit von der Zeit abhängt.

4. Auch die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{u}(t) = F(t, u(t))$$

fallen unter dieses allgemeine Schema mit

$$f(t, v) = F(t, v(0)).$$

5. Selbstverständlich können wir auch diskret verzögerte Gleichungen

$$\dot{u}(t) = F(t, u(t), u(t - \tau)) \quad (4.1.9)$$

in der Form (4.1.6) mit

$$f(t, v) = F(t, v(0), v(-\tau))$$

schreiben. Diese Gleichungen sind genau dann linear, wenn F bezüglich seines zweiten und dritten Arguments linear ist.

Das einführende Beispiel $\dot{u} = -u(t - \tau)$ ergibt sich einfach mit $f(v) = -v(-\tau)$. Ein konkretes Beispiel für eine nichtlineare Gleichung ist durch

$$\dot{u}(t) = -u(t) \int_{t-\tau}^t u(s) ds \quad (4.1.10)$$

gegeben. Hier lautet die (zeitunabhängige) rechte Seite nämlich

$$f(v) = -v(0) \int_{-\tau}^0 v(s) ds.$$

Dass dieses nicht linear ist, rechnet man leicht anhand $v = \chi_{[-\tau, 0]} =: \chi$, $\alpha = 2$ nach:

$$f(2\chi) = -2\chi(0) \int_{-\tau}^t 2\chi(s) ds = -4\tau \neq -2\tau = 2 \left(-\chi(0) \int_{-\tau}^0 \chi(s) ds \right) = 2f(\chi).$$

6. Ein weiteres nichtlineares Beispiel liefert die uns bereits bekannte verzögerte logistische Gleichung

$$\dot{u}(t) = \gamma u(t) \left(1 - \frac{1}{K} \int_{t-\tau}^t k(s-t) u(s) ds \right)$$

mit nicht negativem normierten Kern k , d.h.,

$$\int_{-\tau}^0 k(s) ds = 1.$$

Diese Gleichung wird uns noch mehrfach beschäftigen.

Das zu untersuchende Anfangswertproblem zu gegebenem $I = [t_0, t_0 + T]$, $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\phi \in \Omega$ lautet dann also

$$\dot{u}(t) = f(t, u_t) \quad \text{für } t \in [t_0, t_0 + T], \quad u_{t_0} = \phi, \quad (4.1.11)$$

wobei sich die Anfangsbedingung zu

$$u(s) = \phi(t_0 + s) \quad \text{für } s \in [t_0 - \tau, t_0]$$

übersetzen lässt.

Eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist dann eine stetige, auf $[t_0, t_0 + T]$ (rechtsseitig) stetig differenzierbare Funktion $u : [t_0 - \tau, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für alle $t \in [t_0, t_0 + T]$ $u_t \in \Omega$ und die Gleichung $\dot{u} = f(t, u_t)$ erfüllt sowie auf $[t_0 - \tau, t_0]$ mit $\phi(t_0 + \cdot)$ übereinstimmt.

Wir hatten schon festgestellt, dass für stetiges $u : [t_0 - \tau, t_0 + \delta]$ die Funktion u_t für jedes $t \in [t_0, \delta]$ zu C gehört und

$$\|u_t\|_0 \leq \max_{t_0 - \tau \leq s \leq t_0 + \delta} |u(s)| = \|u\|_{C^0([t_0 - \tau, t_0 + \delta])}$$

erfüllt.

Im folgenden werden wir in aller Regel rechte Seiten betrachten, die für alle stetigen Funktionen definiert sind, also $\Omega = C$ annehmen. In Erinnerung an Bedingung 3.1 wollen wir von dieser rechten Seite $f : I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ wieder eine LIPSCHITZ-Bedingung annehmen.

Bedingung 4.2. Die Funktion $f : I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) sei stetig, d.h., für alle $(t^*, v^*) \in I \times C$ und alle $\varepsilon > 0$ existiere ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $(t, v) \in I \times C$ mit

$$|t - t^*| + \|v - v^*\|_0 < \delta$$

gilt:

$$|f(t, v) - f(t^*, v^*)| < \varepsilon.$$

Ferner sei f lokal LIPSCHITZ-stetig bezüglich seines zweiten Arguments, d.h., für alle $t_0, t_1 \in I$ mit $t_0 < t_1$ und alle $M > 0$ existiere ein $L \geq 0$ derart, dass für alle $t \in [t_0, t_1]$ und alle $v, w \in C$ mit $\|v\|_0, \|w\|_0 \leq M$

$$|f(t, v) - f(t, w)| \leq L \|v - w\|_0$$

gilt.

Findet man ein von $t \in I$ und $M > 0$ unabhängiges L , durch welches diese Bedingung erfüllt ist, so nennt man f global LIPSCHITZ-stetig.

Beispiel 4.3. 1. In unserem einführenden Beispiel mit $f(v) = Bv(-\tau)$ ist diese Bedingung offensichtlich mit $L = |B|$ für alle M und $t \in \mathbb{R}$ erfüllt, dieses f ist also sogar global LIPSCHITZ-stetig.

2. Für

$$f(v) = Av(0) + \int_{-\tau}^0 K(s)v(s) ds$$

mit gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und stetigem Kern $K : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ (vgl. Bsp. 2 oben) ist die LIPSCHITZ-Bedingung auch global erfüllt.

3. Das letzte Beispiel

$$f(v) = -v(0) \int_{-\tau}^0 v(s) ds$$

ist ebenfalls lokal LIPSCHITZ-stetig im Sinne der Bedingung, jedoch nicht global.

ÜA. Man beweise die Aussagen zu Bsp. 2 und 3 und finde jeweils geeignete LIPSCHITZ-Konstanten L .

4.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Um das Anfangswertproblem (4.1.11) zu einer Integralgleichung umschreiben zu können, zeigen wir zunächst das folgende wenig überraschende Lemma.

Lemma 4.4. Falls $u : [t_0 - \tau, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist, so ist die Abbildung $[t_0, t_0 + T] \ni t \mapsto u_t \in C$ stetig.

Beweis. Da u als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $I = [t_0 - \tau, t_0 + T]$ gleichmäßig stetig ist, finden wir zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass $|u(s) - u(t)| < \varepsilon$ für alle $s, t \in I$ mit $|s - t| < \delta$ gilt.

Ist nun also $\varepsilon > 0$ gegeben, so ist für alle $t, s \in [t_0, t_0 + T]$ mit $|t - s| < \delta$:

$$\|u_t - u_s\|_0 = \max_{-\tau \leq r \leq 0} |u_t(r) - u_s(r)| = \max_{-\tau \leq r \leq 0} |u(t+r) - u(s+r)| < \varepsilon,$$

da $|t+r - (s+r)| = |t-s| < \delta$ und $t+r, s+r \in I$ für alle $r \in [-\tau, 0]$ gilt. \square

Wir können nun guten Gewissens (4.1.6) zu

$$u(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, u_s) ds \quad \text{auf } [t_0, t_0 + T] \quad (4.2.1)$$

umschreiben, wobei $u = \phi$ auf $[t_0 - \tau, t_0]$ weiterhin erfüllt sein soll. Dank des soeben bewiesenen Lemmas ist diese Formulierung sinnvoll, da für stetiges u (wie in der Definition einer Lösung gefordert) und stetiges f der Integrand ebenfalls stetig in s ist.

Nun zeigen wir noch ein Resultat zur lokalen Beschränktheit LIPSCHITZ-stetiger Abbildungen, das wir im Beweis für die eindeutige Lösbarkeit benötigen, um eine Kontraktion für kurze Zeiten zu konstruieren (man erinnere sich an den Beweis des Satzes von PICARD und LINDELÖF).

Lemma 4.5. Falls $f : I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ Bedingung 4.2 erfüllt, dann existiert für jedes Intervall $[t_0, t_1] \subset I$ und gegebenes $M > 0$ eine Schranke $c > 0$ derart, dass

$$|f(t, v)| \leq c \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1] \text{ und alle } v \in C \text{ mit } \|v\|_0 \leq M$$

gilt.

Beweis. Zu gegebenem $[t_0, t_1]$ und $M > 0$ sei L die LIPSCHITZ-Konstante von f aus Bedingung 4.2. Dann ist mit $w \equiv 0$ (der Nullfunktion in C) zunächst wegen der Stetigkeit von f und der Kompaktheit von $[t_0, t_1]$

$$c_1 := \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |f(t, w)| < \infty$$

und dann zu beliebigem v mit $\|v\|_0 \leq M$ nach der LIPSCHITZ-Bedingung in 4.2 wegen $\|v - w\|_0 = \|v\|_0 \leq M$:

$$|f(t, v)| \leq |f(t, v) - f(t, w)| + |f(t, w)| \leq L\|v - w\|_0 + c_1 \leq LM + c_1 =: c \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1].$$

\square

Wir kommen nun zu unserem Existenzsatz, der uns zusammen mit seinem Beweis an den analogen Satz für gewöhnliche Differenzialgleichungen erinnert. Allerdings werden wir die Eindeutigkeit erst in einem weiteren Satz zusammen mit der stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten zeigen.

Satz 4.6. *Die Funktion $f : (a, b) \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$) erfülle Bedingung 4.2. Dann existiert zu jedem $m > 0$ und $t_0 \in (a, b)$ ein $T > 0$ derart, dass für alle $\phi \in C$ mit $\|\phi\|_0 \leq m$ das Anfangswertproblem (4.1.11) eine Lösung u auf $[t_0 - \tau, t_0 + T]$ besitzt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit L die LIPSCHITZ-Konstante von f laut Bedingung 4.2 zum Intervall $[t_0, t_0 + \min\{\tau, \frac{1}{2}(b - t_0)\}]$ und $M = 2m$ und mit c die zugehörige Schranke für $|f|$ aus Lemma 4.5. Dann setzen wir $T = \min\{\tau, \frac{m}{c}, \frac{1}{2}(b - t_0)\}$.

Zu einer beliebigen stetigen Funktion $v : [t_0 - \tau, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $v_{t_0} = \phi$ und $|v(t)| \leq 2m$ auf $[t_0, t_0 + T]$ definieren wir die Funktion $w = \mathcal{K}v : [t_0 - \tau, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$w(t) = \begin{cases} \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, v_s) ds & \text{falls } t \in (t_0, t_0 + T] \\ \phi(t - t_0) & \text{falls } t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases}.$$

Der dadurch definierte Operator \mathcal{K} stellt nun eine Kontraktion auf der abgeschlossenen Kugel $B = \{v \in X \mid \|v\| \leq 2m\}$ im BANACHraum $X = C^0([t_0 - \tau, t_0 + T]; \mathbb{R}^n)$ (versehen mit der Supremumnorm) dar und besitzt damit einen eindeutigen Fixpunkt v^* , der unsere gesuchte Lösung darstellt. Wir berechnen nämlich für $t \in (t_0, t_0 + T]$

$$|w(t)| \leq m + \int_{t_0}^t c ds \leq m + cT \leq m + c \frac{m}{c} = 2m \quad (4.2.2)$$

und trivialerweise $|w(t)| \leq \|\phi\|_0 \leq m$ für $t \in [t_0 - \tau, t_0]$. Außerdem ist w natürlich stetig, da der Integrand stetig bezüglich s ist, also liegt für $v \in B$ auch $w = \mathcal{K}v$ in B .

Die folgenden Schritte vollziehen den Beweis des BANACHschen Fixpunktsatzes, den wir für diesen Schluss verwendet haben, noch einmal explizit nach. Wir konstruieren nämlich eine Folge $(u^k)_{k \geq 0}$ von Funktionen $u^k : [t_0 - \tau, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die gleichmäßig gegen die gesuchte Lösung u konvergieren.

Für u^0 setzen wir die Anfangsbedingungen einfach konstant fort:

$$u^0(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0) & \text{für } t \in [t_0 - \tau, t_0] \\ \phi(0) & \text{für } t \in (t_0, t_0 + T] \end{cases}.$$

Dafür gilt selbstverständlich $|u^0(t)| \leq m \leq 2m$ für alle $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$. Nun definieren wir rekursiv $u^{k+1} := \mathcal{K}u^k$ und erhalten $|u^k(t) - u^l(t)| = 0$ auf $[t_0 - \tau, t_0]$ und für $t \in (t_0, t_0 + T]$:

$$|u^1(t) - u^0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, u_s^0) ds \right| \leq \int_{t_0}^t c ds \leq c(t - t_0) \quad (4.2.3)$$

und insbesondere $|u^1(t) - u^0(t)| \leq cT \leq m$, also $\|u_s^1 - u_s^0\|_0 \leq m$ für alle $s \in [t_0, t_0 + T]$. Induktiv berechnen wir damit für $k \geq 1$

$$|u^{k+1}(t) - u^k(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_s^k) - f(s, u_s^{k-1})| ds \leq \int_{t_0}^t (|f(s, u_s^k)| + |f(s, u_s^{k-1})|) ds \leq 2c(t - t_0) \leq m,$$

also $\|u_s^{k+1} - u_s^k\|_0 \leq 2m$.

Damit können wir nun für $k \geq 1$ und $t \in (t_0, t_0 + T]$ die LIPSCHITZ-Bedingung ausnutzen und erhalten noch mehr:

$$\begin{aligned} |u^{k+1}(t) - u^k(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_s^k) - f(s, u_s^{k-1})| ds \leq \int_{t_0}^t L \|u_s^k - u_s^{k-1}\|_0 ds \\ &= L \int_{t_0}^t \max_{t_0 \leq r \leq t_0+s} |u^k(r) - u^{k-1}(r)| ds. \end{aligned}$$

Das liefert für $k = 1$:

$$|u^2(t) - u^1(t)| \leq L \int_{t_0}^t \max_{t_0 \leq r \leq t_0+s} |u^1(r) - u^0(r)| ds \stackrel{(4.2.3)}{\leq} L \int_{t_0}^t c(s - t_0) ds = Lc \frac{(t - t_0)^2}{2} = \frac{c}{L} \frac{L^2(t - t_0)^2}{2},$$

für $k = 2$:

$$|u^3(t) - u^2(t)| \leq L \int_{t_0}^t \max_{t_0 \leq r \leq t_0+s} |u^2(r) - u^1(r)| ds \leq L \int_{t_0}^t \frac{c}{L} \frac{L^2(s - t_0)^2}{2} ds = \frac{c}{L} \frac{L^3(t - t_0)^3}{3!},$$

und induktiv:

$$|u^{k+1}(t) - u^k(t)| \leq L \int_{t_0}^t \max_{t_0 \leq r \leq t_0+s} |u^k(r) - u^{k-1}(r)| ds \leq L \int_{t_0}^t \frac{c}{L} \frac{L^k (s-t_0)^k}{k!} ds \leq \frac{c}{L} \frac{L^{k+1} (t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Also gilt für $k > l \geq 1$:

$$\begin{aligned} |u^k(t) - u^l(t)| &\leq \sum_{j=l+1}^k |u^j(t) - u^{j-1}(t)| \leq \frac{c}{L} \sum_{j=l+1}^k \frac{(L(t-t_0))^j}{j!} \\ &\leq \frac{c}{L} \sum_{j=l+1}^k \frac{(LT)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Für hinreichend große l wird die Summe beliebig klein und die Folge $(u^k(t))_k$ ist damit für jedes $t \in (t_0, t_0 + T]$ eine CAUCHY-Folge in \mathbb{R}^n und damit konvergent mit einem Grenzwert, den wir $u(t)$ nennen. Damit gilt also $u^k \rightarrow u$ punktweise auf $[t_0 - \tau, t_0 + T]$, und die Konvergenz ist auch gleichmäßig, da die obige Summe gar nicht mehr von t abhängt. Demzufolge ist auch die Grenzfunktion u stetig und nach Definition der Grenzwert der u^k im Raum $X = C^0([t_0 - \tau, t_0 + T]; \mathbb{R}^n)$.

Ferner gilt für alle $t \in (t_0, t_0 + T]$

$$|f(t, u_t^k) - f(t, u_t)| \leq L \|u_t^k - u_t\|_0 \leq L \max_{t_0 \leq s \leq t_0+T} |u^k(s) - u(s)| =: \delta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

wobei die δ_k von t unabhängig sind, also $f(\cdot, u^k) \rightrightarrows f(\cdot, u)$ auf $[t_0, t_0 + T]$. Diese gleichmäßige Konvergenz der Integranden sichert nun auch die Konvergenz der Integrale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, u_s^k) ds = \int_{t_0}^t f(s, u_s) ds.$$

Gehen wir nun in der rekursiven Definition der u^k auf beiden Seiten zum Grenzwert über, so erhalten wir für $t \in (t_0, t_0 + T]$

$$u(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u^{k+1}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, u_s^k) ds \right) = \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, u_s) ds, \quad (4.2.4)$$

also erfüllt die Grenzfunktion u tatsächlich die Gleichung (4.2.1), die wir als zu (4.1.6) äquivalent erkannt hatten. Da sie außerdem wie alle u^k nach Konstruktion die Anfangsbedingungen (3.3.6) erfüllt, handelt es sich tatsächlich um eine Lösung, welche auch in der Kugel B liegt. \square

Wir kommen nun nahtlos zum versprochenen Eindeutigkeitssatz.

Satz 4.7. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.6 ist die Lösung u des Anfangswertproblems zu wie dort gegebenem $\phi \in C$ eindeutig und falls die eindeutige Lösung zu beliebigen anderen Anfangsbedingungen $\psi \in C$ mit $\|\psi\|_0 \leq m$ mit v bezeichnet wird, so gilt*

$$\max_{t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + T} |u(t) - v(t)| \leq \|\phi - \psi\|_0 e^{LT}, \quad (4.2.5)$$

wobei L die LIPSCHITZ-Konstante von f zum Intervall $[t_0 - \tau, t_0 + T]$ und der Schranke $M = 2m$ ist.

Bemerkung 4.8. *Mit $\psi = 0$ ergibt sich aus (4.2.5) insbesondere eine exponentielle Wachstumsbeschränkung für die Lösung, selbst für sehr stark oszillierende und mit Spitzen versehene Anfangsbedingungen (solange sie nur stetig sind).*

Beweis. (des Satzes)

Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, das Anfangswertproblem zu Anfangsbedingungen ϕ habe eine weitere Lösung $\tilde{u} : [t_0 - \tau, t_0 + \tilde{T}] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass $u = \tilde{u}$ auf $[t_0 - \tau, t_0 + \min\{\tilde{T}, T\}]$ ist.

Zunächst ist $|\tilde{u}(t)| \leq 2m$ für alle $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \min\{\tilde{T}, T\}]$. Für $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ ist das wegen der Anfangsbedingungen klar. Angenommen, die Beschränkung gelte nicht auf ganz $(t_0, t_0 + \min\{\tilde{T}, T\})$, dann existierte wegen der Stetigkeit von \tilde{u} ein $t_1 \in (t_0, t_0 + \min\{\tilde{T}, T\})$ (insbesondere $t_1 < t_0 + T$) derart, dass $|\tilde{u}(t)| \leq 2m$ für $t < t_1$, $|\tilde{u}(t_1)| = 2m$.

Eingesetzt in die zu (4.1.6) äquivalente Integralgleichung (4.2.1) gilt dann aber

$$2m = |\tilde{u}(t_1)| = \left| \phi(0) + \int_{t_0}^{t_1} f(s, \tilde{u}_s) ds \right| \leq m + \int_{t_0}^{t_1} c ds = m + c(t_1 - t_0) < m + cT = 2m.$$

Aus der Absurdität dieser Ungleichung schließen wir, dass die Annahme, $|\tilde{u}|$ könnte größer als $2m$ werden, falsch war.

Da wir nun zu jeder solchen Lösung die Abschätzung gegen $2m$ gezeigt haben, können wir zum Beweis von (4.2.5) schreiten, aus der wir mit $\phi = \psi$ die Übereinstimmung von u und \tilde{u} und damit die Eindeutigkeit folgern.

Zunächst nehmen wir (da wir die Eindeutigkeit noch nicht gezeigt haben) als u und v die wie im Beweis zu Satz 4.6 konstruierten Lösungen mit dem von den konkreten Anfangswerten unabhängigen T . Da beide Lösungen u und v ihre jeweilige Integralgleichung (4.2.1) erfüllen müssen, können wir aus Subtraktion dieser Integralgleichungen voneinander für $t \in (t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &\leq |\phi(0) - \psi(0)| + \int_{t_0}^t |f(s, u_s) - f(s, v_s)| \, ds \leq \|\phi - \psi\|_0 + L \int_{t_0}^t \|u_s - v_s\| \, ds \\ &\leq \|\phi - \psi\|_0 + L \int_{t_0}^t \max_{t_0 - \tau \leq r \leq s} |u(r) - v(r)| \, ds \end{aligned}$$

folgern.

Nun bezeichnen wir mit $w : [t_0, t_0 + T] \rightarrow [0, \infty)$ die offensichtlich monoton wachsende Funktion

$$w(s) := \max_{t_0 - \tau \leq r \leq s} |u(r) - v(r)|$$

und lesen an der letzten Ungleichung

$$w(t) \leq \|\phi - \psi\|_0 + L \int_{t_0}^t w(s) \, ds \quad \text{für } t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

ab, woraus wir mittels der GRONWALL-Ungleichung (Lemma 1.6)

$$w(t) \leq \|\phi - \psi\|_0 \exp(L(t - t_0)) \leq \|\phi - \psi\|_0 \exp(LT)$$

folgern. Das ist aber gerade die Ungleichung (4.2.5) für $t \in (t_0, t_0 + T]$.

Für $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ gilt diese ohnehin, denn dort ist

$$|u(t) - v(t)| = |\phi(t + t_0) - \psi(t + t_0)| \leq \|\phi - \psi\|_0 e^0 \leq \|\phi - \psi\|_0 e^{LT}.$$

□

Korollar 4.9. Falls $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und global LIPSCHITZ-stetig ist, d.h., für festes $L \geq 0$ gilt

$$|f(t, v) - f(t, w)| \leq L \|v - w\|_0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, v, w \in C,$$

dann besitzt das Anfangswertproblem (4.1.11) für beliebige $\phi \in C$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $u : [t_0 - \tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, die auf jedem beschränkten Intervall $[t_0 - \tau, t_0 + T]$ die Abschätzung (4.2.5) mit der nunmehr globalen LIPSCHITZkonstante L erfüllt.

Beweis. In diesem Fall ist die Beschränkung von T gegen $\frac{m}{c}$ im Beweis von Satz 4.6 unnötig (man kann schließlich $m = \infty$ setzen). Wir können dann wieder schrittweise die eindeutige Lösung u auf Intervallen $(t_0, t_0 + \tau]$, $(t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ usw. konstruieren und erhalten eine eindeutige globale Lösung auf $[t_0 - \tau, \infty)$.

Das Nachrechnen der Ungleichung erfolgt genau wie im Beweis des Satzes. □

Bemerkung 4.10. (i) Analog zum Satz von PEANO für gewöhnliche Differenzialgleichungen gibt es für stetige f , die keiner lokalen LIPSCHITZ-Bedingung genügen, auch für DDE einen Existenzsatz, der aber keine Eindeutigkeit mehr garantiert. Für solche f lässt sich anders als oben keine Kontraktion für hinreichend kleine Zeiten mehr konstruieren. Stattdessen benutzt man zum Beweis den Fixpunktsatz von SCHAUDER, der auf einem Kompaktheitsargument beruht, aber nur noch die Existenz eines Fixpunkt und nicht mehr dessen Eindeutigkeit garantiert.

Bevor wir zu einer Erweiterung des Positivitätssatzes 3.7 für diskret verzögerte auf verteilt verzögerte Gleichungen kommen, wird es höchste Zeit für ein kurzes Beispiel.

Beispiel 4.11. 1. Dabei handelt es sich um ein Modell für ein Neuron, das sich selbst erregende oder hemmende Stimuli sendet und diese Eingangssignale in nichtlinearer Weise bis zu einem maximalen Wert B sammelt. Die sich dadurch aufbauende Erregung wird durch zur Erregung selbst

proportionale Leckströme ständig wieder abgebaut. Die entsprechende Gleichung für die (Abweichung der) Membranspannung (vom Ruhepotential) lautet

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + B \tanh \left(\int_{t-\tau}^t u(s) ds \right). \quad (4.2.6)$$

In diesem Modell gibt es keine weiteren Signaleingänge (diese wären durch einen zusätzlichen explizit zeitabhängigen Summanden realisiert), aber man kann sich vorstellen, die Anfangsbedingungen ϕ beschreiben die anfängliche, dem Neuron für mindestens eine Dauer τ von außen aufgeprägte Erregung und die Lösung des Anfangswertproblems beschreibe dann den weiteren Verlauf der Erregung nach dieser spezifischen Stimulation.

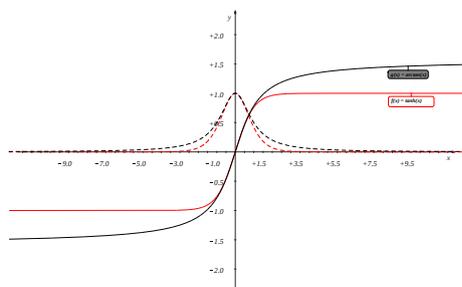


Abbildung 4.1: Graphen der Funktionen \tanh (rot) und \arctan (schwarz) zusammen mit ihren Ableitungen (gestrichelt).

Im Rahmen unserer Theorie entspricht das der Gleichung (4.1.6) mit $n = 1$ und nicht explizit zeitabhängigem

$$f(v) = -Av(0) + B \tanh \left(\int_{-\tau}^0 v(s) ds \right).$$

Da die Ableitung des \tanh gerade

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

lautet und zwischen 0 und 1 liegt, ist die Funktion f global LIPSCHITZ-stetig mit LIPSCHITZ-konstante $L = A + \tau B$. Für $v, w \in C$ ist nämlich

$$\begin{aligned} |f(v) - f(w)| &\leq A|v(0) - w(0)| + B \left| \tanh \int_{-\tau}^0 v(s) ds - \tanh \int_{-\tau}^0 w(s) ds \right| \\ (MWS) \quad &= A|v(0) - w(0)| + B |\tanh'(\xi)| \left| \int_{-\tau}^0 v(s) ds - \int_{-\tau}^0 w(s) ds \right| \\ &\leq A\|v - w\|_0 + B \int_{-\tau}^0 |v(s) - w(s)| ds \leq (A + B\tau)\|v - w\|_0. \end{aligned}$$

Damit sind alle obigen Sätze inklusive der Abschätzung (4.2.5) auf dieses Modell anwendbar und wir haben zu gegebenen stetigen Anfangsbedingungen eine eindeutige Lösung.

Statt des hyperbolischen Tangens hätte man auch den Arcustangens nehmen können. Für kleine Stimulationen (d.h., kleine Werte des Integrals) ergibt sich dann kaum ein Unterschied, allerdings saturiert der Antrieb dann langsamer. Welche konkrete Form von f gewählt wird, entscheidet man üblicherweise anhand von Messungen.

2. Das bereits aus der Einführung als (1.1.4) bekannte Beispiel der verteilt verzögerten logistischen Gleichung mit Kern $k(t) = \chi_{[0, \tau]}$

$$\dot{u}(t) = \gamma u(t) \left(1 - \frac{1}{K\tau} \int_{t-\tau}^t u(s) ds \right) \quad (4.2.7)$$

mit

$$f(v) = \gamma v(0) \left(1 - \frac{1}{K\tau} \int_{-\tau}^0 v(s) ds \right)$$

entspricht auch unserem Schema, allerdings ist f nun nur noch lokal LIPSCHITZ-stetig. Das gleiche gilt für beliebige beschränkte (nicht negative) und stetige Kerne k , deren Träger in $[0, \tau]$ enthalten (und nicht leer) sind. Da die Lösung unter bestimmten Bedingungen jedoch zwischen 0 und K beschränkt bleibt, sofern die Anfangsbedingungen zwischen diesen beiden Werten liegen, ist

dies jedoch in vielen Anwendungen unproblematisch. Für sehr große Populationsdichten u liefert dieses Modell ohnehin keine geeignete Beschreibung der Evolution der Population, vollkommen unabhängig davon, ob eine Verzögerung vorliegt oder nicht.

Bemerkung 4.12. *Unter den Bedingungen von Satz 4.6 nehmen wir an, dass die Anfangsbedingungen ϕ nicht negativ sind in dem Sinn, dass für $i = 1, \dots, n$ und $t \in [-\tau, 0]$ $\phi_i(t) \geq 0$ gilt und fordern, falls $\phi_j(0) = 0$ für gewisse j ist, ferner $f_j(t, \phi) \geq 0$ für alle $t \in I$. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (4.1.11) mit diesen Anfangsbedingungen nicht negativ in dem Sinn, dass für alle $t \in [t_0 - \tau, t_0 + T]$ und $i = 1, \dots, n$ die Lösung $u_i(t) \geq 0$ erfüllt.*

Bisher haben wir die Lösung für Gleichungen mit lokal LIPSCHITZ-stetigem f nur für Zeiten $T \leq \tau$ gefunden (vgl. Beweis zu Satz 4.6). Das ist in der Regel aber eine pessimistische Abschätzung (wie Korollar 4.9 bereits andeutet). Unser Ziel ist es daher wieder, eine maximale Lösung zu konstruieren. Dazu stellen wir zunächst fest, dass die Lösung für Bedingung 4.2 erfüllende rechte Seiten f stets eindeutig bleibt, solange sie überhaupt existiert.

Lemma 4.13. *Falls $u : [t_0 - \tau, t_0 + T_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $v : [t_0 - \tau, t_0 + T_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ („= „oder „), $T_1, T_2 \in (0, \infty]$ Lösungen des Anfangswertproblems (4.1.11) mit f gemäß Bedingung 4.2 und stetigem ϕ sind, so gilt $u = v$ auf $[t_0 - \tau, t_0 + T_1] \cap [t_0 - \tau, t_0 + T_2]$.*

Beweis. (Idee)

Wie im Beweis von Satz 4.7 zeigen wir eine zu (4.2.5) analoge Abschätzung für alle Zeiten, für welche die Lösungen existieren, indem wir im Fall $\min\{T_1, T_2\} > \tau$ wieder in Schritten der Länge τ integrieren. Dabei können wir zu den Anfangszeiten $t_0, t_1 = t_0 + \tau, \dots, t_k = t_0 + k\tau, \dots$ immer die auf $[t_k - \tau, t_k]$ stetigen und dort (induktiv) miteinander übereinstimmenden Lösungen als Anfangswerte für das neue Anfangswertproblem zu t_k nehmen und finden dann jeweils die Abschätzung

$$|u(t) - v(t)| \leq 0 \exp(L_k(t - t_k)) \quad \text{für } t \in (t_k, t_{k+1}].$$

Das funktioniert beliebig oft, falls $T_1 = T_2 = \infty$ oder bis das kleinere der beiden oberen Intervallenden erreicht ist. \square

Wie auch schon für diskret verzögerte Gleichungen finden wir wieder eine eindeutige globale Lösung $u : [t_0 - \tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ oder aber ein $T_{max} > 0$, über welches hinaus die Lösung nicht existiert. Im letzteren Fall muss das maximale Existenzintervall wieder rechtsseitig offen sein, da eine auf $[t_0 - \tau, t_0 + T_{max}]$ stetige Lösung u dort beschränkt wäre und wir $u_{T_{max}}$ als Anfangsdatum für ein Anfangswertproblem in T_{max} nehmen und die Lösung damit gemäß Satz 4.6 über T_{max} hinaus fortsetzen könnten. Eine Ausnahme bilden Systeme, bei denen f nicht global definiert ist, also etwa $f : [a, b] \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$. In diesem Fall kann das maximale Existenzintervall selbstverständlich die Form $[t_0 - \tau, b]$ haben. Dort bricht dann aber nicht etwa die Lösung, sondern nur die Beschreibung des Problems zusammen.

Erneut stellen wir fest, dass für global definiertes $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Lösung nur nach endlicher Zeit $T_{max} < \infty$ aufhören kann zu existieren, wenn sie für $t \rightarrow t_0 + T_{max}$ ins Unendliche strebt. Diese Erkenntnisse fassen wir zusammen.

Satz 4.14. *Falls $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Bedingung 4.2 erfüllt, dann gibt es zu beliebigen $\phi \in C$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ ein $T_{max} \in (0, \infty]$ derart, dass das Anfangswertproblem (4.1.11) für alle $T \in (0, T_{max})$ eine eindeutige Lösung auf $[t_0 - \tau, t_0 + T]$, jedoch (im Fall $T_{max} < \infty$) keine Lösung auf $[t_0 - \tau, t_0 + T_{max}]$ besitzt. In letzterem Fall gilt für die maximale (d.h., nicht fortsetzbare) Lösung u*

$$\lim_{t \nearrow t_0 + T_{max}} \|u_t\|_0 = \infty.$$

Beweis. Wir beweisen nur noch die letzte Aussage, alles übrige haben wir bereits diskutiert. Angenommen es existiere eine monoton wachsende Folge von Zeiten mit $T_k \nearrow T_{max}$ derart, dass für ein $c_1 \geq 0$

$$\|u_{t_0 + T_k}\|_0 \leq c_1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

ist, also $|u(t)| \leq c_1$ für $t \in [t_0 + T_k - \tau, t_0 + T_k] =: I_k$.

Die Monotonie der T_k und ihre Beschränktheit nach oben durch T_{max} sichern die Existenz eines $K \in \mathbb{N}$ derart, dass $0 \leq T_{k+1} - T_k < \tau$ für alle $k \geq K$ und dann ist wegen der Konvergenz $T_k \rightarrow T_{max}$

$$\bigcup_{k=K}^{\infty} I_k = [t_0 + T_K - \tau, t_0 + T_{max}) =: I_{\infty}.$$

Wegen der Stetigkeit von u ist diese auch auf $[t_0 - \tau, t_0 + T_k - \tau]$ beschränkt, also $|u(t)| \leq c_2$ auf $I_{max} = [t_0 - \tau, t_0 + T_{max}]$ für ein $c_2 \geq c_1$ und damit wie in Lemma 4.5 für ein $c \geq 0$

$$|\dot{u}(t)| \leq |f(t, u_t)| \leq c \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + T_{max}]$$

Als Funktion mit beschränkter Ableitung ist u damit gleichmäßig stetig auf $[t_0, t_0 + T_{max}]$ und kann durch den notwendigerweise existierenden Grenzwert

$$u(t_0 + T_{max}) := \lim_{t \nearrow t_0 + T_{max}} u(t)$$

stetig auf das abgeschlossene Intervall $[t_0 - \tau, t_0 + T_{max}]$ fortgesetzt werden. Da u auf $[t_0, t_0 + T_{max}]$ die Integralgleichung (4.2.1) erfüllt und auf $[t_0, t_0 + T_{max}]$ stetig ist, ergibt der Limes $t \nearrow t_0 + T_{max}$ in (4.2.1), dass diese auch auf dem abgeschlossenen Intervall erfüllt ist.

Damit wäre die so gefundene Fortsetzung von u aber eine stetige Lösung des Anfangswertproblems auf dem abgeschlossenen Intervall $[t_0 - \tau, t_0 + T_{max}]$ im Widerspruch zur notwendigen Offenheit des maximalen Existenzintervalls. \square

Zur Lösbarkeit rückwärts in der Zeit bemerken wir, dass für die Existenz einer stetigen Lösung auf $[t_0 - \tau - \varepsilon, t_0]$ (zunächst für $\varepsilon \leq \tau$) die Anfangsbedingungen ϕ auf $[-\varepsilon, 0]$ stetig differenzierbar sein müssen und zur Erfüllung der Gleichung (4.1.6) in $t = t_0$

$$\phi'(0) \stackrel{!}{=} \dot{u}(t_0) = f(t_0, \phi)$$

gelten muss.

Diese Kompatibilitätsbedingungen erinnern an die für diskret verzögerte lineare Gleichungen diskutierten und stimmen für solche tatsächlich mit diesen überein, wie man sich leicht im Rahmen einer *Übungsaufgabe* durch Umformulieren der linearen Gleichung (3.3.2) in die Form (4.1.6) überzeugt.

Leider sind diese Bedingungen noch nicht hinreichend für die Lösbarkeit auf irgendeinem Intervall $[t_0 - \tau - \varepsilon, t_0]$ und hinreichende Bedingungen für zeitabhängiges f sind von maßtheoretischer Natur und ohne entsprechende Vorkenntnisse nur schwer zu erfassen. Wir werden sie hier daher nicht ausführen.

Allerdings kennen wir schon Probleme zur Genüge, die rückwärts lösbar sind. Ist nämlich $u : [t_0 - \tau, t_0 + T_{max}]$ die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems (4.1.11), so löst automatisch $u|_{[t_0 - \tau, t_0 + T]}$ für jedes $T \in (0, T_{max})$ das Anfangswertproblem in $t_0 + T$ mit Anfangswerten $u_{t_0 + T}$ rückwärts.

4.3 Gleichgewichtslösungen und Stabilität

Weitere auf ganz \mathbb{R} definierte Lösungen sind natürlich Gleichgewichts- oder periodische Lösungen. Erstere wollen wir nun diskutieren.

Definition. Ein *Gleichgewichtspunkt* der Gleichung (4.1.6) mit $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine konstante Funktion $u^* = u^* \chi_{[-\tau, 0]} \in C$, gegeben durch $u(t) \equiv u^* \in \mathbb{R}^n$ für $t \in [-\tau, 0]$, wobei $f(t, u^*) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Im folgenden bezeichnen wir oft auch u^* selbst als Gleichgewichtspunkt, erinnern uns aber stets daran, dass es sich um eine Funktion auf $[-\tau, 0]$ handelt.

Ein Gleichgewichtspunkt u^* ist *stabil*, wenn zu beliebigen $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, dass für alle $\phi \in C$ mit $\max_{-\tau \leq s \leq 0} |\phi(s) - u^*| < \delta$ die (dann notwendig globale) Lösung $u : [t_0 - \tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (4.1.11) $|u(t) - u^*| < \varepsilon$ für alle $t \geq t_0 - \tau$ erfüllt. Andernfalls heißt u^* *instabil*. Der Gleichgewichtspunkt u^* heißt *asymptotisch stabil*, falls er stabil ist und zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ ein $\beta > 0$ derart existiert, dass für alle $\phi \in C$ mit $\|\phi - u^*\|_0 < \beta$ die Lösung des Anfangswertproblems (4.1.11) $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^*$ erfüllt.

Bemerkung 4.15. *Stabilität kann man auch für globale Lösungen untersuchen, die keine Gleichgewichtspunkte sind. Ist genauer $u : [t_0 - \tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems (4.1.11) zu Anfangsbedingungen ϕ , so wird diese Lösung als stabil bezeichnet, wenn für alle Anfangswerte ψ , die sich nur wenig (in C) von ϕ unterscheiden, die Lösungen der entsprechenden Anfangswertprobleme nahe bei u bleiben. Wenn zusätzlich für hinreichend nah bei ϕ liegende Anfangsbedingungen die zugehörigen Lösungen v gegen u (im Sinne von $v(t) - u(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$) konvergieren, so heißt u asymptotisch stabil.*

Diese Bedingungen an u sind äquivalent zur Stabilität der Nulllösung für die Gleichung

$$\dot{w}(t) = f(t, w_t + u_t) - f(t, u_t) =: f^{(u)}(t, w_t). \quad (4.3.1)$$

Typischerweise sind Gleichgewichtslösungen oder für bezüglich t periodische f mit Periode p auch p -periodische Lösungen von besonderem Interesse und werden auf Stabilität untersucht. Wir wollen uns hier mit Gleichgewichtslösungen u^* autonomer Systeme

$$\dot{u} = f(u_t) \quad (4.3.2)$$

befassen.

Nun nehmen wir an, $u : [-\tau, \infty)$ sei irgendeine Lösung dieser Gleichung zu Anfangswerten $\phi \in C$ und führen die Differenz $v(t) := u(t) - u^*$ (für $t \in [-\tau, \infty)$) dieser Lösung zum Gleichgewichtspunkt u^* ein. Diese erfüllt durch Einsetzen in (4.3.2)

$$\dot{v}(t) = \dot{u}(t) - 0 = f(u^* + v_t). \quad (4.3.3)$$

Weiter nehmen wir an, dass f von der Form

$$f(\psi) = L(\psi) + r(\psi) \quad (4.3.4)$$

mit einer beschränkten (d.h., stetigen), linearen Abbildung $L : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, d.h.,

$$\|L\|_{\mathcal{L}} := \sup_{\phi \in C \setminus \{0\}} \frac{|L(\phi)|}{\|\phi\|_0} \equiv \sup_{\phi \in C, \|\phi\|_0=1} |L(\phi)| < \infty \quad (4.3.5)$$

und einem Rest r höherer Ordnung, d.h.,

$$\lim_{\|\phi\|_0 \rightarrow 0} \frac{r(\phi)}{\|\phi\|_0} = 0. \quad (4.3.6)$$

Nun betrachten wir als Approximation der vollen Gleichung ihre Linearisierung

$$\dot{v}(t) = L(v_t) \quad (4.3.7)$$

um den Gleichgewichtspunkt u^* . Diese Gleichung betrachten wir nun im Raum $C_c = C^0([-\tau, 0]; \mathbb{C}^n)$. Die Beschränktheit des linearen Operators L liefert sofort die globale LIPSCHITZ-Bedingung

$$|L(\phi) - L(\psi)| = |L(\phi - \psi)| \leq \|L\|_{\mathcal{L}} \|\phi - \psi\|_0, \quad (4.3.8)$$

welche die eindeutige globale Lösbarkeit des Anfangswertproblems zu (4.3.7) für beliebige stetige Anfangsbedingungen garantiert.

Analog zum Fall linearer Gleichungen mit diskreter Verzögerung rechnen wir schnell nach, dass für die Lösungen von (4.3.7) ein Superpositionsprinzip gilt. Sind nämlich $\phi, \psi \in C_c$ Anfangsbedingungen und sind u, v die Lösungen der Anfangswertprobleme zu (4.3.7) mit Anfangswerten $u = \phi$ bzw. $v = \psi$ auf $[-\tau, 0]$, so ist die Lösung zu Anfangswerten $\alpha\phi + \beta\psi$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) durch $\alpha u + \beta v$ gegeben. Die Annahme der Anfangswerte ist offensichtlich, und dass die Linearkombination von Lösungen von (4.3.7) wieder eine Lösung ist, folgt aus der Linearität von L .

Wieder interessieren wir uns vor allem für Lösungen der Form $v(t) = e^{\lambda t} \eta$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\eta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Notation. Zu gegebenem $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir die Funktion $\mathcal{E}_\lambda \in C^0([-\tau, 0]; \mathbb{C})$ durch $\mathcal{E}_\lambda(s) = e^{\lambda s}$ für $s \in [-\tau, 0]$.

Für unsere als $v(t) = e^{\lambda t} \eta$ angenetzte Lösung ist dann $v_t \in C_c$ durch

$$v_t(s) = \exp(\lambda(t+s)) \eta = e^{\lambda t} \mathcal{E}_\lambda(s) \eta,$$

also $v_t = e^{\lambda t} \eta \mathcal{E}_\lambda$ gegeben.

Eingesetzt in die Gleichung (4.3.7) erhalten wir

$$\lambda e^{\lambda t} \eta = \dot{v}(t) \stackrel{!}{=} L(v_t) = e^{\lambda t} L(\eta \mathcal{E}_\lambda)$$

oder einfach

$$\lambda \eta = L(\eta \mathcal{E}_\lambda). \quad (4.3.9)$$

Den Vektor η schreiben wir als $\eta = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j$ und können nun

$$L(\eta \mathcal{E}_\lambda) = \sum_{j=1}^n \eta^j L(e_j \mathcal{E}_\lambda)$$

schreiben, was uns motiviert die Matrix L_λ einzuführen, deren Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte durch $(L(e_j \mathcal{E}_\lambda))^i =: L^i(e_j \mathcal{E}_\lambda)$ gegeben ist. Diese Matrix ist nun völlig unabhängig von η , erlaubt uns aber $L(\eta \mathcal{E}_\lambda)$ als

$$\begin{pmatrix} (L(\eta \mathcal{E}_\lambda))^1 \\ \vdots \\ (L(\eta \mathcal{E}_\lambda))^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n L^1(e_j \mathcal{E}_\lambda) \eta^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n L^n(e_j \mathcal{E}_\lambda) \eta^j \end{pmatrix} = L_\lambda \eta$$

darzustellen.

Die Einträge der Matrix L_λ sind zu gegebenem λ typischerweise Integrale oder ähnliche lineare Funktionale der Funktion \mathcal{E}_λ , also für gegebenes L tatsächlich zu berechnende Zahlen. Wir wollen uns das an einem kurzen Beispiel verdeutlichen.

Beispiel 4.16. Wir betrachten die lineare Gleichung aus Beispiel 2 in 4.1, die durch den linearen Operator

$$L(v) = Av(0) + \int_{-\tau}^0 K(s)v(s) ds$$

beschrieben ist. Dabei war $A = (a_j^i)$ eine konstante $n \times n$ -Matrix und K eine stetige $\mathbb{R}^{n \times n}$ -wertige Funktion mit Einträgen $k_j^i(s)$. Die Einträge von L_λ sind also

$$L^i(e_j \mathcal{E}_\lambda) = (Ae_j e^{\lambda 0})^i + \int_{-\tau}^0 (K(s)e_j e^{\lambda s})^i ds = a_j^i + \int_{-\tau}^0 k_j^i(s) e^{\lambda s} ds.$$

Die Berechnung von L_λ für den speziellen Fall $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \left(\frac{s}{\tau} + 1\right) \\ \beta \left(\frac{s}{\tau} + 1\right) & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine leichte Übungsaufgabe.

Gleichung (4.3.9) wird unter Verwendung von L_λ zu

$$\lambda \eta = L_\lambda \eta$$

und hat eine nicht triviale Lösung η , falls λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\zeta(\lambda) := \det(\lambda \mathbb{I} - L_\lambda) = 0 \tag{4.3.10}$$

Glücklicherweise verhalten sich die Lösungen der charakteristischen Gleichung denen der einfachen Gleichung (3.3.12) ganz ähnlich, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 4.17. Die charakteristische Funktion ζ ist eine ganze Funktion und ihre Nullstellen sind daher isoliert, von endlicher Vielfachheit, und es gibt höchstens abzählbar viele solche.

Beweis. Die Aussagen über die Eigenschaften der Nullstellenmenge ganzer Funktionen finden sich in jedem Buch über Funktionentheorie.

Die Determinante selbst ist analytisch in den Einträgen der Matrix, wir müssen also nur zeigen, dass alle Funktionen

$$h : \lambda \mapsto L^i(e_j \mathcal{E}_\lambda)$$

auf der gesamten komplexen Ebene analytisch sind. Dazu betrachten wir den Differenzenquotienten im beliebigen Punkt $\lambda_0 \in \mathbb{C}$

$$\delta h(\lambda_0, \lambda) = \frac{h(\lambda_0 + \lambda) - h(\lambda_0)}{\lambda} \stackrel{(\text{Lin.})}{=} \frac{L^i((\mathcal{E}_{\lambda_0 + \lambda} - \mathcal{E}_{\lambda_0})e_j)}{\lambda} = L^i(\mathcal{E}_{\lambda_0} g_\lambda e_j),$$

mit

$$g_\lambda(s) := \frac{e^{\lambda s} - 1}{\lambda} \quad (s \in [-\tau, 0]),$$

wobei wir

$$\frac{\mathcal{E}_{\lambda_0 + \lambda}(s) - \mathcal{E}_{\lambda_0}(s)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} (e^{(\lambda_0 + \lambda)s} - e^{\lambda_0 s}) = e^{\lambda_0 s} \frac{e^{\lambda s} - 1}{\lambda} = \mathcal{E}_{\lambda_0}(s) g_\lambda(s)$$

benutzt haben. Für $\lambda \rightarrow 0$ konvergieren die g_λ gleichmäßig (auf $[-\tau, 0]$) gegen die Identität id . Daher konvergiert der Differenzenquotient für $\lambda \rightarrow 0$ gegen

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \delta h(\lambda_0, \lambda) = L^i(\mathcal{E}_{\lambda_0} \text{id} e_j),$$

welches wir damit als Ableitung von h im Punkt λ_0 identifiziert haben. Dass dieses stetig von λ_0 abhängt, folgt aus der Stetigkeit der Abbildung $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda$ als Abbildung von \mathbb{C} nach C_c und der Stetigkeit von L^i . Damit ist h (in jedem $\lambda_0 \in \mathbb{C}$) stetig differenzierbar und damit notwendigerweise analytisch. \square

Erneut können wir sogar zeigen, dass in jeder rechten Halbebene nur endlich viele Lösungen der charakteristischen Gleichung liegen.

Lemma 4.18. *Zu jedem $\sigma \in \mathbb{R}$ existieren höchstens endlich viele Nullstellen λ von ζ mit $\operatorname{Re} \lambda > \sigma$. Insbesondere existiert $\sigma_0 = \max_{\zeta(\lambda)=0} \operatorname{Re} \lambda$.*

Beweis. Wie bereits im Beweis von Lemma 3.18 zeigen wir, dass für den Fall unendlich vieler verschiedener Lösungen λ_k ($k \in \mathbb{N}$) diese $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \lambda_k = -\infty$ gilt. Daraus folgt dann sofort die Behauptung.

Angenommen, wir hätten eine Folge (λ_k) von Lösungen, die $\operatorname{Re} \lambda_k \geq \sigma$ für ein $\sigma \in \mathbb{R}$ erfüllen. Da sich die Lösungen nicht häufen können, gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$. Wir nehmen an, dass keines der λ_k gleich Null ist, andernfalls lassen wir dieses weg und der Rest ist immer noch eine unendliche Folge von Lösungen. Wegen $\det(\lambda_k \mathbb{I} - L_{\lambda_k}) = 0$ ist für alle k auch $A_k := \mathbb{I} - \frac{1}{\lambda_k} L_{\lambda_k}$ singulär, d.h., $\det A_k = 0$. Nun ist aber für beliebiges $\eta \in \mathbb{C}^n$

$$|L(\eta \mathcal{E}_{\lambda_k})| \leq \|L\|_{\mathcal{L}} \|\eta \mathcal{E}_{\lambda_k}\|_0 \leq \|L\|_{\mathcal{L}} |\eta| \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |e^{\lambda_k \tau}| \leq \|L\|_{\mathcal{L}} |\eta| \max_{-\tau \leq s \leq 0} e^{\sigma s},$$

also ist die Matrixnorm von L_{λ_k} unabhängig von k durch

$$\|L_{\lambda_k}\| \leq \|L\|_{\mathcal{L}} e^{|\sigma| \tau}$$

beschränkt. Wegen $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ folgt daraus, dass $\frac{1}{\lambda_k} L_{\lambda_k} \rightarrow 0$ in $\mathbb{C}^{n \times n}$ und damit wegen der Stetigkeit der Determinante

$$1 = \det \mathbb{I} = \lim_{k \rightarrow \infty} \det \left(\mathbb{I} - \frac{1}{\lambda_k} L_{\lambda_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

ein Widerspruch. Also kann eine solche Folge von Lösungen nicht existieren. \square

Nun erinnern wir uns daran, dass wir unseren Operator L als Erweiterung eines \mathbb{R}^n -wertigen Operators auf C erhalten haben. Das hat zur Folge, dass die Lösungen der charakteristischen Gleichung in komplex konjugierten Paaren auftreten.

Lemma 4.19. *Falls $L(C) \subset \mathbb{R}^n$ gilt, so ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann eine Lösung der charakteristischen Gleichung (4.3.10), wenn $\bar{\lambda}$ eine solche ist.*

Beweis. Wegen der Linearität von L gilt für beliebiges $v \in C_c$, welches wir als $v = \phi + \iota\psi$ mit $\phi, \psi \in C$ schreiben,

$$L(\bar{v}) = L(\phi - \iota\psi) = L(\phi) - \iota L(\psi) = \overline{L(\phi) + \iota L(\psi)} = \overline{L(\phi + \iota\psi)} = \overline{L(v)}.$$

Da auch die Exponentialfunktion und die komplexe Multiplikation mit der komplexen Konjugation verträglich sind, gilt damit (beachte: $\bar{e}_j = e_j$)

$$L(\mathcal{E}_{\bar{\lambda}} e_j) = L(\overline{\mathcal{E}_{\lambda} e_j}) = \overline{L(\mathcal{E}_{\lambda} e_j)},$$

also komponentenweise $L_{\bar{\lambda}} = \overline{L_{\lambda}}$.

Auch die Determinante respektiert die komplexe Konjugation, und damit gilt für eine Nullstelle λ von ζ

$$0 = \bar{0} = \overline{\det(\lambda \mathbb{I} - L_{\lambda})} = \det(\overline{\lambda \mathbb{I} - L_{\lambda}}) = \det(\bar{\lambda} \mathbb{I} - L_{\bar{\lambda}}),$$

womit auch $\bar{\lambda}$ eine Lösung ist. \square

Wie schon im Fall diskreter Verzögerungen finden wir für die Lösungen der linearisierten Gleichung (4.3.7) eine Abschätzung in Abhängigkeit der Lösungen der charakteristischen Gleichung.

Satz 4.20. *Für jedes*

$$\sigma > \sigma_0 := \max\{\operatorname{Re} \lambda \mid \zeta(\lambda) = 0\}$$

existiert ein $M \geq 0$ derart, dass für die Lösung v des Anfangswertproblems (4.3.7), $v_0 = \phi \in C_c$

$$|v(t)| \leq M e^{\sigma t} \|\phi\|_0 \quad \text{für } t \geq 0 \quad (4.3.11)$$

gilt.

Bemerkung 4.21. (i) *Erneut folgt natürlich sofort die asymptotische Stabilität der Nulllösung für den Fall $\sigma_0 < 0$.*

(ii) *Man beachte, dass die Konstante M in der Behauptung des Satzes nicht von den Anfangsbedingungen abhängt!*

Wir beweisen den Satz an dieser Stelle nicht, bemerken aber, dass die Beweisidee ganz ähnlich ist wie für den entsprechenden Satz 3.29 und die dafür wichtige Abschätzung der Fundamentallösung in Satz 3.26. Allerdings sind die Darstellungen der Lösungen nun nicht mehr so einfach durch LAPLACE-Transformation zu erhalten.

Schließlich wollen wir aber noch den zentralen Satz über die Abschätzung der Stabilität von Gleichgewichtslösungen nichtlinearer Gleichungen durch Untersuchung der linearisierten Gleichung zitieren, dessen Beweis wir aus Zeitgründen leider ebenfalls nicht mehr führen können.

Satz 4.22. Die Funktion $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei von der Form (4.3.4) mit stetigem, linearem L und asymptotisch kleinem Rest r gemäß (4.3.5) bzw. (4.3.6) um eine Gleichgewichtslösung u^* von (4.3.2). Die Lösungen der charakteristischen Gleichung zu (4.3.7) seien derart, dass

$$\sigma_0 = \max_{\zeta(\lambda)=0} \operatorname{Re} \lambda < 0.$$

Dann ist u^* lokal asymptotisch stabil, d.h., es existieren $m, c > 0$ derart, dass für $\phi \in C$ mit $\|\phi - u^*\|_0 < m$ die Lösung u zum Anfangswertproblem mit Anfangsbedingungen ϕ auf $[-\tau, 0]$

$$\|u_t - u^*\|_0 \leq c \|\phi - u^*\|_0 \exp\left(\frac{\sigma_0}{2} t\right)$$

erfüllt.

Falls eine Lösung der charakteristischen Gleichung positiven Realteil hat, so ist u^* als Gleichgewichtspunkt instabil.

Bemerkung 4.23. Wie schon bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen nennt man einen Gleichgewichtspunkt u^* von (4.3.2) hyperbolisch, falls keine Lösung der charakteristischen Gleichung zu (4.3.7) verschwindenden Realteil hat. Für solche Gleichgewichtspunkte können wir also aus der Linearisierung auf die Stabilität schließen.

Schließlich wollen wir uns noch ein paar Beispiele ansehen, die aus verschiedenen Anwendungen stammen.

4.3.1 Einige abschließende Beispiele

Bevor wir zu den Anwendungsbeispielen kommen, ist ein Wort der Warnung angebracht. Wann immer man in Modellen eine Verzögerung vorfindet, handelt es sich üblicherweise um Prozesse, die nicht explizit modelliert werden und im Hintergrund Zeit in Anspruch nehmen. Bei konkreten Anwendungen ist also stets zu entscheiden, ob es sich lohnt, diese Hintergrundprozesse explizit zu modellieren oder ob es genügt, deren Effekt in Form einer Verzögerung in das Modell einzubinden.

Die logistische Gleichung mit verteilter Verzögerung

Als erstes Beispiel betrachten wir die logistische Gleichung mit verzögertem Überfüllungseffekt. Die Gleichung hatten wir schon in der Einführung als (1.1.4), schreiben sie jetzt aber im Rahmen unseres Formalismus zu

$$\dot{u}(t) = \gamma u(t) \left(1 - \frac{2}{K\tau} \int_{t-\tau}^t \left(1 - \frac{t-s}{\tau} \right) u(s) \right) \quad (4.3.12)$$

um. Das hat die Form (4.3.2) mit

$$f(v) = \gamma v(0) \left(1 - \frac{2}{K\tau} \int_{-\tau}^0 \left(1 + \frac{s}{\tau} \right) v(s) ds \right).$$

Diesen Kern $k(s) = 1 + \frac{s}{\tau}$ interpretieren wir derart, dass die durch Ressourcenverbrauch oder Abfallproduktion verringerte Wachstumsrate vom Verhalten der Population innerhalb der zurückliegenden τ Zeiteinheiten abhängt und dieser Effekt mit zunehmender Entfernung zum aktuellen Zeitpunkt linear abnimmt. Dabei sind die Faktoren natürlich derart normiert, dass $u^* \equiv K$ ein Gleichgewichtspunkt des Problems ist:

$$\int_{-\tau}^0 \left(1 - \frac{s}{\tau} \right) K ds = K \left[s + \frac{s^2}{2\tau} \right]_{s=-\tau}^0 = K \left(\tau - \frac{\tau^2}{2\tau} \right) = \frac{K\tau}{2},$$

das heisst, für $u \equiv K$ verschwindet die Klammer in (4.3.12).

Bezeichnen wir nun die Abweichung irgendeiner Lösung u von diesem Gleichgewichtspunkt mit $v(t) := u(t) - u^*$, so stellen wir fest, dass v die Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= \dot{u}(t) = \gamma(v(t) + u^*) \left(1 - \frac{2}{K\tau} \int_{t-\tau}^t \left(1 - \frac{t-s}{\tau}\right) (v(s) + u^*) ds\right) \\ &= -\frac{2\gamma}{K\tau} (v(t) + K) \int_{t-\tau}^t \left(1 - \frac{t-s}{\tau}\right) v(s) ds\end{aligned}\quad (4.3.13)$$

Hier sammeln wir nun die in v linearen Terme und bezeichnen die höheren Terme mit r (Terme nullter Ordnung in v bleiben natürlich nicht übrig, da wir um einen Gleichgewichtspunkt linearisiert hatten):

$$\dot{v}(t) = -\frac{2\gamma}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(1 - \frac{t-s}{\tau}\right) v(s) ds + r(v) = -\frac{2\gamma}{\tau} \int_{-\tau}^0 \left(1 + \frac{s}{\tau}\right) v_t(s) ds + \tilde{r}(v_\tau).$$

Für den auf C stetigen linearen Operator

$$L(\phi) = -\frac{2\gamma}{\tau} \int_{-\tau}^0 \left(1 + \frac{s}{\tau}\right) \phi(s) ds$$

berechnen wir die (1×1) -Matrix L_λ als

$$L_\lambda = L(\mathcal{E}_\lambda) = -\frac{2\gamma}{\tau} \int_{-\tau}^0 \left(1 + \frac{s}{\tau}\right) e^{\lambda s} ds = -\frac{2\gamma}{\tau} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda\tau} - 1}{\lambda^2\tau}\right).\quad (4.3.14)$$

Als charakteristische Gleichung erhalten wir damit

$$0 = \zeta_{\gamma,\tau}(\lambda) = \lambda - L_\lambda = \lambda + \frac{2\gamma}{\tau^2\lambda^2} (\lambda\tau + e^{-\lambda\tau} - 1).\quad (4.3.15)$$

Die charakteristische Funktion (deren Abhängigkeit von τ und γ wir durch die Indizes deutlich gemacht haben, die wir im folgenden oft wieder weglassen werden) sieht nun zunächst einmal gar nicht analytisch aus, da sich in der Null eine Polstelle zu verstecken scheint. Das ist aber trügerisch, wie die Entwicklung der Exponentialfunktion schnell zeigt:

$$\zeta(\lambda) = \lambda + \frac{2\gamma}{\tau^2\lambda^2} \left(\lambda\tau + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\tau)^k}{k!} - 1\right) = \lambda + \frac{2\gamma}{\tau^2\lambda^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-\lambda\tau)^k}{k!} = \lambda + \gamma + 2\gamma \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-\lambda\tau)^{k-2}}{k!}.$$

Wir lesen sofort zweierlei ab. Zum einen degeneriert $\zeta_{\gamma,\tau}$ für $\tau = 0$ zur charakteristischen Funktion der unverzögerten VERHULST-Gleichung, deren einzige Lösung $\lambda = -\gamma < 0$ ist. Zum anderen kann $\lambda = 0$ nie eine Lösung sein, da $\zeta(0) = -\gamma \neq 0$ ist. Da ζ nicht nur von λ , sondern auch von τ analytisch abhängt, ist für kleine $\tau > 0$ also auch keine Lösung mit positivem Realteil zu erwarten, was zu unseren bisherigen Beobachtungen passt, dass hinreichend kleine Verzögerungen nicht dazu neigen, die Stabilität von Gleichgewichtspunkten zu zerstören.

Zu gegeben, nicht unbedingt kleinen, $\gamma, \tau > 0$ suchen wir nun rein imaginäre Nullstellen von $\zeta_{\gamma,\tau}$, also $\lambda = i\eta$ mit reellem η . Das Auftreten solcher für gewisse Kurven in der γ - τ -Ebene liefern uns dann wieder Anhaltspunkte, für welche Parameter wir mit Lösungen positiven Realteils zu rechnen haben.

Da $\lambda = 0$ als mögliche Lösung entfällt, können wir die Gleichung $\zeta(\lambda) = 0$ mit λ^2 durchmultiplizieren und erhalten

$$0 = \lambda^3 + \frac{2\gamma}{\tau^2} (\lambda\tau + e^{-\lambda\tau} - 1),\quad (4.3.16)$$

oder für $\lambda = i\eta$:

$$0 = -i\eta^3 + \frac{2\gamma}{\tau^2} (i\tau\eta + \cos(\tau\eta) - i\sin(\tau\eta) - 1).$$

Von der Gleichung für das Verschwinden des Realteils bleibt nur die Bedingung

$$\cos(\tau\eta) = 1, \quad \text{also } \tau\eta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

übrig, die wir gleich in die Gleichung für den Imaginärteil einsetzen um

$$0 = -\frac{(2k\pi)^3}{\tau^3} + \frac{2\gamma}{\tau^2} (2k\pi - 0), \quad \text{also } \gamma\tau = 2k^2\pi^2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

zu erhalten.

Wir finden also bei gegebenem $\gamma > 0$ genau dann rein imaginäre Lösungen, wenn

$$\tau = \frac{2k^2\pi^2}{\gamma}$$

ist. Diese Lösungen können wir in diesem Fall sogar als

$$\lambda = \pm i \frac{\gamma}{k\pi}$$

explizit angeben.

Insbesondere bleibt also für $\gamma\tau < 2\pi^2$ der Gleichgewichtspunkt $u^* \equiv K$ lokal asymptotisch stabil. Interessanterweise hängt die Bedingung für die Stabilität nicht von K selbst ab.

Ein Populationsmodell mit verzögertem Wettbewerb

Als nächstes Beispiel betrachten wir ein System zweier Spezies im Wettbewerb. Dabei mag es sich etwa um zwei Bakterienstämme handeln, die um einen gemeinsamen Wirt konkurrieren und einander durch Ausscheiden von für die jeweils andere Spezies toxischen Stoffen im Wachstum behindern.

Ohne Verzögerung erhalten wir das System

$$\dot{u}(t) = u(t) \left(\gamma - \gamma \frac{u(t)}{K} - \alpha v(t) \right) = u(t) \Gamma_u(u(t), v(t)) \quad (4.3.17a)$$

$$\dot{v}(t) = v(t) \left(\rho - \rho \frac{v(t)}{M} - \beta u(t) \right) = v(t) \Gamma_v(u(t), v(t)) \quad (4.3.17b)$$

von gewöhnlichen Differenzialgleichungen mit Pro-Kopf-Wachstumsraten Γ_u und Γ_v . Dabei haben wir angenommen, dass beide Spezies logistischem Wachstum unterliegen, wenn man sie allein lässt. Hier sind wie üblich alle Konstanten positiv.

Die JACOBI-Matrix der als $F(u, v)$ bezeichneten rechten Seite im Punkt (u_0, v_0) berechnen wir als

$$DF = \begin{pmatrix} \gamma - 2\gamma \frac{u_0}{K} - \alpha v_0 & -\alpha u_0 \\ -\beta v_0 & \rho - 2\rho \frac{v_0}{M} - \beta u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_u(u_0, v_0) - \gamma \frac{u_0}{K} & -\alpha u_0 \\ -\beta v_0 & \Gamma_v(u_0, v_0) - \rho \frac{v_0}{M} \end{pmatrix}.$$

Die Gleichgewichtspunkte dieses Systems haben wir bereits an anderer Stelle als $(0, 0)$, $(K, 0)$, $(0, M)$ und (u^*, v^*) mit

$$u^* = \frac{\rho K(\alpha M - \gamma)}{\alpha \beta K M - \gamma \rho}, \quad v^* = \frac{\gamma M(\beta K - \rho)}{\alpha \beta K M - \gamma \rho}$$

als Koexistenzgleichgewicht identifiziert, welches natürlich nur sinnvoll ist, wenn beide Werte positiv sind. Das ist der Fall, wenn

1. $\alpha M < \gamma$ und $\beta K < \rho$ (und dann $\alpha \beta K M < \gamma \rho$), oder
2. $\alpha M > \gamma$ und $\beta K > \rho$ (und dann $\alpha \beta K M > \gamma \rho$)

ist.

Im ersten Fall stellen wir fest, dass die JACOBI-Matrix

$$\begin{pmatrix} -\gamma \frac{u^*}{K} & -\alpha u^* \\ -\beta u^* & -\rho \frac{v^*}{M} \end{pmatrix}$$

negative Spur und positive Determinante

$$\left(\frac{\gamma \rho}{KM} - \alpha \beta \right) u^* v^*$$

hat, das Koexistenzgleichgewicht also stabil ist. Die Gleichgewichte $(K, 0)$ und $(0, M)$ sind dann beide Sättel. In diesem Fall dominiert das intrinsische Wachstum der beiden Spezies den Wettbewerb und stabile Koexistenz ist zu erwarten.

Im zweiten Fall ist der Punkt (u^*, v^*) ein Sattel (negative Funktionaldeterminante), dessen stabile Mannigfaltigkeit als Separatrix den positiven Quadranten in die Einzugsgebiete der beiden stabilen Knoten $(K, 0)$ und $(0, M)$ teilt. Je nach Anfangsbedingung wird also eine der beiden Spezies aussterben und die andere ihrem Gleichgewichtspunkt zustreben.

Nun stellen wir uns vor, der Wettbewerbseffekt trete verzögert ein. Im Beispiel der Bakterien, die einander vergiften, ist es etwa sinnvoll anzunehmen, dass die in nicht allzu ferner Vergangenheit produzierten Giftstoffe zum aktuellen toxischen Effekt beitragen.

Im Sinne unserer Warnung am Anfang dieser Beispiele sei hier darauf verwiesen, dass eine strenge Modellierung verlangte, die Konzentrationen der Giftstoffe durch weitere Differenzialgleichungen zu beschreiben, in denen Produktion, Zerfall und Aufnahme dieser Stoffe durch die Bakterien durch entsprechende Terme modelliert wird. Das mag in diesem einfachen System sogar noch realisierbar sein, allerdings besteht dabei die Gefahr, das Modell zu sehr aufzublähen und den Überblick zu verlieren.

Nach dieser Zwischenbemerkung beginnen wir mit der einfachsten denkbaren verteilten Verzögerung, die alle im vergangenen Intervall der Länge τ produzierten Wettbewerbseffekte gleich gewichtet.

$$\dot{u}(t) = u(t) \left(\gamma - \gamma \frac{u(t)}{K} - \frac{\alpha}{\tau} \int_{t-\tau}^t v(s) ds \right) \quad (4.3.18a)$$

$$\dot{v}(t) = v(t) \left(\rho - \rho \frac{v(t)}{M} - \frac{\beta}{\tau} \int_{t-\tau}^t u(s) ds \right). \quad (4.3.18b)$$

Die Gleichgewichtspunkte sind natürlich die gleichen wie für das unverzögerte System; uns interessiert speziell das Koexistenzgleichgewicht (u^*, v^*) , dessen Existenz als positives Gleichgewicht wir im folgenden annehmen wollen.

Bezeichnen wir die (als klein angenommenen) Abweichungen einer Lösung (u, v) vom Gleichgewichtspunkt mit

$$\tilde{u}(t) = u(t) - u^* \quad \text{und} \quad \tilde{v}(t) = v(t) - v^*,$$

so erfüllen diese

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}(t) = (\tilde{u}(t) + u^*) \left(-\gamma \frac{\tilde{u}(t)}{K} - \frac{\alpha}{\tau} \int_{t-\tau}^t \tilde{v}(s) ds \right) \quad (4.3.19a)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}(t) = (\tilde{v}(t) + v^*) \left(-\rho \frac{\tilde{v}(t)}{M} - \frac{\beta}{\tau} \int_{t-\tau}^t \tilde{u}(s) ds \right). \quad (4.3.19b)$$

Wieder sammeln wir die in (\tilde{u}, \tilde{v}) linearen Terme und packen alle Terme höherer Ordnung in den Rest r . Dies liefert

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma \frac{u^*}{K} & 0 \\ 0 & -\rho \frac{v^*}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_t(0) \\ \tilde{v}_t(0) \end{pmatrix} - \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 \begin{pmatrix} 0 & \alpha u^* \\ \beta v^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_t(s) \\ \tilde{v}_t(s) \end{pmatrix} ds + r(\tilde{u}_t, \tilde{v}_t) = L(\tilde{u}_t, \tilde{v}_t) + r(\tilde{u}_t, \tilde{v}_t).$$

Nun berechnen wir die Einträge von L_λ indem wir für (\tilde{u}, \tilde{v}) die Funktionen $(\mathcal{E}_\lambda, 0)$ und $(0, \mathcal{E}_\lambda)$ einsetzen. Als ersten Eintrag finden wir also

$$L^1(\mathcal{E}_\lambda, 0) = -\gamma \frac{u^*}{K} e^{\lambda 0} - \frac{\alpha}{\tau} u^* \int_{-\tau}^0 0 ds = -\gamma \frac{u^*}{K}.$$

Der obere rechte Eintrag berechnet sich als

$$L^1(0, \mathcal{E}_\lambda) = -\gamma \frac{u^*}{K} 0 - \frac{\alpha}{\tau} u^* \int_{-\tau}^0 e^{\lambda s} ds = -\frac{\alpha}{\tau} u^* \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda}.$$

Die zweite Zeile von L_λ berechnen wir völlig analog und erhalten

$$L_\lambda = \begin{pmatrix} -\gamma \frac{u^*}{K} & -\alpha u^* \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} \\ -\beta v^* \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} & -\rho \frac{v^*}{M} \end{pmatrix}.$$

Als charakteristische Funktion lesen wir

$$\begin{aligned} \zeta(\lambda) &= \det(\lambda \mathbb{I} - L_\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda + \gamma \frac{u^*}{K} & \alpha u^* \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} \\ \beta v^* \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} & \lambda + \rho \frac{v^*}{M} \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda + \gamma \frac{u^*}{K} \right) \left(\lambda + \rho \frac{v^*}{M} \right) - \alpha \beta \frac{(1 - e^{-\lambda \tau})^2}{(\lambda \tau)^2} u^* v^* \\ &= \zeta_0(\lambda) + \alpha \beta v^* u^* \left(1 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda \tau)^k}{(k+1)!} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

wobei ζ_0 die sich für $\tau = 0$ ergebende charakteristische Funktion für das unverzögerte Problem ist. Bei dieser handelt es sich um ein Polynom zweiten Grades, deren beide Nullstellen stets reell sind und das gleiche Vorzeichen haben, wie man sich leicht überzeugt. Nun stellt sich die Frage, ob die durch Einführung der Verzögerung zu ζ abgeänderte charakteristische Funktion nun auch Lösungen nicht trivialen Imaginärteils hat und sich möglicherweise die Stabilitätseigenschaften des Gleichgewichtspunkts verändern können.

Dazu schreiben wir die charakteristische Funktion zu

$$\zeta(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b - c\theta(\tau\lambda) \quad \text{mit} \quad \theta(z) = \frac{(1 - e^{-z})^2}{z^2}$$

sowie

$$a = \frac{\gamma}{K}u^* + \frac{\rho}{M}v^*, \quad b = \frac{\gamma\rho}{KM}u^*v^*, \quad c = \alpha\beta v^*u^*$$

um. Die Funktion θ ist für $z = \tau\lambda \neq 0$ wohldefiniert und lässt sich durch $\theta(0) := 1$ zu einer ganzen Funktion fortsetzen. Wir rechnen leicht nach, dass der Betrag von $\theta(z)$ für $\operatorname{Re}z > 0$ kleiner als 1 ist. Außerdem ist unter Annahme, der Gleichgewichtspunkt (u^*, v^*) sei positiv und für das unverzögerte Problem stabil, stets

$$b - c = \left(\frac{\gamma\rho}{KM} - \alpha\beta \right) u^*v^*$$

positiv (sonst wären auch die Lösungen der Gleichung $\zeta_0(\lambda) = 0$ nicht beide vom gleichen Vorzeichen). Daraus schließen wir nun aber zusammen, dass die Lösungen der durch θ gestörten Gleichung $\zeta(\lambda) = 0$ für positive τ ebenfalls negativen Realteil haben müssen, wenn beide Lösungen der ungestörten Gleichung (mit $\theta = 1$) negativ sind.

Das ganze lässt sich auch noch veranschaulichen, indem man etwa γ , K und M fixiert (was durch Reskalierung der Zeit und Messung der Populationsgrößen in Vielfachen der entsprechenden Tragfähigkeiten immer möglich ist) und Lösungen der charakteristischen Gleichung für verschiedene Werte von α , β , ρ und τ untersucht.

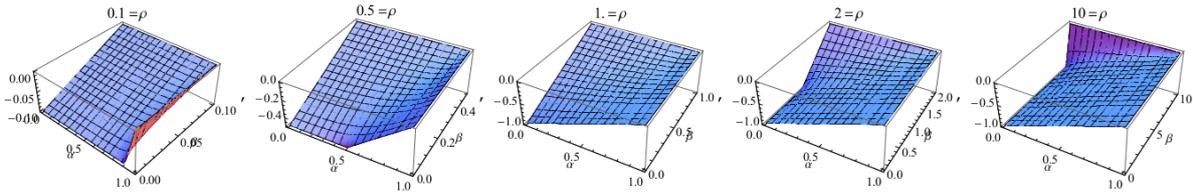


Abbildung 4.2: Verhalten der größeren der beiden reellen Lösungen der charakteristischen Gleichung $\zeta_0(\lambda) = 0$ des unverzögerten Systems für fixierte $\gamma = K = M = 1$ und verschiedene Werte von ρ in Abhängigkeit von α und β . Man erkennt schnell, dass diese Lösung gegen Null strebt, wenn die Parameter α und β den Rand des Gebiets erreichen, in dem ein positiver, stabiler Fixpunkt existiert (d.h., $\alpha \nearrow \frac{\gamma}{M} = 1$ oder $\beta \rightarrow \frac{\rho}{K} = \rho$).

Für die unverzögerte Gleichung können wir die charakteristische Gleichung $\zeta_0(\lambda) = 0$, welche eine quadratische ist, explizit lösen und finden im Fall $u^* > 0, v^* > 0$ stets zwei reelle Lösungen gleichen Vorzeichens, wie wir leicht nachrechnen. Allerdings sehen diese in Abhängigkeit von den Parametern recht unübersichtlich aus. Bei gegebenen $\gamma = K = M = 1$ können wir die größere dieser beiden Lösungen aber einmal für verschiedene Werte von ρ in Abhängigkeit von $\alpha \in (0, 1)$ und $\beta \in (0, \rho)$ (das sind die für ein stabiles Gleichgewicht zulässigen Parameterbereiche) zeichnen. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.2 zu sehen.

Bei genauerer Untersuchung der Gleichung stellen wir schnell fest, dass $\lambda = 0$ niemals eine Lösung sein kann, da $\zeta(0) = b - c > 0$ ist. Allerdings rückt zu gegebenen α, β und ρ eine reelle Lösung für $\tau \rightarrow \infty$ sehr nah an die Null heran, wie wir in Abbildung 4.3 auf der linken Seite an einem Beispiel ablesen können. Man beachte, dass es sich hier um einen Fall handelt, in dem die Bedingungen für einen stabilen Fixpunkt im unverzögerten System nur hauchdünn erfüllt sind.

Das rechte Diagramm in 4.3 zeigt (erneut für eine beispielhafte Kombination von Parametern), dass es gänzlich illusorisch ist, einen im unverzögerten System instabilen Gleichgewichtspunkt durch Verzögerung zu stabilisieren. Vielmehr wird nun die charakteristische Gleichung stets sogar eine positive reelle Lösung behalten, die für wachsende τ zwar auch an die Null heranrückt, diese jedoch nie erreicht.

Versuchen wir nun wieder, rein imaginäre Lösungen $\lambda = i\eta$ der Gleichung zu finden, so erhalten wir für η die Gleichungen

$$0 = \eta^4 - b\eta^2 - 2\frac{c}{\tau^2}(\cos(\tau\eta) - 1)\cos(\tau\eta) \quad (\operatorname{Re}\zeta \stackrel{!}{=} 0)$$

$$0 = -a\eta^3 - 2\frac{c}{\tau^2}(1 - \cos(\tau\eta))\sin(\tau\eta) \quad (\operatorname{Im}\zeta \stackrel{!}{=} 0),$$

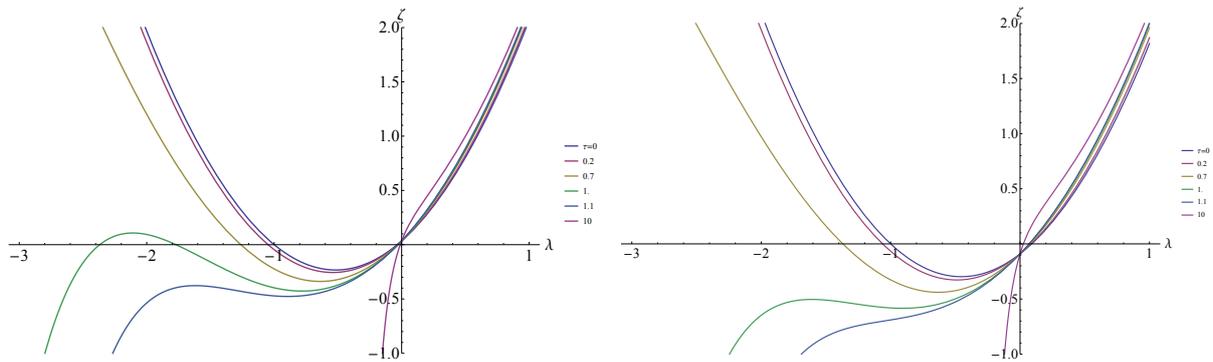


Abbildung 4.3: Graph der charakteristischen Funktionen ζ für reelle λ und verschiedene Werte von τ mit Parametern $\gamma = \rho = K = M = 1$ sowie $\alpha = 0.9, \beta = 0,95$ (stabiles Gleichgewicht, *links*) bzw. $\alpha = \beta = 1.2$ (instabiles Gleichgewicht, *rechts*).

welche für keine Kombination von in die Koeffizienten a, b, c eingehenden Parameter gleichzeitig gelöst werden können, welche zu einem stabilen Gleichgewichtspunkt für das unverzögerte System führen. Das bestätigt uns noch einmal die bereits aufgestellte Beobachtung, dass die Verzögerung unser Koexistenzgleichgewicht nicht destabilisieren kann.

Die Frage nach den möglichen Oszillationen beantworten wir nur indirekt. Zunächst werden wir nicht erwarten dürfen, dass sich ein Grenzyklus bildet, der periodische Lösungen liefert. Dazu müßte der Gleichgewichtspunkt selbst instabil werden. Allerdings hat die charakteristische Gleichung für hinreichend große τ durchaus echt komplexe Lösungen. Die Herausbildung eines Paares solcher erahnen wir im linken Bild von Abbildung 4.3, wo zwischen $\tau = 1$ und $\tau = 1.1$ zwei reelle Lösungen verschwinden und zu einem Paar komplex konjugierter Lösungen werden.

Allerdings wird für generische Anfangsbedingungen das Langzeitverhalten der Lösungen (jedenfalls in der Linearisierung) durch die für wachsendes τ immer näher an die Null rückende reelle Nullstelle von ζ dominiert werden, während die Oszillationen deutlich schneller aussterben werden.

Räuber-Beute-Systeme mit Verzögerung

Abschließend interessieren wir uns für ein Räuber-Beute-System vom LOTKA-VOLTERRA-Typ mit intrinsisch logistischem Beutewachstum und verzögerter Wechselwirkung. Das Modell lautet

$$\dot{u}(t) = u(t) \left(1 - \frac{u(t)}{K} - \alpha v(t) \right) \tag{4.3.20a}$$

$$\dot{v}(t) = v(t) (-\delta + \beta u(t - \tau)), \tag{4.3.20b}$$

wobei die Verzögerung in der Wechselwirkung andeuten soll, dass die Räuber mehr Muße haben, sich ihrer Fortpflanzung zu widmen, wenn sie genug zu fressen finden. Bei einer Trächtigkeitsdauer von τ Zeiteinheiten bedeutet das gerade, dass die Anzahl der Geburten zum Zeitpunkt t vom Beuteangebot zur Zeit $t - \tau$ abhängt.

Als Gleichgewichtslösungen finden wir trivialerweise $(0, 0)$ (weder Räuber noch Beute), das Gleichgewicht $(K, 0)$ für die Beutepopulation in Abwesenheit der Räuber sowie das mögliche Koexistenzgleichgewicht

$$(u^*, v^*) = \left(\frac{\delta}{\beta}, \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{\delta}{\beta K} \right) \right) = \left(u^*, \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{u^*}{K} \right) \right),$$

welches nur als positives solches existiert, wenn $\beta K > \delta$ ist.

Wir fragen nun speziell nach der Stabilität dieses Koexistenzgleichgewichts. Dazu linearisieren wir um (u^*, v^*) (genauer um (u^*, v^*)). Dazu definieren wir $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*$ und $\tilde{v}(t) = v(t) - v^*$. Dann ist

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}(t) = (\tilde{u}(t) + u^*) \left(1 - \frac{\tilde{u}(t) + u^*}{K} - \alpha(\tilde{v}(t) + v^*) \right) = -(\tilde{u}(t) + u^*) \left(\frac{\tilde{u}}{K} + \alpha \tilde{v}(t) \right) \tag{4.3.21a}$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}(t) = (\tilde{v}(t) + v^*) (-\delta + \beta(\tilde{u}(t - \tau) + u^*)) = (\tilde{v}(t) + v^*) \beta \tilde{u}(t - \tau). \tag{4.3.21b}$$

Die Grundannahme der Linearisierung ist wieder die Kleinheit von \tilde{u} und \tilde{v} , wodurch die linearen Terme alle Terme höherer Ordnung dominieren. Die linearisierte Gleichung für $x \approx \tilde{u}$ und $y \approx \tilde{v}$ lautet

also

$$\dot{x}(t) = -\frac{\delta}{\beta K}x(t) - \frac{\alpha\delta}{\beta}y(t) \quad (4.3.22a)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\alpha} \left(\beta - \frac{\delta}{K} \right) x(t - \tau), \quad (4.3.22b)$$

oder kurz

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{\beta K} & -\frac{\alpha\delta}{\beta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t(0) \\ y_t(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} \left(\beta - \frac{\delta}{K} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t(-\tau) \\ y_t(-\tau) \end{pmatrix},$$

woraus wir sofort

$$L_\lambda = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{\beta K} & -\frac{\alpha\delta}{\beta} \\ \frac{1}{\alpha} \left(\beta - \frac{\delta}{K} \right) e^{-\lambda\tau} & 0 \end{pmatrix}$$

ablesen. Man beachte, dass für $\tau = 0$ (entsprechend dem nicht verzögerten Modell) beide Eigenwerte dieser Matrix negativen Realteil haben, der untersuchte Gleichgewichtspunkt also stabil ist.

Die charakteristische Gleichung lautet nun

$$0 = \zeta(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{I} - L_\lambda) = \lambda^2 + \frac{\delta}{\mu}\lambda + \delta \left(1 - \frac{\delta}{\mu} \right) e^{-\lambda\tau}, \quad (4.3.23)$$

wobei wir noch die Abkürzung $\mu = \beta K$ eingeführt haben. Interessanterweise hängt die charakteristische Gleichung gar nicht mehr vom Parameter α ab!

Wir schreiben $\lambda = \xi + i\eta$ und suchen wieder nach Lösungen mit $\xi = 0$ (wir wollen wissen, wann Lösungen der charakteristischen Gleichung die imaginäre Achse überschreiten). Die Gleichungen für Real- und Imaginärteil der charakteristischen Gleichung lauten nun also

$$\begin{aligned} 0 &= \xi^2 - \eta^2 + \frac{\delta}{\mu}\xi + \delta \left(1 - \frac{\delta}{\mu} \right) e^{-\tau\xi} \cos(\tau\eta) &= -\eta^2 + \delta \left(1 - \frac{\delta}{\mu} \right) \cos(\tau\eta) \\ 0 &= 2\xi\eta + \frac{\delta}{\mu}\eta - \delta \left(1 - \frac{\delta}{\mu} \right) e^{-\tau\xi} \sin(\tau\eta) &= \frac{\delta}{\mu}\eta - \delta \left(1 - \frac{\delta}{\mu} \right) \sin(\tau\eta). \end{aligned}$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist schnell abgehandelt, dann bleibt nämlich nur noch $\delta = 0$ oder $\delta = \mu$ als Lösung. Im ersten Fall unterliegen die Räuber keinerlei Vergänglichkeit – eine Situation, die wir nicht untersuchen wollen – und im zweiten Fall hört das Koexistenzgleichgewicht auf zu existieren. Wir sind also ohnehin nur an dem Bereich der μ - δ -Parameterebene zwischen μ -Achse und Diagonale im ersten Quadranten interessiert, der von diesen Lösungen eingeschlossen wird.

Für $\delta, \mu > 0$ berechnen wir aus der zweiten Gleichung

$$\mu - \delta = \frac{\eta}{\sin(\eta\tau)},$$

was positiv sein soll, damit der Gleichgewichtspunkt überhaupt existiert. Das schränkt die möglichen Werte für η schon ein.

Wir setzen dies in die mit μ durchmultiplizierte erste Gleichung ein:

$$0 = -\mu\eta^2 + \delta\eta \cot(\eta\tau).$$

Hier dürfen wir durch η teilen, da wir die Lösungen für $\eta = 0$ ja schon gefunden haben, und erhalten

$$\mu = \delta \frac{\cot(\eta\tau)}{\eta},$$

was auch positiv sein muss, woraus wir eine weitere Einschränkung an die zu untersuchenden Werte von η erhalten. Weiter berechnen wir

$$\delta = \frac{\eta^2}{\cos(\eta\tau) - \eta \sin(\eta\tau)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\eta \cot(\eta\tau)}{\cos(\eta\tau) - \eta \sin(\eta\tau)}.$$

Dies liefert uns zu gegebenem τ wieder parametrisierte Kurven in der δ - μ -Ebene, entlang derer rein imaginäre Lösungen der charakteristischen Gleichung existieren. Diese Kurven sind für verschiedene Werte von τ in Abbildung 4.4 dargestellt. Dabei haben wir für kleine τ nur den ersten relevanten Zweig (für $\eta \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$) dargestellt, für $\tau = 4$ hingegen die ersten drei Zweige (also zusätzlich für $\eta \in (2\frac{\pi}{\tau}, \frac{5\pi}{2\tau})$ und $\eta \in (4\frac{\pi}{\tau}, \frac{9\pi}{2\tau})$).

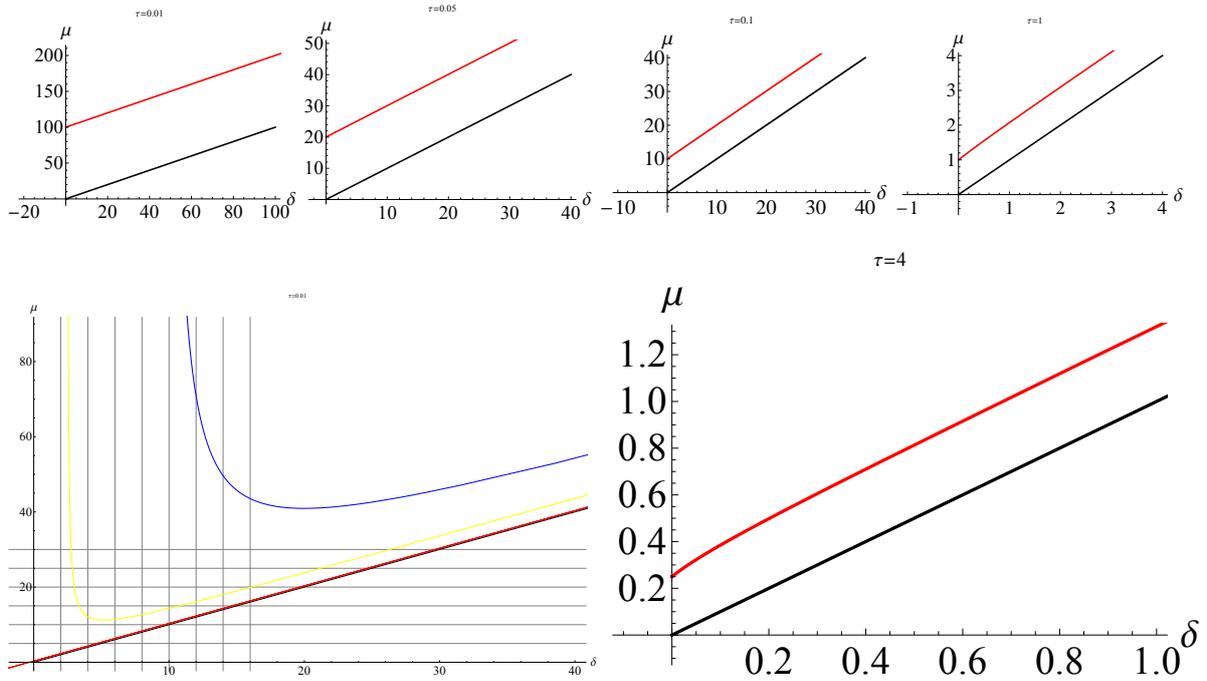


Abbildung 4.4: Kurven in der δ - μ -Ebene, entlang derer rein imaginäre Lösungen von $\zeta(\lambda) = 0$ existieren. In der oberen Reihe sind die ersten Zweige dieser Kurven für $\tau = 0.01, \tau = 0.05, \tau = 0.1$ und $\tau = 1$ zu sehen. Unten links sind die ersten drei Zweige für $\tau = 4$ dargestellt, unten rechts der erste dieser Zweige etwas deutlicher für kleine μ und δ .

Darin nehmen wir uns den Fall $\tau = 4$ mal etwas genauer und suchen uns in ausgewählten Zusammenhangskomponenten des positiven Quadranten je einen Parameterpunkt aus, für den wir die Gleichung $\zeta(\lambda) = 0$ graphisch lösen. Dazu zeichnen wir die Kurven $\{\operatorname{Re}\zeta(\lambda) = 0\}$ und $\{\operatorname{Im}\zeta(\lambda) = 0\}$ in der komplexen Ebene. Deren Schnittpunkte sind dann selbstverständlich die Lösungen der charakteristischen Gleichung.

Nun zählen wir die Anzahl der solchen mit positivem Realteil und stellen fest, dass für (δ, μ) in der Zusammenhangskomponente zwischen der Diagonalen und dem ersten Zweig der wie oben parametrisierten Kurve alle Lösungen in der linken Halbebene liegen, während in den anderen Zusammenhangskomponenten Lösungen mit positivem Realteil existieren. Das ist nicht nur für $\tau = 0$, sondern ganz allgemein der Fall.

Wenn wir nun in Abbildung 4.4 erkennen, dass dieser relevante erste Zweig für wachsende τ immer dichter an die Diagonale heranrückt, schließen wir daraus wie schon für die lineare Gleichung (3.3.13) in Satz 3.27, dass zu gegebenem $\tau > 0$ ein Bereich in der δ - μ -Ebene existiert, in welchem das Koexistenzgleichgewicht stabil ist. Insbesondere schneiden die monoton wachsenden ersten Zweige der parametrisierten Kurven die μ -Achse in einem von τ abhängigen (genauer: mit wachsendem τ kleiner werdenden) positiven Wert $\mu_0(\tau)$, was uns erlaubt, zu gegebenem $\tau > 0$ zu folgern, dass für genügend kleine μ das Koexistenzgleichgewicht für alle $\delta \in (0, \mu)$ stabil ist.

Umgekehrt finden wir zu gegebenen δ und μ ein τ_0 derart, dass für alle $\tau \in (0, \tau_0)$ der erste Zweig oberhalb des Punktes (δ, τ) liegt und erneut das Koexistenzgleichgewicht stabil bleibt. Wieder finden wir unser allgemeines Prinzip bestätigt, dass für gegebene Parameter die Stabilität von Gleichgewichtspunkten durch hinreichend kleine Verzögerungen nicht zerstört wird.

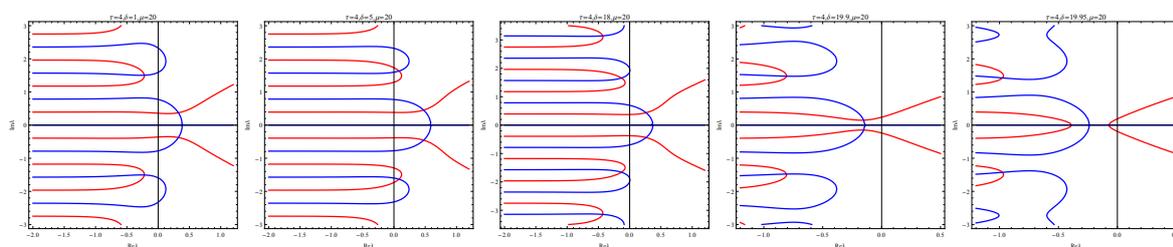


Abbildung 4.5: Dargestellt sind die Lösungsmengen $\{\text{Im}\zeta(\lambda) = 0\}$ (*blau*) und $\{\text{Re}\zeta(\lambda) = 0\}$ (*rot*) für $\tau = 4$, $\mu = 20$ und verschiedene Werte von δ , die entsprechend Abbildung 4.4 entlang der horizontalen Geraden $\{\mu = 20\}$ die verschiedenen Zusammenhangskomponenten des Keils $\{0 < \delta < \mu\}$ durchlaufen. Wir stellen fest, dass nur dann alle Lösungen der charakteristischen Gleichung (erkennbar als Schnittpunkte der blauen und roten Nullstellengebilde) negativen Realteil haben, wenn δ hinreichend groß ist, genauer, wenn $\mu - \delta$ hinreichend klein ist. Wenn sich der untersuchte Punkt (δ, μ) der Diagonalen annähert, wird die führende Lösung reell und strebt für $\delta \nearrow \mu$ gegen Null, wie wir im äußerst *rechten* Bild erkennen. Man beachte auch, dass im zweiten Fall sogar zwei Paare konjugiert komplexer Lösungen positiven Realteils existieren.

Literaturverzeichnis

- [1] Brauer, F., Castillo-Chavez, C., *Mathematical models in population biology and epidemiology*, 2nd ed., Springer (2012)
- [2] Chicone, C., *Ordinary differential equations with applications*, 2nd ed., Springer (2006)
- [3] Fuhrmann, J., *Einführung in die mathematische Biologie*, Vorlesungsskript (2015)
- [4] Gopalsamy, K., *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, Kluwer (1992)
- [5] Hale, J. K., Verduyn Lunel, S. M., *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer (1993)
- [6] Heuser, H., *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 6. Auflage, Vieweg-Teubner (2009)
- [7] Perko, L., *Ordinary differential equations and dynamical systems*, 3rd ed., Springer (2001)
- [8] Smith, H., *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, Springer (2010)
- [9] Sternberg, S., *Dynamical Systems*, Dover (2010)
- [10] Prüss, J. W., Wilke, M., *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*, Birkhäuser (2010)
- [11] Walter, W., *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, 7. Auflage, Springer (2000)